MODERNA SUPERAÇÃO!

MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
PNLD 2026 - ENSINO MÉDIO
Código da coleção:
0014 P26 01 01 202 814

VOLUME III

ENSINO MÉDIO
3º ANO

Organizadora:
Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
André Luiz Steigenberger

Área de conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

Componente curricular:
Matemática

MODERNA

MODERNA SUPERAÇÃO!

MATEMÁTICA

VOLUME III

ENSINO MÉDIO
3º ANO

Área de conhecimento: Matemática e suas Tecnologias
Componente curricular: Matemática

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
André Luiz Steigenberger
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (PR).
Foi professor de Matemática na rede pública.
Elaborador e editor de materiais didáticos.

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição
São Paulo, 2024

MODERNA

Elaboração dos originais:

André Luiz Steigenberger
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (PR).
Foi professor de Matemática na rede pública.
Elaborador e editor de materiais didáticos.

Aparecida Santana de Souza Chiari
Licenciada e bacharela em Matemática pela Universidade de São Paulo.
Mestra em Educação Matemática pela Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.
Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".
Foi professora de Matemática na rede pública e privada.
Professora universitária. Elaboradora de materiais didáticos.

Fátima Gomes Machado
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (PR).
Especialista em Docência na Educação Superior pela Universidade Estadual de Londrina (PR).
Elaboradora de materiais didáticos.

Leandro Figueira Ferreira
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (PR).
Especialista em Metodologia de Ensino de Matemática e Física pela Faculdade Venda Nova do Imigrante (ES).
Professor de Matemática na rede pública.
Elaborador de materiais didáticos.

Leonardo Bernardo de Morais
Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco.
Mestre e doutor em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco.
Foi professor de Matemática na rede pública. Professor do Instituto Federal de Educação do Sertão Pernambucano.
Elaborador de materiais didáticos.

Organização dos objetos digitais: Maria Cecília da Silva Veridiano
Elaboração dos objetos digitais: Maria Cecília da Silva Veridiano e Mara Regina Garcia Gay

Produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição executiva: Lucilia Franco Lemos dos Santos
Assistência editorial: Sheila C. Molina
Gerência de planejamento editorial: Camila Rumiko Minaki
Preparação de texto e revisão: Moisés Manzano da Silva, Nicolas Hiromi Takahashi
Edição de arte: Brunna Leonardi Caciolato, Denise Maria Capozzi, Vinícius Soares Costa
Editoração eletrônica: Avits Estúdio Gráfico Ltda., Formato Comunicação Ltda., Leandro Júnior Pimenta
Pesquisa iconográfica: Alessandra Roberta Arias
Tratamento de imagens: Vinícius Soares Costa

Edição executiva: Mara Regina Garcia Gay, Maria Cecília da Silva Veridiano
Gerência de *design,* e produção gráfica e digital: Patricia Costa
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Bruno Tonel, Everson de Paula
Capa: Everson de Paula, Paula Miranda Santos
Foto: Homem praticando basquete © Hideki Yoshihara/Aflo/Getty Images
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Marcio H. Kamoto
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Moderna superação! matemática / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável André Luiz Steigenberger. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2024.

3ª ano : ensino médio : volume III.
Componente curricular: Matemática.
Área de conhecimento: Matemática e suas tecnologias.
ISBN 978-85-16-13999-5 (aluno)
ISBN 978-85-16-14000-7 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Steigenberger, André Luiz.

24-222414 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados.

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Canal de atendimento: 0303 663 3762
www.moderna.com.br
2024
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 0 8 6 4 2

APRESENTAÇÃO

Perceber o mundo à nossa volta e compreendê-lo, interagir e participar criticamente dos rumos da sociedade e do meio ambiente, contribuindo para o bem comum, são apenas algumas das atribuições que temos como cidadãos. Nesse sentido, o conhecimento matemático é essencial.

Ler e interpretar criticamente informações apresentadas de diferentes maneiras, provenientes dos mais diversos meios de comunicação; tomar decisões baseadas em constatações matemáticas, como escolher entre comprar à vista ou a prazo; e financiar ou adquirir um consórcio são exemplos da importância da Matemática em nossas vidas. No que diz respeito às tecnologias, fica ainda mais evidente a participação de ideias e conceitos matemáticos.

Esta coleção foi elaborada para auxiliá-lo nessa perspectiva e no caminho posterior a essa etapa de ensino, como o ingresso no Ensino Superior e no mercado de trabalho. Para ajudá-lo na compreensão dos assuntos tratados, são apresentados exemplos e problemas resolvidos, seguidos de propostas de tarefas que buscam consolidar a aprendizagem, além de seções que promovem a cidadania.

Por fim, desejamos a você, estudante, que desenvolva suas habilidades matemáticas e que, com as orientações de seu professor, use este material com dedicação, protagonismo e entusiasmo.

Bom estudo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CONHEÇA SEU LIVRO

Esta coleção está dividida em capítulos que abordam assuntos interessantes e atuais e que o auxiliarão a desenvolver autonomia, criticidade e outras habilidades e competências importantes para a sua aprendizagem. Confira a seguir como seu livro está organizado e entenda o propósito de cada parte dele.


CAPÍTULO 5

POLIEDROS

Parte da Calçada dos Gigantes, na Irlanda do Norte, em 2022.

Entre os muitos fenômenos que mesclam natureza e Matemática, a Calçada dos Gigantes é um dos exemplos mais populares. Localizada ao norte da Irlanda do Norte, essa estrutura é composta de aproximadamente 40 000 colunas de basalto que, em sua maioria, se parecem com prismas de base hexagonal de até 25 m de altura. Apesar de muitas dessas colunas terem formato hexagonal na base, são notados também formatos que lembram polígonos de 4, 5, 7 e 8 lados.

A área que compõe a Calçada dos Gigantes e sua costa foi a primeira da Irlanda do Norte a se tornar um patrimônio cultural da Unesco, sendo um dos pontos turísticos mais populares do país, tanto pela beleza natural como pelo fato de ser um local onde a mitologia e a ciência se encontram.

Diz a lenda que a calçada foi construída pelo gigante norte-irlandês Finn McCool para lutar contra o gigante escocês Benandonner do outro lado do mar. A calçada ligava a costa da Irlanda do Norte à costa da Escócia, usando as colunas de basalto como pavimento. Antes que houvesse o confronto, Finn enganou Benandonner fazendo-o acreditar que era muito maior do que realmente era. Sentindo-se ameaçado, Benandonner fugiu correndo de volta à Escócia, destruindo o caminho que ligava os dois países.

A origem da Calçada dos Gigantes é explicada pela ciência. Estudos geológicos apontam que essa estrutura foi formada há mais de 60 milhões de anos, produto de constantes erupções originadas de uma fissura submersa. O resfriamento da lava fez com que o basalto se contraísse lateralmente, criando um padrão quase regular de fissuras e formando as colunas, que se assemelham a prismas.

