MATERIAL DO ALUNO

MODERNAmigos

Geometria Plana

CADERNO DE REVISÃO

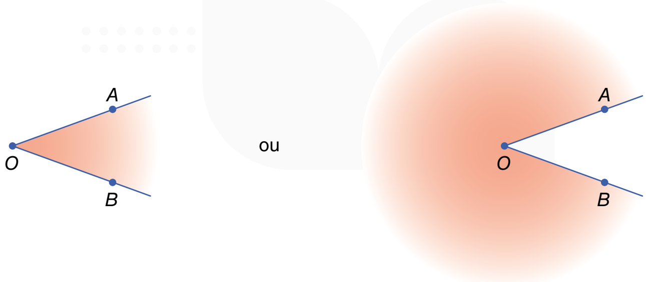
MODERNA

Geometria plana

A Geometria estuda as figuras quanto às formas e às medidas. Neste tema, estudaremos a Geometria plana, formalizada no século III a.C. pelo matemático grego Euclides de Alexandria.

Ângulos

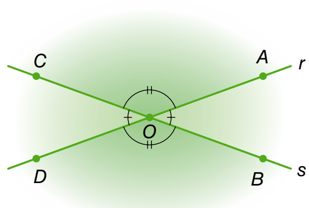
Duas semirretas de mesma origem separam em duas regiões o plano que as contém. A reunião dessas duas semirretas com uma dessas regiões é chamada de **ângulo**.



- Um ângulo de uma volta completa mede 360°.
- Um ângulo reto é um ângulo de medida 90°.
- Um ângulo agudo é um ângulo de medida maior que 0° e menor que 90°.
- Um ângulo obtuso é um ângulo de medida maior que 90° e menor que 180°.
- Dois ângulos são congruentes quando têm a mesma medida.
- Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é 90°.
- Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é 180°.

Ângulos opostos pelo vértice

Duas retas concorrentes, r e s, determinam pares de ângulos congruentes chamados de **opostos pelo vértice**.

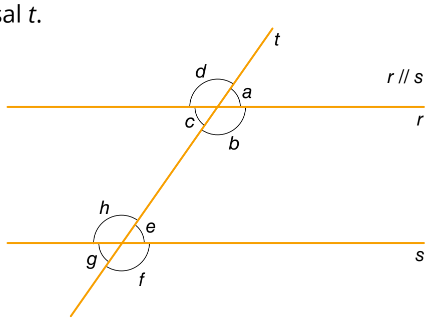


$A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$

$A\hat{O}C \cong B\hat{O}D$

Retas paralelas cortadas por uma transversal

Considere duas retas paralelas, r e s, cortadas por uma transversal t.



- Dois ângulos alternos ou correspondentes têm medidas iguais.

ângulos alternos $\begin{cases} \text{internos}: b = h;\ c = e \\ \text{externos}: a = g;\ d = f \end{cases}$

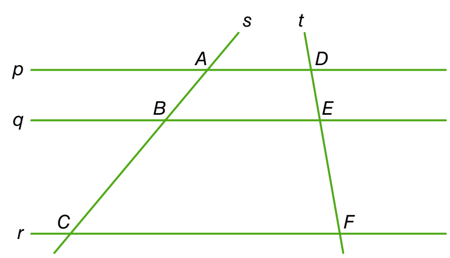
ângulos correspondentes $\begin{cases} a = e;\ b = f \\ c = g;\ d = h \end{cases}$

- Dois ângulos colaterais são suplementares.

ângulos colaterais $\begin{cases} \text{internos}: b + e = 180°; c + h = 180° \\ \text{externos}: a + f = 180°; d + g = 180° \end{cases}$

Teorema de Tales

Se três ou mais retas paralelas concorrem com duas retas transversais, então a razão entre as medidas de dois segmentos de uma mesma transversal é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes da outra transversal.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF};\ \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF};\ \frac{CB}{CA} = \frac{FE}{FD}$$

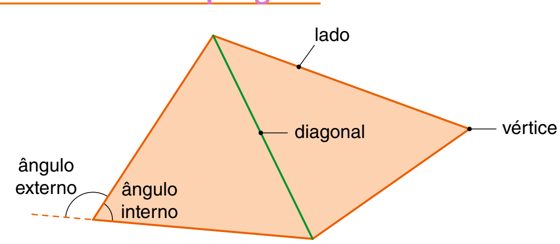
Polígonos

Considere, em um plano, uma linha L formada por segmentos de reta tais que:

- cada extremidade de qualquer um deles é extremidade de dois e apenas dois deles;
- dois segmentos consecutivos quaisquer, dentre eles, não são colineares;
- dois segmentos não consecutivos quaisquer, dentre eles, não têm ponto comum.

Essa linha L separa o plano em duas regiões, das quais uma é limitada. A reunião da linha L com essa região limitada é chamada de **polígono**.

Elementos de um polígono



Nomenclatura

- Os polígonos são nomeados de acordo com o número de lados (ou vértices).