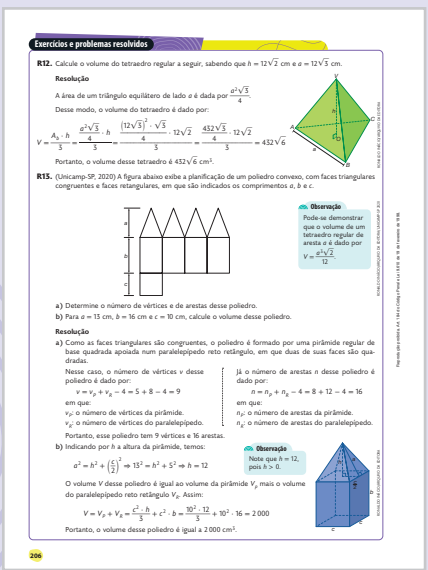
Neste capítulo, você vai estudar:
- poliedros;
- relação de Euler;
- poliedros de Platão;
- poliedros regulares;
- prismas;
- área da superfície de um prisma;
- volume do paralelepípedo reto retângulo;
- princípio de Cavalieri;
- volume de um prisma qualquer;
- pirâmides;
- área da superfície de uma pirâmide;
- volume de uma pirâmide;
- volume de uma pirâmide triangular;
- volume de uma pirâmide qualquer;
- tronco de pirâmide;
- área da superfície de um tronco de pirâmide;
- volume de um tronco de pirâmide.

1. Junte-se a um colega e pesquisem outras estruturas naturais em que seja possível verificar padrões semelhantes aos da Calçada dos Gigantes. Depois, compartilhe com os colegas e o professor as informações obtidas na pesquisa.
2. Quais figuras geométricas espaciais você conhece?
3. Em sua opinião, qual é a importância de estudarmos algumas características das figuras geométricas espaciais?

160 169

Abertura do capítulo

Na abertura de cada capítulo, você terá um contato inicial com os assuntos que serão estudados. Você poderá mostrar o que já sabe e aprimorar seus conhecimentos, trocando ideias com o professor e os colegas sobre diversas temáticas.


Exercícios e problemas resolvidos

R12. Calcule o volume do tetraedro regular a seguir, sabendo que $h = 12\sqrt{2}$ cm e $a = 12\sqrt{3}$ cm.

Resolução

A área de um triângulo equilátero de lado a é dada por $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Desse modo, o volume do tetraedro é dado por:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h}{3} = \frac{\frac{(12\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}{3} \cdot 12\sqrt{2} = \frac{\frac{432\sqrt{3}}{4}}{3} \cdot 12\sqrt{2} = 432\sqrt{6}$$

Portanto, o volume desse tetraedro é $432\sqrt{6}$ cm³.

R13. (Unicamp-SP, 2020) A figura abaixo exibe a planificação de um poliedro convexo, com faces triangulares congruentes e faces retangulares, em que são indicados os comprimentos a, b e c.

Observação
Pode-se demonstrar que o volume de um tetraedro regular de aresta a é dado por $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

a) Determine o número de vértices e de arestas desse poliedro.

b) Para $a = 13$ cm, $b = 16$ cm e $c = 10$ cm, calcule o volume desse poliedro.

Resolução

a) Como as faces triangulares são congruentes, o poliedro é formado por uma pirâmide regular de base quadrada apoiada num paralelepípedo reto retângulo, em que duas de suas faces são quadradas.

Nesse caso, o número de vértices v desse poliedro é dado por:
$v = v_p + v_{pr} - 4 = 5 + 8 - 4 = 9$
em que:
v_p: o número de vértices da pirâmide.
v_{pr}: o número de vértices do paralelepípedo.

Já o número de arestas n desse poliedro é dado por:
$n = n_p + n_{pr} - 4 = 8 + 12 - 4 = 16$
em que:
n_p: o número de arestas da pirâmide.
n_{pr}: o número de arestas do paralelepípedo.

Portanto, esse poliedro tem 9 vértices e 16 arestas.

b) Indicando por h a altura da pirâmide, temos:

Observação
Note que $h = 12$, pois $h > 0$.

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow 15^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 12$$

O volume V desse poliedro é igual ao volume da pirâmide V_p mais o volume do paralelepípedo reto retângulo V_{pr}. Assim:

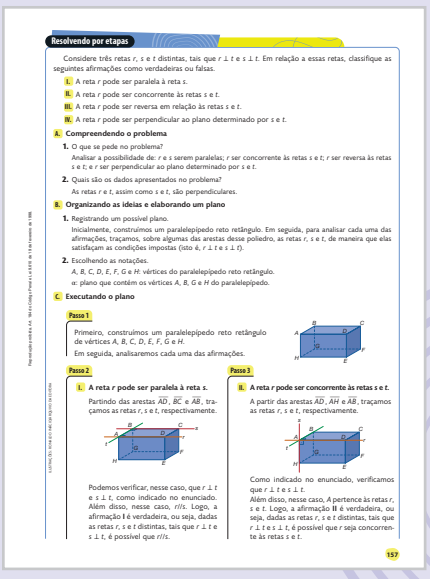
$$V = V_p + V_{pr} = \frac{c^2 \cdot h}{3} + c^2 \cdot b = \frac{10^2 \cdot 12}{3} + 10^2 \cdot 16 = 2\,000$$

Portanto, o volume desse poliedro é igual a 2 000 cm³.

206

Exercícios e problemas resolvidos

Esses exercícios e problemas auxiliam a exercitar habilidades, competências e estratégias para resolver as outras tarefas propostas, favorecendo o desenvolvimento de sua autonomia.


Resolvendo por etapas

Considere três retas r, s e t distintas, tais que $r \perp t$ e $s \perp t$. Em relação a essas retas, classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas.

I. A reta r pode ser paralela à reta s.
II. A reta r pode ser concorrente às retas s e t.
III. A reta r pode ser reversa em relação às retas s e t.
IV. A reta r pode ser perpendicular ao plano determinado por s e t.

A. Compreendendo o problema

1. O que se pede no problema?
Analisar a possibilidade de: r e s serem paralelas; r ser concorrente às retas s e t; r ser reversa às retas s e t; e r ser perpendicular ao plano determinado por s e t.

2. Quais são os dados apresentados no problema?
As retas r e t, assim como s e t, são perpendiculares.

B. Organizando as ideias e elaborando um plano

1. Registrando um possível plano.
Inicialmente, construímos um paralelepípedo reto retângulo. Em seguida, para analisar cada uma das afirmações, traçamos, sobre algumas das arestas desse poliedro, as retas r, s e t, de maneira que elas satisfaçam as condições impostas (isto é, $r \perp t$ e $s \perp t$).

2. Escolhendo as notações.
A, B, C, D, E, F, G e H: vértices do paralelepípedo reto retângulo.
α: plano que contém os vértices A, B, G e H do paralelepípedo.