Número de lados (número de vértices)	Nome do polígono
3	triângulo ou trilátero
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono ou octágono
9	eneágono
10	decágono
11	undecágono
12	dodecágono

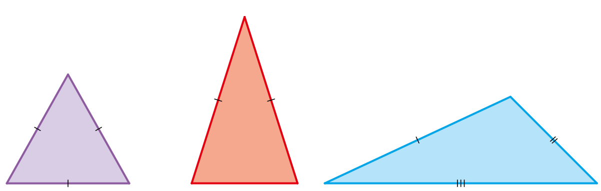
- Um polígono é **convexo** se, e somente se, a reta *r* que contém qualquer um de seus lados deixar os demais lados contidos em um mesmo semiplano de origem *r*.
- Um polígono convexo que possui todos os lados congruentes entre si e todos os ângulos internos congruentes entre si é chamado de **polígono regular**.

Triângulos

Em todo triângulo, a soma das medidas de dois lados é maior que a medida do terceiro lado.

Classificação dos triângulos

- Quanto aos lados, um triângulo pode ser classificado como:

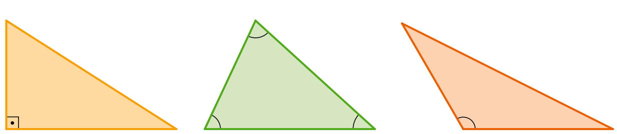


Triângulo equilátero: tem os três lados congruentes entre si.

Triângulo isósceles: tem dois lados congruentes entre si.

Triângulo escaleno: tem os três lados com medidas diferentes entre si.

- Quanto aos ângulos, um triângulo pode ser classificado como:



Triângulo retângulo: tem um ângulo interno reto.

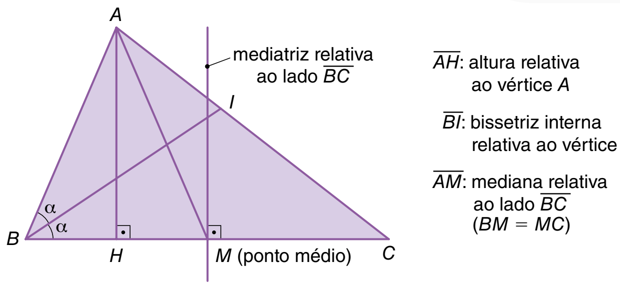
Triângulo acutângulo: tem os três ângulos internos agudos.

Triângulo obtusângulo: tem um ângulo interno obtuso.

No triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa** e os outros, de **catetos**.

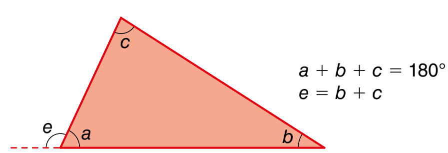
Elementos de um triângulo

- **Altura** de um triângulo é o segmento de reta que liga perpendicularmente um vértice à reta que contém o lado oposto a esse vértice. O ponto de encontro das retas suportes das alturas de um triângulo é chamado de **ortocentro**.
- **Bissetriz interna** de um triângulo é o segmento de reta contido na bissetriz de um ângulo interno, ligando um vértice ao lado oposto. O ponto de encontro das bissetrizes internas de um triângulo é chamado de **incentro**.
- **Mediana** de um triângulo é o segmento de reta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto. O ponto de encontro das medianas de um triângulo é chamado de **baricentro**.
- **Mediatriz** em um triângulo é a reta perpendicular a um dos lados que passa pelo ponto médio desse lado. O ponto de encontro das mediatrizes de um triângulo é chamado de **circuncentro**.



Ângulos nos triângulos

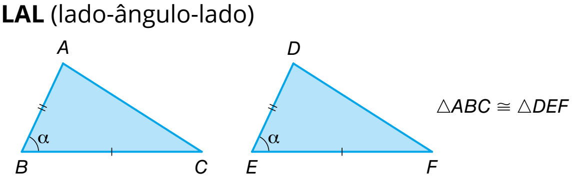
- A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°.
- A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.



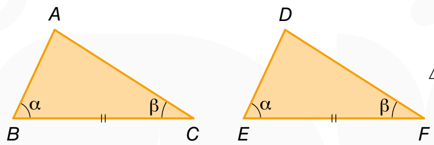
Congruência de triângulos

- Dois triângulos são **congruentes** se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca que associa os três vértices de um triângulo aos três vértices do outro, de modo que:
  - ângulos com vértices correspondentes são congruentes;
  - lados opostos a vértices correspondentes são congruentes.
- Casos de congruência:

  LAL (lado-ângulo-lado)

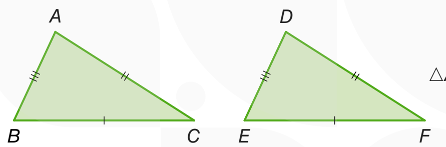


ALA (ângulo-lado-ângulo)



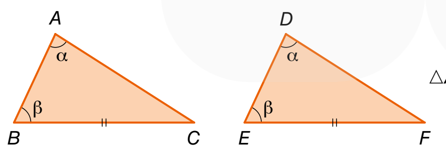
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

LLL (lado-lado-lado)



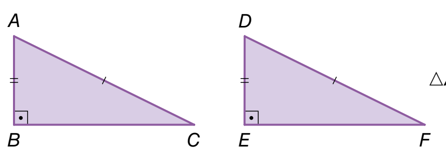
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

LAA$_o$ (lado-ângulo-ângulo oposto)



$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

RHC (ângulo reto-hipotenusa-cateto)



$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Propriedades dos triângulos isósceles

P1. Dois lados de um triângulo são congruentes se, e somente se, os ângulos internos opostos a esses lados são congruentes.

P2. Um triângulo é isósceles se, e somente se, uma bissetriz interna coincide com uma mediana ou uma altura do triângulo.

P3. Um triângulo é isósceles se, e somente se, a mediatriz relativa a um lado contém a mediana, a bissetriz interna ou a altura relativa a esse lado.

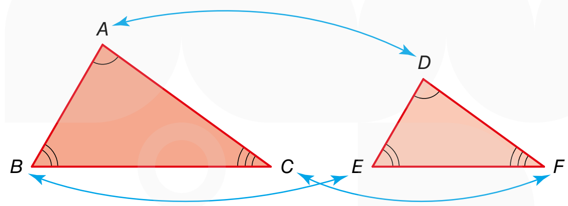
Propriedades dos triângulos retângulos

P1. Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.

P2. Em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa mede metade da medida da hipotenusa.

Semelhança de triângulos

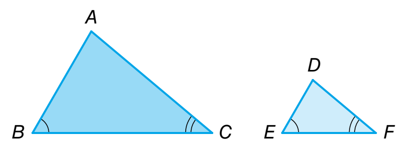
- Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca que associa os três vértices de um dos triângulos aos três vértices do outro, de modo que:
  - ângulos com vértices correspondentes são congruentes;
  - lados opostos a vértices correspondentes são proporcionais.



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{D} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{cases} \text{e } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

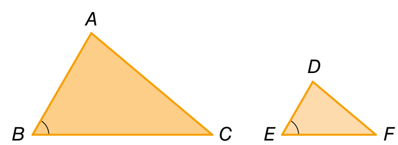
- Casos de semelhança:

AA (ângulo-ângulo)



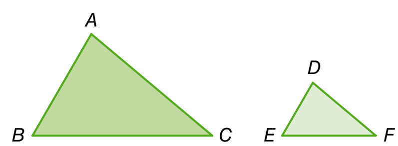
$$\left.\begin{matrix} \hat{B} \cong \hat{E} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

LAL (lado-ângulo-lado)



$$\left.\begin{matrix} \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

LLL (lado-lado-lado)



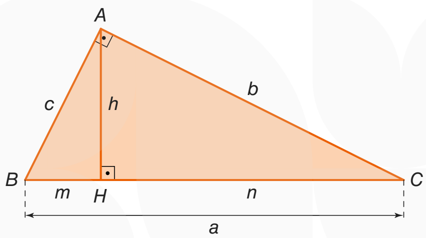
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

- O número k, tal que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$, é chamado de **razão de semelhança** do triângulo ABC para o triângulo DEF.

Nota: O conceito de semelhança pode ser estendido para quaisquer figuras geométricas.

Relações métricas no triângulo retângulo

Considere o triângulo retângulo *ABC* abaixo.



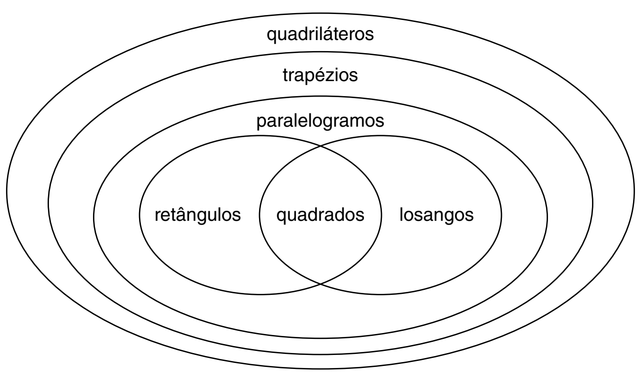
- b e c são as medidas dos catetos;
- a é a medida da hipotenusa;
- h é a medida da altura relativa à hipotenusa;
- m é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa;
- n é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.

  Temos as seguintes relações:

$a^2 = b^2 + c^2$	$a \cdot h = b \cdot c$
$h^2 = m \cdot n$	$b \cdot h = c \cdot n$
$c^2 = a \cdot m$	$c \cdot h = b \cdot m$
$b^2 = a \cdot n$	

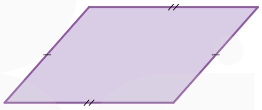
Quadriláteros

- **Trapézio** é todo quadrilátero que possui pelo menos um par de lados paralelos.
- **Paralelogramo** é todo trapézio que apresenta dois pares de lados paralelos.
- **Retângulo** é todo paralelogramo que possui os quatro ângulos internos retos.
- **Losango** é todo paralelogramo que possui os lados congruentes entre si.
- **Quadrado** é todo paralelogramo que possui os quatro ângulos internos retos e os quatro lados congruentes entre si.

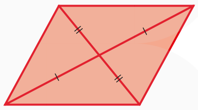


Propriedades dos quadriláteros notáveis

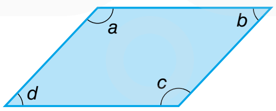
P1. Em todo paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes.



P2. O ponto de intersecção das diagonais de um paralelogramo é o ponto médio de cada uma delas.