C. Executando o plano

Passo 1

Primeiro, construímos um paralelepípedo reto retângulo de vértices A, B, C, D, E, F, G e H.

Em seguida, analisaremos cada uma das afirmações.

Passo 2

I. **A reta r pode ser paralela à reta s.**

Partindo das arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$, traçamos as retas r, s e t, respectivamente.

Podemos verificar, nesse caso, que $r \perp t$ e $s \perp t$, como indicado no enunciado. Além disso, nesse caso, $r // s$. Logo, a afirmação **I** é verdadeira, ou seja, dadas as retas r, s e t distintas, tais que $r \perp t$ e $s \perp t$, é possível que $r // s$.

Passo 3

II. **A reta r pode ser concorrente às retas s e t.**

A partir das arestas $\overline{AD}$, $\overline{AH}$ e $\overline{AB}$, traçamos as retas r, s e t, respectivamente.

Como indicado no enunciado, verificamos que $r \perp t$ e $s \perp t$.

Além disso, nesse caso, A pertence às retas r, s e t. Logo, a afirmação **II** é verdadeira, ou seja, dadas as retas r, s e t distintas, tais que $r \perp t$ e $s \perp t$, é possível que r seja concorrente às retas s e t.

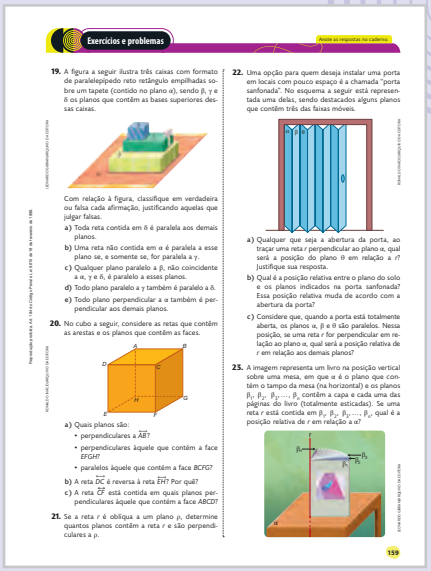
157

Resolvendo por etapas

Esta seção apresenta maneiras de organizar o pensamento com o intuito de solucionar um problema. Espera-se que, com base nela, você seja capaz de desenvolver estratégias para resolver diversos problemas, matemáticos ou não.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.


Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno

19. A figura a seguir ilustra três caixas com formato de paralelepípedo reto retângulo empilhadas sobre um tapete (contido no plano α), sendo β, γ e δ os planos que contêm as bases superiores dessas caixas.

Com relação à figura, classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação, justificando aquelas que julgar falsas.

a) Toda reta contida em δ é paralela aos demais planos.

b) Uma reta não contida em α é paralela a esse plano se, e somente se, for paralela a γ.

c) Qualquer plano paralelo a β, não coincidente a α, γ e δ, é paralelo a esses planos.

d) Todo plano paralelo a γ também é paralelo a δ.

e) Todo plano perpendicular a α também é perpendicular aos demais planos.

20. No cubo a seguir, considere as retas que contêm as arestas e os planos que contêm as faces.

a) Quais planos são:

- perpendiculares a $\overline{AB}$?
- perpendiculares àquele que contém a face $EFGH$?
- paralelos àquele que contém a face $BCFG$?

b) A reta $\overleftrightarrow{DC}$ é reversa à reta $\overleftrightarrow{EH}$? Por quê?

c) A reta $\overleftrightarrow{CF}$ está contida em quais planos perpendiculares àquele que contém a face $ABCD$?

21. Se a reta r é oblíqua a um plano p, determine quantos planos contêm a reta r e são perpendiculares a p.

22. Uma opção para quem deseja instalar uma porta em locais com pouco espaço é a chamada "porta sanfonada". No esquema a seguir está representada uma delas, sendo destacados alguns planos que contêm três das faixas móveis.

a) Qualquer que seja a abertura da porta, ao traçar uma reta r perpendicular ao plano α, qual será a posição do plano θ em relação a r? Justifique sua resposta.

b) Qual é a posição relativa entre o plano do solo e os planos indicados na porta sanfonada? Essa posição relativa muda de acordo com a abertura da porta?

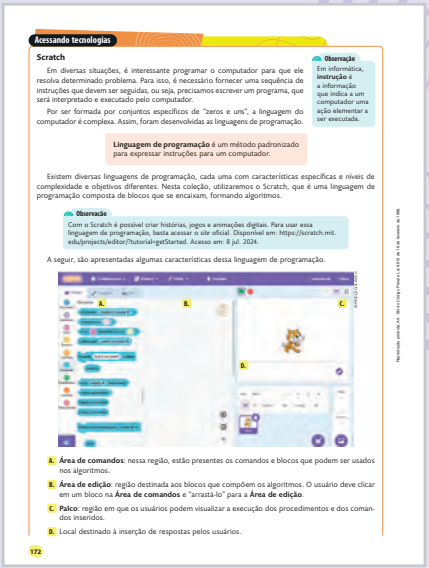
c) Considere que, quando a porta está totalmente aberta, os planos α, β e θ são paralelos. Nessa posição, se uma reta r for perpendicular em relação ao plano α, qual será a posição relativa de r em relação aos demais planos?

23. A imagem representa um livro na posição vertical sobre uma mesa, em que α é o plano que contém o tampo da mesa (na horizontal) e os planos $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ contêm a capa e cada uma das páginas do livro (totalmente esticadas). Se uma reta r está contida em β_2, β_3, β_4, ..., β_n, qual é a posição relativa de r em relação a α?

159

Exercícios e problemas

Esta seção apresenta exercícios e problemas diversificados para você desenvolver as ideias e os conceitos estudados. Vários deles são relacionados a outras áreas do conhecimento e a outros componentes curriculares, além de haver questões de provas de vestibulares e do Enem.


Acessando tecnologias

Scratch

Em diversas situações, é interessante programar o computador para que ele resolva determinado problema. Para isso, é necessário fornecer uma sequência de instruções que devem ser seguidas, ou seja, precisamos escrever um programa, que será interpretado e executado pelo computador.

Por ser formada por conjuntos específicos de "zeros e uns", a linguagem do computador é complexa. Assim, foram desenvolvidas as linguagens de programação.

Linguagem de programação é um método padronizado para expressar instruções para um computador.

Observação

Em informática, **instrução** é a informação que indica a um computador uma ação elementar a ser executada.

Existem diversas linguagens de programação, cada uma com características específicas e níveis de complexidade e objetivos diferentes. Nesta coleção, utilizaremos o Scratch, que é uma linguagem de programação composta de blocos que se encaixam, formando algoritmos.

Observação

Com o Scratch é possível criar histórias, jogos e animações digitais. Para usar essa linguagem de programação, basta acessar o *site* oficial. Disponível em: https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted. Acesso em: 8 jul. 2024.

A seguir, são apresentadas algumas características dessa linguagem de programação.