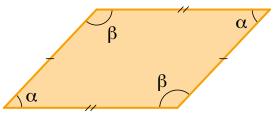


P3. Em todo paralelogramo, dois ângulos consecutivos quaisquer são suplementares.

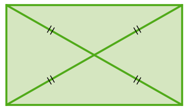


$a + b = 180°$
$b + c = 180°$
$c + d = 180°$
$d + a = 180°$

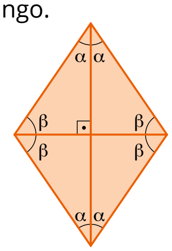
P4. Em todo paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes.



P5. As diagonais de um retângulo são congruentes.

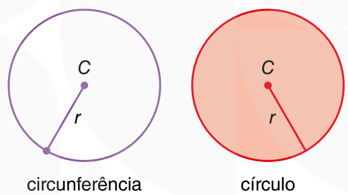


P6. As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos do losango.

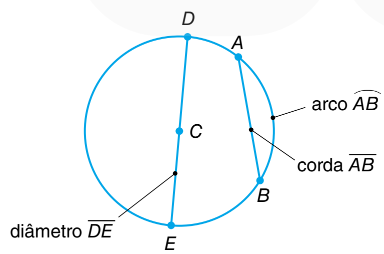


Circunferência e círculo

- Sendo C um ponto do plano e r uma distância não nula, chama-se **circunferência** de centro C e raio r o conjunto dos pontos desse plano cuja distância ao ponto C é igual a r.
- A reunião de uma circunferência com o conjunto de seus pontos interiores é chamada de **círculo**.



- Dois pontos, A e B, de uma circunferência dividem-na em duas partes chamadas de **arcos**. O segmento de reta $\overline{AB}$ é chamado de **corda**. Uma corda que passa pelo centro C da circunferência é chamada de **diâmetro**.

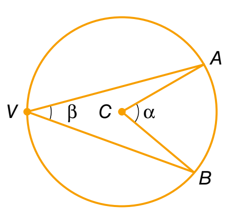


Propriedade das cordas

Em uma circunferência de centro C, sejam dois pontos distintos, A e B, e M um ponto da corda $\overline{AB}$. O segmento $\overline{AB}$ é perpendicular à corda $\overline{AB}$ se, e somente se, M for ponto médio dessa corda.

Ângulos em uma circunferência

- Todo ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência é chamado de **ângulo central** dessa circunferência. A medida, em grau, de um arco de circunferência é a medida do ângulo central que o determina.
- Todo ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência e os lados são secantes a ela é chamado de **ângulo inscrito** nessa circunferência. A medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do ângulo central correspondente.



C é o centro da circunferência
$A\hat{C}B$ é ângulo central
$m(A\hat{C}B) = \alpha$
$A\hat{V}B$ é ângulo inscrito
$\beta = \frac{\alpha}{2}$

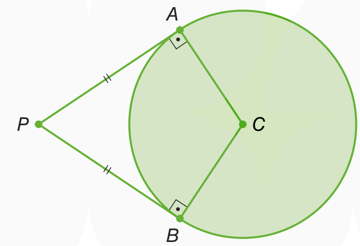
Reta tangente a uma circunferência

Uma reta r e uma circunferência de um mesmo plano são tangentes entre si quando têm um único ponto T em comum.

Propriedades das retas tangentes

P1. Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

P2. Se P é um ponto exterior a uma circunferência e os pontos A e B pertencem a ela, de modo que $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{PB}$ são tangentes à circunferência, então $PA = PB$.



Comprimento da circunferência

- Em qualquer circunferência, a razão entre seu comprimento c e a medida $2r$ de seu diâmetro é constante. Indicamos essa constante por π.

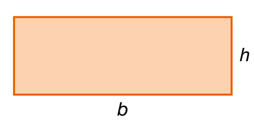
$$\boxed{\frac{c}{2r} = \pi}$$

- O comprimento c de uma circunferência de raio r é dado por:

$$\boxed{c = 2\pi r}$$

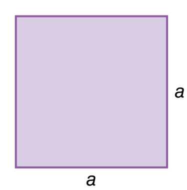
Cálculo da área de alguns polígonos e do círculo

- Retângulo



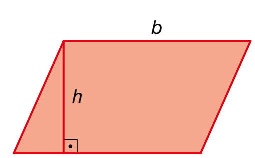
$$\boxed{A = b \cdot h}$$

- Quadrado



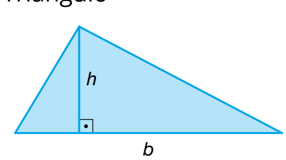
$$\boxed{A = a^2}$$

- Paralelogramo



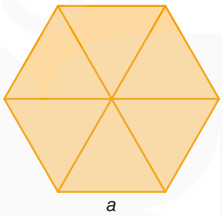
$$\boxed{A = b \cdot h}$$

- Triângulo



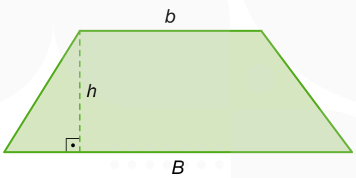
$$\boxed{A = \frac{b \cdot h}{2}}$$

- Hexágono regular



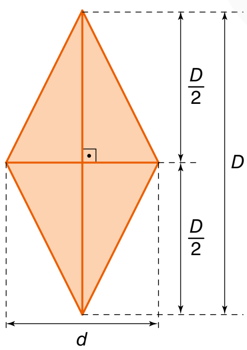
$$A = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