A. **Área de comandos**: nessa região, estão presentes os comandos e blocos que podem ser usados nos algoritmos.

B. **Área de edição**: região destinada aos blocos que compõem os algoritmos. O usuário deve clicar em um bloco na **Área de comandos** e "arrastá-lo" para a **Área de edição**.

C. **Palco**: região em que os usuários podem visualizar a execução dos procedimentos e dos comandos inseridos.

D. Local destinado à inserção de respostas pelos usuários.

172

Acessando tecnologias

Nesta seção, você vai encontrar exemplos e tarefas que complementam o que foi estudado nos capítulos, utilizando *softwares* de Geometria dinâmica, planilha eletrônica e linguagem de programação.

Ação e participação

Nesta seção, você e seus colegas se envolverão em um projeto interdisciplinar, visando resolver problemas ou refletir sobre questões sociais. As atividades propostas desenvolverão habilidades essenciais, como pensamento crítico, autonomia, criatividade, argumentação, cooperação e cidadania.


Ação e participação

Esta seção propõe um trabalho articulado com outros componentes curriculares envolvendo objetivos comuns, além da proposta de trabalho em grupo cujo objetivo principal é favorecer o desenvolvimento de habilidades e a compreensão relacionada a alguns assuntos específicos. Por ser um trabalho em grupo, vocês podem pensar em vários questionamentos durante a execução do projeto, organizar as ideias e fazer anotações no caderno. Nesse momento de surgimento de ideias e de planejamentos, é necessária a participação de todos, além de um registro escrito coletivo com as anotações que consideraram mais relevantes.

Um projeto constitui-se em uma proposta de trabalho temporária e única, ou seja, não repetitiva, caracterizada por ter início, meio e fim bem definidos e com objetivo claro e viável.

Qual tema podemos abordar?

Quais componentes curriculares estão envolvidos nesse tema?

Qual de nós vai fazer as anotações por escrito?

Quais são os nossos objetivos?

Quanto tempo vai levar?

O que podemos fazer?

O **tema** para ser trabalhado em um projeto pode surgir de diversas ideias, como a constatação de uma necessidade da comunidade escolar e da comunidade do bairro onde a escola está localizada ou até mesmo um tema de interesse da turma. Dependendo do tema escolhido, vocês precisam estudar mais sobre o assunto antes de seguir com as outras etapas.

Com um tema definido, é o momento de estabelecer os **objetivos** com metas claras que possam ser verificadas ao longo da execução do projeto.

A próxima etapa é o **planejamento**, no qual se define quem vai participar e qual será a responsabilidade de cada um. Todas essas informações devem estar anotadas e ter prazos definidos.

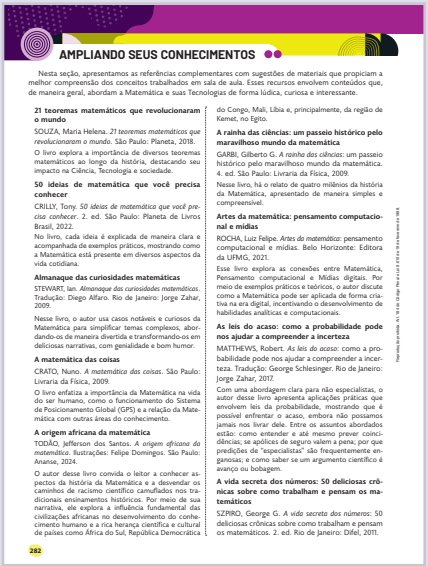
Com base no planejamento, é elaborado um cronograma de acompanhamento, e, em determinadas datas, será necessário verificar se os objetivos estão sendo atingidos até ali e se é preciso alterar algo, fazendo uma correção de rota ou novos alinhamentos.

OBJETIVOS DO PROJETO

272

Ampliando seus conhecimentos

Esta seção contém referências complementares de livros, filmes, *sites* e *podcasts* para você conhecer mais do que foi estudado nos capítulos e para ampliar seus conhecimentos.


AMPLIANDO SEUS CONHECIMENTOS

Nesta seção, apresentamos as referências complementares com sugestões de materiais que propiciam a melhor compreensão dos conceitos trabalhados em sala de aula. Esses recursos envolvem conteúdos que, de maneira geral, abordam a Matemática e suas Tecnologias de forma lúdica, curiosa e interessante.

21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo

SOUZA, Maria Helena. *21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo*. São Paulo: Planeta, 2018.

O livro explora a importância de diversos teoremas matemáticos ao longo da história, destacando seu impacto na Ciência, Tecnologia e sociedade.

50 ideias de matemática que você precisa conhecer

CRILLY, Tony. *50 ideias de matemática que você precisa conhecer*. 2. ed. São Paulo: Planeta de Livros Brasil, 2022.

No livro, cada ideia é explicada de maneira clara e acompanhada de exemplos práticos, mostrando como a Matemática está presente em diversos aspectos da vida cotidiana.

Almanaque das curiosidades matemáticas

STEWART, Ian. *Almanaque das curiosidades matemáticas*. Tradução: Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

Nesse livro, o autor usa casos notáveis e curiosos da Matemática para simplificar temas complexos, abordando-os de maneira divertida e transformando-os em deliciosas narrativas, com genialidade e bom humor.

A matemática das coisas

CRATO, Nuno. *A matemática das coisas*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O livro enfatiza a importância da Matemática na vida do ser humano, como o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento.

A origem africana da matemática

TODJÃO, Jefferson dos Santos. *A origem africana da matemática*. Ilustrações: Felipe Domingos. São Paulo: Anansi, 2024.

O autor desse livro convida o leitor a conhecer aspectos da história da Matemática e a desvendar os caminhos de racismo científico camuflados nos tradicionais ensinamentos históricos. Por meio de sua narrativa, ele explora a influência fundamental das civilizações africanas no desenvolvimento do conhecimento humano e a rica herança científica e cultural de países como África do Sul, República Democrática do Congo, Mali, Líbia e, principalmente, da região de Kemet, no Egito.

A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática

GARBI, Gilberto G. *A rainha das ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

Nesse livro, há o relato de quatro milênios da história da Matemática, apresentado de maneira simples e compreensível.

Artes da matemática: pensamento computacional e mídias

ROCHA, Luiz Felipe. *Artes da matemática*: pensamento computacional e mídias. Belo Horizonte: Editora da UFMG, 2021.

Esse livro explora as conexões entre Matemática, Pensamento computacional e Mídias digitais. Por meio de exemplos práticos e teóricos, o autor discute como a Matemática pode ser aplicada de forma criativa na era digital, incentivando o desenvolvimento de habilidades analíticas e computacionais.