- Trapézio



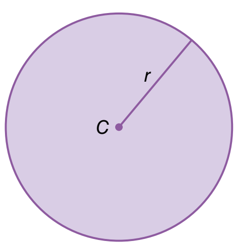
$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

- Losango



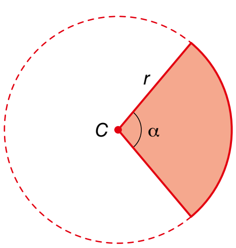
$$A = \frac{d \cdot D}{2}$$

- Círculo



$$A = \pi r^2$$

- Setor circular



$$A = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi$$

Áreas de figuras semelhantes

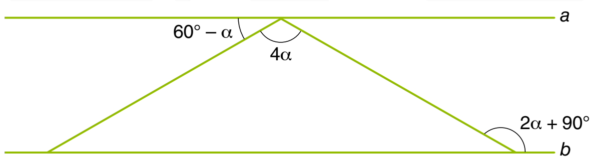
A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre elas.

NO VESTIBULAR

1 **(Fuvest-SP)** No segmento $\overline{AC}$, toma-se um ponto B de forma que $\frac{AB}{AC} = 2\frac{BC}{AB}$. Então, o valor de $\frac{BC}{AB}$ é:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
c) $\sqrt{5}-1$
d) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
e) $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$

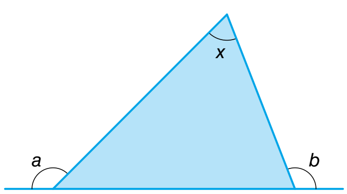
2 **(Mackenzie-SP)** Na figura abaixo, a e b são retas paralelas.



A afirmação correta a respeito do número que expressa, em graus, a medida do ângulo α é:

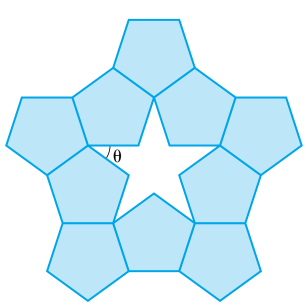
a) um número primo maior que 23.
b) um número ímpar.
c) um múltiplo de 4.
d) um divisor de 60.
e) um múltiplo comum entre 5 e 7.

3 **(UPF-RS)** No triângulo abaixo, x é um ângulo interno e a e b são ângulos externos. Sabendo que $a + b = 210°$ e $3a - 2b = 130°$, sobre o ângulo x pode-se afirmar que:



a) seu suplemento é 110°.
b) seu complemento é 60°.
c) seu complemento é 20°.
d) seu suplemento é 100°.
e) seu suplemento mais seu complemento é 180°.

4 **(Unifesp)** Pentágonos regulares congruentes podem ser conectados, lado a lado, formando uma estrela de cinco pontas, conforme destacado na figura.



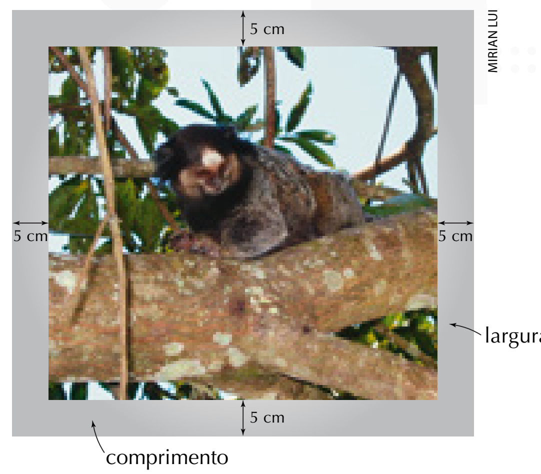
Nestas condições, o ângulo θ mede:

a) 108°
b) 72°
c) 54°
d) 36°
e) 18°

5 **(ITA-SP)** Considere o trapézio $ABDC$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Sejam M e N os pontos médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Então, se $\overline{AB}$ tem comprimento x e $\overline{CD}$ tem comprimento $y < x$, o comprimento de $\overline{MN}$ é igual a:

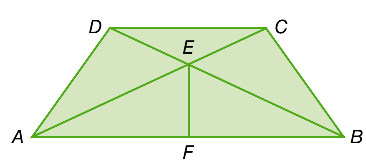
a) $x - y$
b) $\frac{1}{2}(x - y)$
c) $\frac{1}{3}(x - y)$
d) $\frac{1}{3}(x + y)$
e) $\frac{1}{4}(x + y)$

6 **(FGV)** Em uma parede do estande de vendas havia um quadro de 50 cm de comprimento por 45 cm de largura, tendo ao redor uma moldura, como mostra a figura.



a) Justifique por que não são semelhantes os retângulos interior e exterior à moldura.
b) Existe algum número real positivo k que, substituído no lugar de 5 cm, faria com que os dois retângulos do item **a** fossem semelhantes?