As leis do acaso: como a probabilidade pode nos ajudar a compreender a incerteza

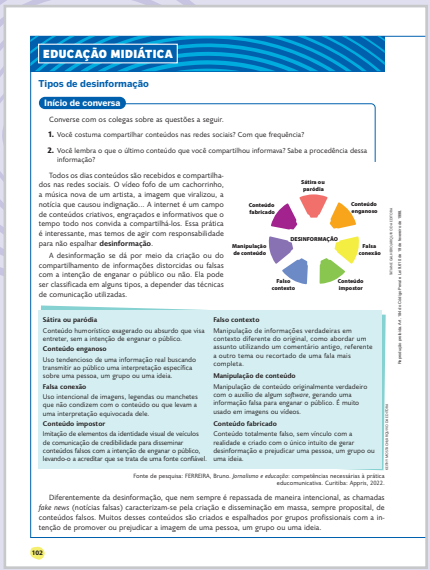
MATTHEWS, Robert. *As leis do acaso*: como a probabilidade pode nos ajudar a compreender a incerteza. Tradução: George Schlesinger. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2017.

Com uma abordagem clara para não especialistas, o autor desse livro apresenta aplicações práticas que envolvem leis da probabilidade, mostrando que é possível enfrentar o acaso, embora não possamos jamais nos livrar dele. Entre os assuntos abordados estão: como entender e até mesmo prever coincidências; se apólices de seguro valem a pena; por que predições de "especialistas" são frequentemente enganosas; e como saber se um argumento científico é avanço ou bobagem.

A vida secreta dos números: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos

SZPIRO, George G. *A vida secreta dos números*: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos. 2. ed. Rio de Janeiro: Difel, 2011.

282



EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

Tipos de desinformação

Início de conversa

Converse com os colegas sobre as questões a seguir.

1. Você costuma compartilhar conteúdos nas redes sociais? Com que frequência?
2. Você lembra o que o último conteúdo que você compartilhou informava? Sabe a procedência dessa informação?

Todos os dias conteúdos são recebidos e compartilhados nas redes sociais. O vídeo fofo de um cachorrinho, a música nova de um artista, a imagem que viralizou, a notícia que causou indignação... A internet é um campo de conteúdos criativos, engraçados e informativos que o tempo todo nos convida a compartilhá-los. Essa prática é interessante, mas temos de agir com responsabilidade para não espalhar **desinformação**.

A desinformação se dá por meio da criação ou do compartilhamento de informações distorcidas ou falsas com a intenção de enganar o público ou não. Ela pode ser classificada em alguns tipos, a depender das técnicas de comunicação utilizadas.

Sátira ou paródia
Conteúdo humorístico exagerado ou absurdo que visa entreter, sem a intenção de enganar o público.

Conteúdo enganoso
Uso tendencioso de uma informação real buscando transmitir ao público uma interpretação específica sobre uma pessoa, um grupo ou uma ideia.

Falsa conexão
Uso intencional de imagens, legendas ou manchetes que não condizem com o conteúdo ou que levam a uma interpretação equivocada dele.

Conteúdo impostor
Imitação de elementos da identidade visual de veículos de comunicação de credibilidade para disseminar conteúdos falsos com a intenção de enganar o público, levando-o a acreditar que se trata de uma fonte confiável.

Falso contexto
Manipulação de informações verdadeiras em contexto diferente do original, como abordar um assunto utilizando um comentário antigo, referente a outro tema ou recortado de uma fala mais completa.

Manipulação de conteúdo
Manipulação de conteúdo originalmente verdadeiro com o auxílio de algum *software*, gerando uma informação falsa para enganar o público. É muito usado em imagens ou vídeos.

Conteúdo fabricado
Conteúdo totalmente falso, sem vínculo com a realidade e criado com o único intuito de gerar desinformação e prejudicar uma pessoa, um grupo ou uma ideia.

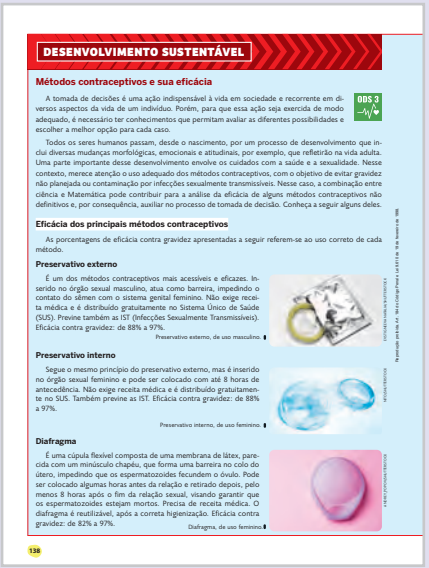
Fonte de pesquisa: FERREIRA, Bruno. *Jornalismo e educação*: competências necessárias à prática educomunicativa. Curitiba: Appris, 2022.

Diferentemente da desinformação, que nem sempre é repassada de maneira intencional, as chamadas *fake news* (notícias falsas) caracterizam-se pela criação e disseminação em massa, sempre proposital, de conteúdos falsos. Muitos desses conteúdos são criados e espalhados por grupos profissionais com a intenção de promover ou prejudicar a imagem de uma pessoa, um grupo ou uma ideia.

102

Educação midiática

Nesta seção, você vai refletir sobre os conceitos de mídia e informação, promovendo o uso responsável, democrático, ético e crítico dos meios digitais, seja ao interpretar, compartilhar ou produzir conteúdo.



DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Métodos contraceptivos e sua eficácia

ODS 3

A tomada de decisões é uma ação indispensável à vida em sociedade e recorrente em diversos aspectos da vida de um indivíduo. Porém, para que essa ação seja exercida de modo adequado, é necessário ter conhecimentos que permitam avaliar as diferentes possibilidades e escolher a melhor opção para cada caso.

Todos os seres humanos passam, desde o nascimento, por um processo de desenvolvimento que inclui diversas mudanças morfológicas, emocionais e atitudinais, por exemplo, que refletirão na vida adulta. Uma parte importante desse desenvolvimento envolve os cuidados com a saúde e a sexualidade. Nesse contexto, merece atenção o uso adequado dos métodos contraceptivos, com o objetivo de evitar gravidez não planejada ou contaminação por infecções sexualmente transmissíveis. Nesse caso, a combinação entre ciência e Matemática pode contribuir para a análise da eficácia de alguns métodos contraceptivos não definitivos e, por consequência, auxiliar no processo de tomada de decisão. Conheça a seguir alguns deles.

Eficácia dos principais métodos contraceptivos

As porcentagens de eficácia contra gravidez apresentadas a seguir referem-se ao uso correto de cada método.

Preservativo externo

É um dos métodos contraceptivos mais acessíveis e eficazes. Inserido no órgão sexual masculino, atua como barreira, impedindo o contato do sêmen com o sistema genital feminino. Não exige receita médica e é distribuído gratuitamente no Sistema Único de Saúde (SUS). Previne também as IST (Infecções Sexualmente Transmissíveis). Eficácia contra gravidez: de 88% a 97%.

Preservativo externo, de uso masculino.