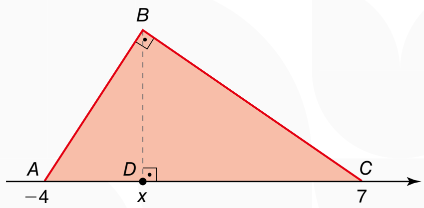
7 **(Unioeste-PR)** A figura a seguir representa um trapézio isósceles em que a base $\overline{DC}$ mede 20 cm, a base $\overline{AB}$ mede 60 cm e a altura mede 12 cm. O segmento $\overline{EF}$ é perpendicular à base $\overline{AB}$ e é bissetriz do ângulo $A\hat{E}B$.



A partir destas informações, pode-se concluir que a medida do segmento $\overline{EF}$ é de:

a) 10 cm
b) 6,8 cm
c) 7,5 cm
d) 9 cm
e) 9,3 cm

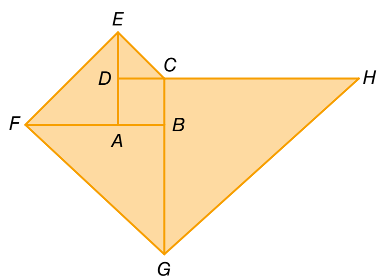
8 **(UFSCar-SP)** A hipotenusa do triângulo retângulo *ABC* está localizada sobre a reta real, conforme indica a figura.



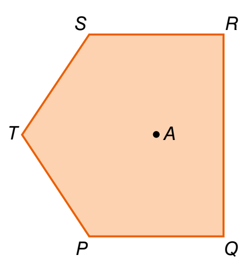
Se $x > 0$ e a medida da altura $\overline{BD}$ relativa ao lado $\overline{AC}$ do triângulo *ABC* é $2\sqrt{6}$, então x é o número real:

a) $2\sqrt{3}$
b) 4
c) $3\sqrt{2}$
d) 5
e) $3\sqrt{3}$

9 **(UFBA)** Na figura abaixo, todos os triângulos são retângulos isósceles, e *ABCD* é um quadrado. Nessas condições, determine o quociente $\frac{GH}{CE}$.



10 **(UFG-GO)** Uma empresa de vigilância irá instalar um sistema de segurança em um condomínio fechado, representado pelo polígono da figura abaixo.

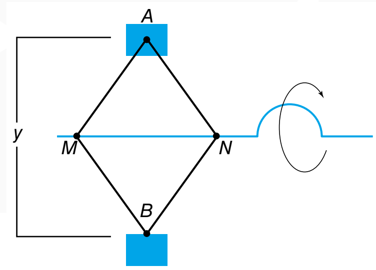


A empresa pretende colocar uma torre de comunicação, localizada no ponto *A*, indicado na figura, que seja equidistante dos vértices do polígono, indicados por *P*, *Q*, *R*, *S* e *T*, onde serão instalados os equipamentos de segurança.

Sabe-se que o lado $\overline{RQ}$ desse polígono mede 3.000 m e as medidas dos outros lados são iguais à distância do ponto *A* aos vértices do polígono.

Calcule a distância do ponto *A*, onde será instalada a torre, aos vértices do polígono.

11 **(Uerj)** Um modelo de macaco, ferramenta utilizada para levantar carros, consiste em uma estrutura composta por dois triângulos isósceles congruentes, *AMN* e *BMN*, e por um parafuso acionado por uma manivela, de modo que o comprimento da base $\overline{MN}$ possa ser alterado pelo acionamento desse parafuso. Observe a figura:



Considere as seguintes medidas: $AM = AN = BM = BN = 4$ dm; $MN = x$ dm; $AB = y$ dm. O valor, em decímetros, de y em função de x corresponde a:

a) $\sqrt{16 - 4x^2}$
b) $\sqrt{64 - x^2}$
c) $\frac{\sqrt{16 - 4x^2}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{64 - 2x^2}}{2}$

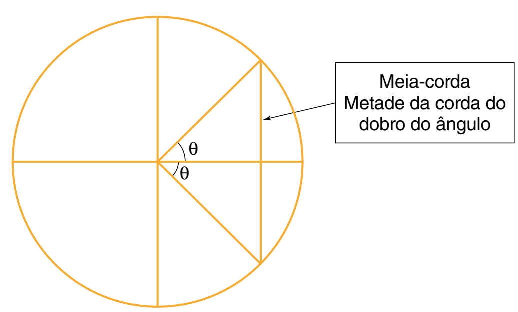
12 **(ITA-SP)** Considere o triângulo *ABC* retângulo em *A*. Sejam $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$ a altura e a mediana relativa à hipotenusa $\overline{BC}$, respectivamente. Se a medida de $\overline{BE}$ é $\left(\sqrt{2} - 1\right)$ cm e a medida de $\overline{AD}$ é de 1 cm, então $\overline{AC}$ mede, em cm:

a) $4\sqrt{2} - 5$.
b) $3 - \sqrt{2}$.
c) $\sqrt{6 - 2\sqrt{2}}$.
d) $3\left(\sqrt{2} - 1\right)$.
e) $3\sqrt{4\sqrt{2} - 5}$.

13 **(Uepa)** Num dos trabalhos escritos no começo do século V d.C. na Índia, encontramos uma tabela “meias-cordas”, representado na figura a seguir. Essas “meias-cordas” representam os nossos atuais senos. Os indianos pensavam na meia-corda como o real segmento em um círculo com raio particular, como, por exemplo, ocorre no livro *Almagest* de Claudius Ptolomeu (85-165), que utilizou um círculo de raio **60**.