Preservativo interno

Segue o mesmo princípio do preservativo externo, mas é inserido no órgão sexual feminino e pode ser colocado com até 8 horas de antecedência. Não exige receita médica e é distribuído gratuitamente no SUS. Também previne as IST. Eficácia contra gravidez: de 88% a 97%.

Preservativo interno, de uso feminino.

Diafragma

É uma cúpula flexível composta de uma membrana de látex, parecida com um minúsculo chapéu, que forma uma barreira no colo do útero, impedindo que os espermatozoides fecundem o óvulo. Pode ser colocado algumas horas antes da relação e retirado depois, pelo menos 8 horas após o fim da relação sexual, visando garantir que os espermatozoides estejam mortos. Precisa de receita médica. O diafragma é reutilizável, após a correta higienização. Eficácia contra gravidez: de 82% a 97%.

Diafragma, de uso feminino.

138

Desenvolvimento sustentável

Nesta seção, você vai trabalhar com os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS), entendendo como eles se alinham com a Agenda 2030. A principal proposta dela é ajudar você a reconhecer a importância desses objetivos como parte de uma ação global, mostrando seus desdobramentos práticos em diversos contextos.



TRABALHO E JUVENTUDES

O que faz um arquiteto?

Entre os profissionais que aplicam conhecimentos relacionados à Geometria espacial de posição para realizar seus trabalhos estão os arquitetos. Assim como os engenheiros, os arquitetos também utilizam a expressão gráfica para criar desenhos técnicos, formados por projeções ortogonais e modelos tridimensionais de projetos. Um exemplo é a planta baixa, que é um desenho técnico em escala que representa a vista superior de uma construção, considerando um corte horizontal e a retirada da parte de cima dela.

Além de planejar e criar ambientes internos e externos, considerando critérios como estética, funcionalidade, medidas, sustentabilidade, eficiência energética, entre outros, os arquitetos trabalham com reformas, revitalizações e renovações de estruturas já existentes, contribuindo tanto para a preservação histórica do espaço quanto para modernizações, inclusive na escolha dos materiais de acabamento e dos elementos decorativos.

Arquiteta trabalhando no desenho técnico de um projeto.

Observação
Para se tornar um arquiteto, é necessário cursar uma graduação em Arquitetura em uma instituição de Ensino Superior que seja reconhecida pelo Ministério da Educação (MEC) e se registrar no Conselho de Arquitetura e Urbanismo do Brasil (CAU/BR).

O crescimento populacional nas cidades e as demandas por estruturas e ambientes funcionais e sustentáveis faz da arquitetura uma importante profissão.

Atividades

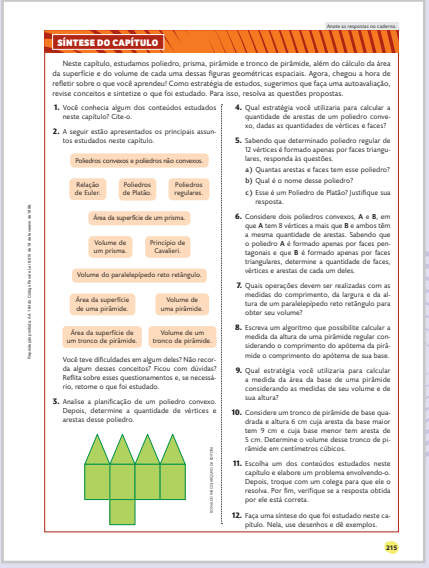
Anote as respostas no caderno.

1. De acordo com as informações apresentadas no texto, explique os tipos de projeto que um profissional da arquitetura pode desenvolver. Você se identifica com alguma dessas tarefas? Converse com os colegas sobre isso.
2. Faça uma pesquisa na internet sobre a influência africana da sociedade Kassena, localizada na região norte de Gana, na arquitetura, sobretudo a importância dela para a sociedade atual. Anote as informações que você considerar relevantes e compartilhe com os colegas e o professor na próxima aula.

163

Trabalho e juventudes

Nesta seção, você vai explorar temas relacionados ao mundo do trabalho, aprofundando sua compreensão e valorização das diversas profissões, além de mapear as possibilidades de inserção profissional e refletir sobre o impacto de cada profissão na sociedade.



SÍNTESE DO CAPÍTULO

Anote as respostas no caderno.

Neste capítulo, estudamos poliedro, prisma, pirâmide e tronco de pirâmide, além do cálculo da área da superfície e do volume de cada uma dessas figuras geométricas espaciais. Agora, chegou a hora de refletir sobre o que você aprendeu! Como estratégia de estudos, sugerimos que faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-o.
2. A seguir estão apresentados os principais assuntos estudados neste capítulo.

Poliedros convexos e poliedros não convexos.
Relação de Euler.
Poliedros de Platão.
Poliedros regulares.
Área da superfície de um prisma.
Volume de um prisma.
Princípio de Cavalieri.
Volume do paralelepípedo reto retângulo.
Área da superfície de uma pirâmide.
Volume de uma pirâmide.
Área da superfície de um tronco de pirâmide.
Volume de um tronco de pirâmide.

Você teve dificuldades em algum deles? Não recorda algum desses conceitos? Ficou com dúvidas? Reflita sobre esses questionamentos e, se necessário, retorne o que foi estudado.

3. Analise a planificação de um poliedro convexo. Depois, determine a quantidade de vértices e arestas desse poliedro.

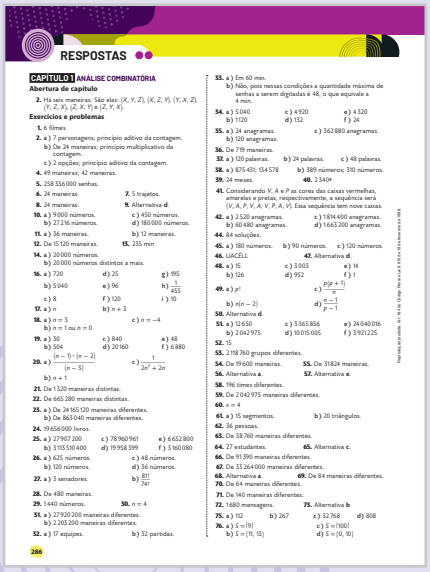
4. Qual estratégia você utilizaria para calcular a quantidade de arestas de um poliedro convexo, dadas as quantidades de vértices e faces?
5. Sabendo que determinado poliedro regular de 12 vértices é formado apenas por faces triangulares, responda às questões.
   a) Quantas arestas e faces tem esse poliedro?
   b) Qual é o nome desse poliedro?
   c) Esse é um Poliedro de Platão? Justifique sua resposta.
6. Considere dois poliedros convexos, **A** e **B**, em que **A** tem 8 vértices a mais que **B** e ambos têm a mesma quantidade de arestas. Sabendo que o poliedro **A** é formado apenas por faces pentagonais e que **B** é formado apenas por faces triangulares, determine a quantidade de faces, vértices e arestas de cada um deles.
7. Quais operações devem ser realizadas com as medidas do comprimento, da largura e da altura de um paralelepípedo reto retângulo para obter seu volume?
8. Escreva um algoritmo que possibilite calcular a medida da altura de uma pirâmide regular considerando o comprimento do apótema da pirâmide o comprimento do apótema de sua base.
9. Qual estratégia você utilizaria para calcular a medida da área da base de uma pirâmide considerando as medidas de seu volume e de sua altura?
10. Considere um tronco de pirâmide de base quadrada e altura 6 cm cuja aresta da base maior tem 9 cm e cuja base menor tem aresta de 5 cm. Determine o volume desse tronco de pirâmide em centímetros cúbicos.
11. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo-o. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.
12. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo. Nela, use desenhos e dê exemplos.

215

Síntese do capítulo

Nesta seção, você pode verificar seus conhecimentos sobre os principais conteúdos estudados no capítulo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



RESPOSTAS

CAPÍTULO 1 ANÁLISE COMBINATÓRIA

Abertura de capítulo

2. Há seis maneiras: São elas: (X, Y, Z), (X, Z, Y), (Y, X, Z), (Y, Z, X), (Z, X, Y) e (Z, Y, X).

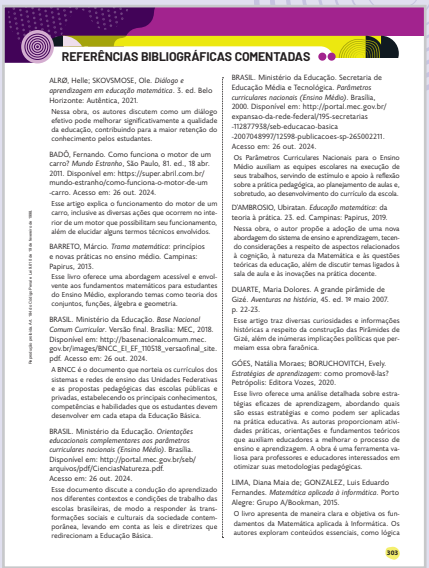
Exercícios e problemas

1. 6 filmes.
2. a) 7 personagens; princípio aditivo da contagem.
b) De 24 maneiras; princípio multiplicativo da contagem.
c) 2 opções; princípio aditivo da contagem.
4. 49 maneiras; 42 maneiras.
5. 258 336 000 senhas.
6. 24 maneiras.
7. 5 trajetos.
8. 24 maneiras.
9. Alternativa **d**.
10. a) 9 000 números.
b) 27 216 números.
c) 450 números.
d) 180 000 números.
11. a) 36 maneiras.
b) 12 maneiras.
12. De 15 120 maneiras.
15. 235 min
14. a) 20 000 números.
b) 20 000 números distintos a mais.
16. a) 720
b) 5 040
c) 8
d) 25
e) 96
f) 120
g) 195
h) $\frac{1}{455}$
i) 10
17. a) n
b) $n + 3$
18. a) $n = 3$
b) $n = 1$ ou $n = 0$
c) $n = -4$
19. a) 30
b) 504
c) 840
d) 20 160
e) 48
f) 6 880
20. a) $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{(n-3)}$
b) $n + 1$
c) $\frac{1}{2n^2 + 2n}$
21. De 1 520 maneiras distintas.
22. De 665 280 maneiras distintas.
25. a) De 24 165 120 maneiras diferentes.
b) De 862 040 maneiras diferentes.
24. 19 656 000 livros.
25. a) 27 907 200
b) 3 155 130 400
c) 78 960 961
d) 19 958 399
e) 6 652 800
f) 3 160 080
26. a) 625 números.
b) 120 números.
c) 48 números.
d) 36 números.
27. a) 3 senadores.
b) $\frac{831}{741}$
28. De 480 maneiras.
29. 1 440 números.
30. $n = 4$
31. a) 27 920 200 maneiras diferentes.
b) 2 203 200 maneiras diferentes.
32. a) 17 equipes.
b) 32 partidas.
33. a) Em 60 min.
b) Não, pois nessas condições a quantidade máxima de senhas a serem digitadas é 48, o que equivale a 4 min.
34. a) 5 040
b) 1 120
c) 4 920
d) 132
e) 4 320
f) 24
35. a) 24 anagramas.
b) 120 anagramas.
c) 362 880 anagramas.
36. De 719 maneiras.
37. a) 120 palavras.
b) 24 palavras.
c) 48 palavras.
38. a) 875 451; 154 578
b) 389 números; 390 números.
40. 2 340#
41. Considerando V, A e P as cores das caixas vermelhas, amarelas e pretas, respectivamente, a sequência será $(V, A, P, V, A, V, P, A, V)$. Essa sequência tem nove caixas.
42. a) 2 520 anagramas.
b) 60 480 anagramas.
c) 1 814 400 anagramas.
d) 1 663 200 anagramas.
44. 84 soluções.
45. a) 180 números.
b) 90 números.
c) 120 números.
46. UACELL
47. Alternativa **d**.
48. a) 15
b) 126
c) 3 003
d) 952
e) 14
f) 1
49. a) $p!$
b) $n(n-2)$
c) $\frac{p(p+1)}{2}$
d) $\frac{n-1}{p-1}$
50. Alternativa **d**.
51. a) 12 650
b) 2 042 975
c) 3 365 856
d) 10 015 005
e) 24 040 016
f) 3 921 225
52. 15
53. 2 118 760 grupos diferentes.
54. De 19 600 maneiras.
55. De 31 824 maneiras.
56. Alternativa **a**.
57. Alternativa **e**.
58. 196 times diferentes.
59. De 2 042 975 maneiras diferentes.
60. $x = 4$
61. a) 15 segmentos.
b) 20 triângulos.
62. 36 pessoas.
63. De 38 760 maneiras diferentes.
64. 27 estudantes.
65. Alternativa **c**.
66. De 91 390 maneiras diferentes.
67. De 33 264 000 maneiras diferentes.
68. Alternativa **a**.
69. De 84 maneiras diferentes.
70. De 64 maneiras diferentes.
71. De 140 maneiras diferentes.
72. 1 680 mensagens.
75. Alternativa **b**.
75. a) 112
b) 267
c) 32 768
d) 808
76. a) $S = \{9\}$
b) $S = \{11, 15\}$
c) $S = \{100\}$
d) $S = \{0, 10\}$

286

Respostas

Nesta seção, estão as respostas de cálculo de tarefas, atividades e questões deste volume.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. *Diálogo e aprendizagem em educação matemática*. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2021.
Nessa obra, os autores discutem como um diálogo efetivo pode melhorar significativamente a qualidade da educação, contribuindo para a maior retenção do conhecimento pelos estudantes.

BADÔ, Fernando. Como funciona o motor de um carro? *Mundo Estranho*, São Paulo, 81. ed., 18 abr. 2011. Disponível em: https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-funciona-o-motor-de-um-carro. Acesso em: 26 out. 2024.
Esse artigo explica o funcionamento do motor de um carro, inclusive as diversas ações que ocorrem no interior de um motor que possibilitam seu funcionamento, além de elucidar alguns termos técnicos envolvidos.