(Texto adaptado do livro *A matemática através dos tempos*, Editora Edgard Blücher, 2008.)

Utilizando o mesmo raio considerado por Ptolomeu, o valor da meia-corda indicado na figura para um ângulo de $\theta = 45°$ é:



a) $30\sqrt{2}$
b) $15\sqrt{2}$
c) $15\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

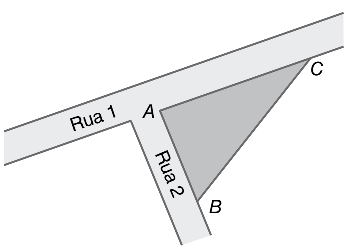
14 **(Fuvest-SP)** Uma circunferência de raio 3 cm está inscrita no triângulo isósceles ABC, no qual $AB = AC$. A altura relativa ao lado $\overline{BC}$ mede 8 cm. O comprimento de $\overline{BC}$ é, portanto, igual a:

a) 24 cm
b) 13 cm
c) 12 cm
d) 9 cm
e) 7 cm

15 **(ITA-SP)** Um triângulo ABC tem lados com medidas $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm, $b = 1$ cm e $c = \frac{1}{2}$ cm. Uma circunferência é tangente ao lado a e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrita ao triângulo. Então, o raio da circunferência, em cm, é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
c) $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

16 **(UCS-RS)** Um terreno na esquina das Ruas 1 e 2, que são perpendiculares, tem forma de triângulo, conforme a figura abaixo.



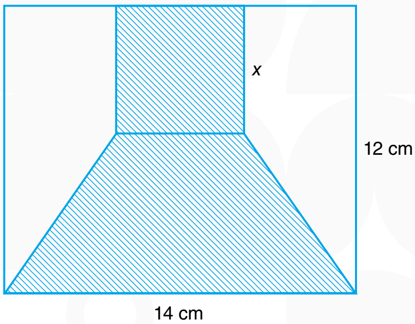
As medidas dos lados do terreno são dadas pela tabela, também abaixo.

Lado	Medida (em metros)
$\overline{AB}$	x
$\overline{AC}$	$x + 10$
$\overline{BC}$	50

A área do terreno, em m^2, é igual a:

a) 600
b) 750
c) 1.000
d) 1.200
e) 2.000

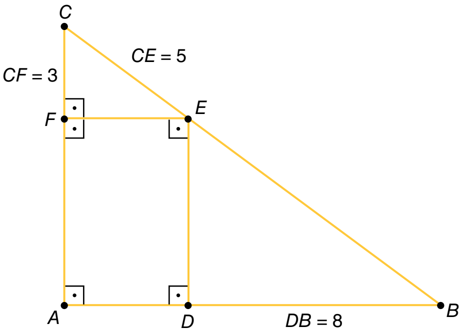
17 **(Unifesp)** De um cartão retangular de base 14 cm e altura 12 cm, deseja-se recortar um quadrado de lado x e um trapézio isósceles, conforme a figura, onde a parte hachurada será retirada.



O valor de x, em centímetro, para que a área total removida seja mínima, é:

a) 3
b) 2
c) 1,5
d) 1
e) 0,5

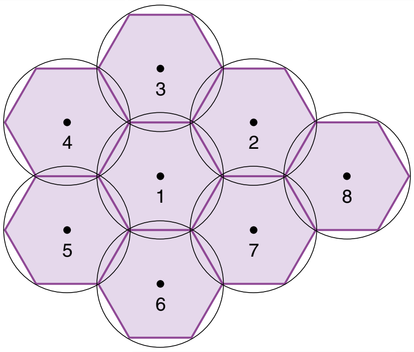
18 **(Ufal)** Na figura abaixo, tem-se $CE = 5$ cm, $CF = 3$ cm e $DB = 8$ cm.



A área do quadrilátero $ADEF$, em centímetros quadrados, é:

a) 20 cm^2
b) 21 cm^2
c) 22 cm^2
d) 23 cm^2
e) 24 cm^2

19 **(UFF-RJ)** No estudo da distribuição de torres em uma rede de telefonia celular, é comum se encontrar um modelo no qual as torres de transmissão estão localizadas nos centros de hexágonos regulares, congruentes, justapostos e inscritos em círculos, como na figura a seguir.



Supondo que, nessa figura, o raio de cada círculo seja igual a 1 km, é correto afirmar que a distância $d_{3,8}$ (entre as torres 3 e 8), a distância $d_{3,5}$ (entre as torres 3 e 5) e a distância $d_{5,8}$ (entre as torres 5 e 8) são, respectivamente, em km, iguais a:

a) $d_{3,8} = 2\sqrt{3}$, $d_{3,5} = 3$, $d_{5,8} = 3 + 2\sqrt{3}$

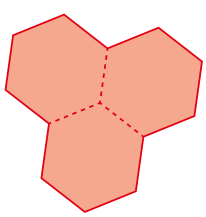
b) $d_{3,8} = 4$, $d_{3,5} = 3$, $d_{5,8} = 5$

c) $d_{3,8} = 4$, $d_{3,5} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $d_{5,8} = 4 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

d) $d_{3,8} = 2\sqrt{3}$, $d_{3,5} = 3$, $d_{5,8} = \sqrt{21}$

e) $d_{3,8} = 4$, $d_{3,5} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $d_{5,8} = \dfrac{9}{2}$

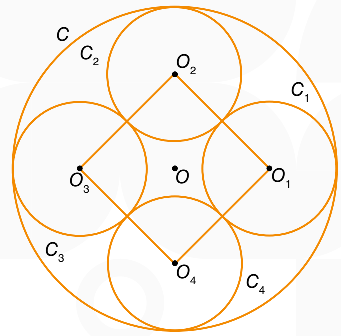
20 **(Fuvest-SP)** Uma das piscinas do Centro de Práticas Esportivas da USP tem formato de três hexágonos regulares congruentes, justapostos, de modo que cada par de hexágonos tem um lado em comum, conforme representado na figura abaixo. A distância entre lados paralelos de cada hexágono é de 25 metros.



Assinale a alternativa que mais se aproxima da área da piscina.

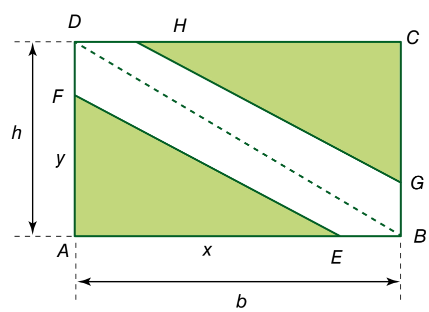
a) 1.600 m^2
b) 1.800 m^2
c) 2.000 m^2
d) 2.200 m^2
e) 2.400 m^2

21 **(UFG-GO)** Na figura a seguir, as circunferências C_1, C_2, C_3 e C_4, de centros O_1, O_2, O_3 e O_4, respectivamente, e mesmo raio r, são tangentes entre si e todas são tangentes à circunferência C de centro O e raio R.



Considerando o exposto, calcule, em função de R, a área do losango cujos vértices são os centros O_1, O_2, O_3 e O_4.

22 **(Inper-SP)** Considere o retângulo $ABCD$ da figura, de dimensões $AB = b$ e $AD = h$, que foi dividido em três regiões de áreas iguais pelos segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$.



As retas $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são paralelas. Dessa forma, sendo $AE = x$ e $AF = y$, a razão $\dfrac{x}{b}$ é igual a:

a) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

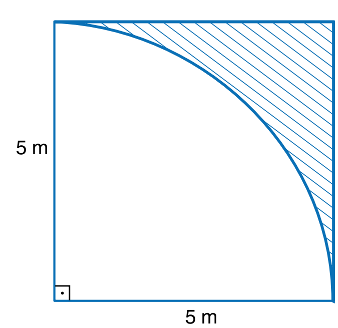
b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

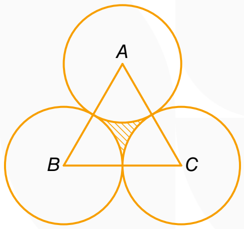
e) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

23 **(PUC-GO)** Analise a figura seguinte e indique, nas alternativas abaixo, qual é a área da região hachurada (use $\pi = 3{,}14$).

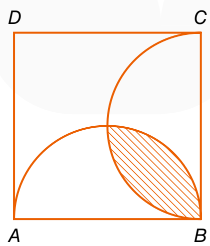


a) 4,985 m^2
b) 5,320 m^2
c) 5,865 m^2
d) 5,375 m^2

24 **(Udesc)** O perímetro do triângulo equilátero ABC é 12 cm, onde A, B e C são os centros das circunferências ilustradas na figura. Calcule a área da região hachurada, delimitada pelas circunferências.



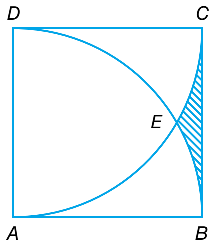
25 **(UFT-TO)** Considere o quadrado $ABCD$ de lado 12 cm e as semicircunferências de arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BC}$, conforme a figura abaixo.



O valor da área da região hachurada é:

a) $12(\pi - 3)\ cm^2$ **c)** $18(\pi - 2)\ cm^2$
b) $10(\pi + 2)\ cm^2$ **d)** $(\pi + 36)\ cm^2$

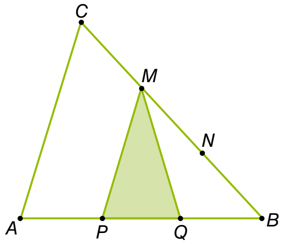
26 **(Fuvest-SP)** Na figura, $ABCD$ é um quadrado de lado 1, DEB e CEA são arcos de circunferências de raio 1.



Logo, a área da região hachurada é:

a) $1 - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ **c)** $1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ **e)** $1 - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$
b) $1 - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $1 + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

27 **(UFMG)** Na figura a seguir, o triângulo ABC tem área igual a 126. Os pontos P e Q dividem o segmento $\overline{AB}$ em três partes iguais, assim como os pontos M e N dividem o segmento $\overline{BC}$ em três partes iguais.



Com base nessas informações:

a) determine a área do triângulo QBN;
b) determine a área do triângulo sombreado PQM.