BARRETO, Márcio. *Trama matemática*: princípios e novas práticas no ensino médio. Campinas: Papirus, 2015.
Esse livro oferece uma abordagem acessível e envolvente aos fundamentos matemáticos para estudantes do Ensino Médio, explorando temas como teoria dos conjuntos, funções, álgebra e geometria.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 26 out. 2024.
A BNCC é o documento que norteia os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo os principais conhecimentos, competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. *Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)*. Brasília. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 26 out. 2024.
Esse documento discute a condução do aprendizado nos diferentes contextos e condições de trabalho das escolas brasileiras, de modo a responder às transformações sociais e culturais da sociedade contemporânea, levando em conta as leis e diretrizes que redirecionam a Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211. Acesso em: 26 out. 2024.
Os *Parâmetros Curriculares Nacionais* para o Ensino Médio auxiliam as equipes escolares na execução de seus trabalhos, servindo de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática pedagógica, ao planejamento de aulas e, sobretudo, ao desenvolvimento do currículo da escola.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2019.
Nessa obra, o autor propõe a adoção de uma nova abordagem do sistema de ensino e aprendizagem, tecendo considerações a respeito de aspectos relacionados à cognição, à natureza da Matemática e às questões teóricas da educação, além de discutir temas ligados à sala de aula e às inovações na prática docente.

DUARTE, Maria Dolores. A grande pirâmide de Gizé. *Aventuras na história*, 45. ed. 19 maio 2007. p. 22-25.
Esse artigo traz diversas curiosidades e informações históricas a respeito da construção das Pirâmides de Gizé, além de inúmeras implicações políticas que permeiam essa obra faraônica.

GÓES, Natália Moraes; BORUCHOVITCH, Evely. *Estratégias de aprendizagem*: como promovê-las? Petrópolis: Editora Vozes, 2020.
Esse livro oferece uma análise detalhada sobre estratégias eficazes de aprendizagem, abordando quais são essas estratégias e como podem ser aplicadas na prática educativa. As autoras proporcionam atividades práticas, orientações e fundamentos teóricos que auxiliam educadores a melhorar o processo de ensino e aprendizagem. A obra é uma ferramenta valiosa para professores e educadores interessados em otimizar suas metodologias pedagógicas.

LIMA, Diana Maia de; GONZALEZ, Luis Eduardo Fernandes. *Matemática aplicada à informática*. Porto Alegre: Grupo A/Bookman, 2015.
O livro apresenta de maneira clara e objetiva os fundamentos da Matemática aplicada à Informática. Os autores exploram conteúdos essenciais, como lógica

303

Referências bibliográficas comentadas

Esta seção lista as principais referências teóricas utilizadas como base para a elaboração deste livro.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Dica

Boxe com informações que auxiliam você na resolução de exercícios e problemas.

Observação

Boxe com informações complementares.

Vocabulário

Os significados de algumas palavras que você provavelmente não conheça serão apresentados na página, a fim de auxiliá-lo na compreensão de informações. Essas palavras estão destacadas no texto.

Para fixar

Boxe com informações complementares sobre o conteúdo matemático trabalhado.

Para expandir

Boxe com sugestões de livros, textos ou vídeos com informações complementares ao contexto relacionado.

Ser consciente

Nas tarefas com esse ícone, você refletirá a respeito de diferentes assuntos, como ética, educação financeira, saúde e cidadania, possibilitando uma avaliação cidadã e social da temática abordada.

Desafio

As tarefas com esse ícone têm caráter desafiador, possibilitando o desenvolvimento de estratégias próprias de resolução.

OBJETO DIGITAL

Esse ícone indica que você pode acessar um objeto digital relacionado à atividade ou ao conteúdo.

Lista de siglas

Elenca os significados das siglas de vestibulares e exames de larga escala usadas no volume.

OBJETIVOS DE DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Você sabia que em 2015 foi assinado, na sede da Organização das Nações Unidas (ONU), em Nova York, nos Estados Unidos, um documento em que 193 países, incluindo o Brasil, se comprometeram a tomar medidas importantes para acabar com a pobreza, proteger o meio ambiente e garantir que as pessoas possam desfrutar de paz e de prosperidade? Trata-se da **Agenda 2030**. Nela, são apresentados **17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável**, os ODS, que determinam metas transformadoras para promover o desenvolvimento sustentável até 2030. Vamos conhecê-los?



Para que a Agenda 2030 seja cumprida no Brasil e no mundo, é necessário promover engajamento e parcerias entre governos, setor privado e sociedade civil. Além disso, o acompanhamento e a avaliação da implementação devem ocorrer em níveis global, nacional e regional.

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A seguir, apresentamos cada objetivo da Agenda 2030. No decorrer deste livro, você vai encontrar indicações de ODS sempre que houver propostas, temas ou conceitos relacionados a eles.

ODS 1	ERRADICAÇÃO DA POBREZA	Acabar com a pobreza em todas as formas e em todos os lugares.
ODS 2	FOME ZERO E AGRICULTURA SUSTENTÁVEL	Erradicar a fome, alcançar a segurança alimentar, melhorar a nutrição e promover a agricultura sustentável.
ODS 3	SAÚDE E BEM-ESTAR	Garantir o acesso à saúde de qualidade e promover o bem-estar para todos, em todas as idades.
ODS 4	EDUCAÇÃO DE QUALIDADE	Garantir o acesso à educação inclusiva, de qualidade e equitativa e promover oportunidades de aprendizagem ao longo da vida para todos.
ODS 5	IGUALDADE DE GÊNERO	Alcançar a igualdade de gênero e empoderar todas as mulheres e meninas.
ODS 6	ÁGUA POTÁVEL E SANEAMENTO	Garantir a disponibilidade e a gestão sustentável da água potável e do saneamento para todos.
ODS 7	ENERGIA LIMPA E ACESSÍVEL	Garantir o acesso a fontes de energia confiáveis, sustentáveis e modernas para todos.
ODS 8	TRABALHO DECENTE E CRESCIMENTO ECONÔMICO	Promover o crescimento econômico inclusivo e sustentável, com emprego pleno e produtivo e trabalho digno para todos.
ODS 9	INDÚSTRIA, INOVAÇÃO E INFRAESTRUTURA	Construir infraestruturas resilientes, promover a industrialização inclusiva e sustentável e fomentar a inovação.
ODS 10	REDUÇÃO DAS DESIGUALDADES	Reduzir as desigualdades no interior dos países e entre países.
ODS 11	CIDADES E COMUNIDADES SUSTENTÁVEIS	Tornar as cidades e comunidades mais inclusivas, seguras, resilientes e sustentáveis.
ODS 12	CONSUMO E PRODUÇÃO RESPONSÁVEIS	Garantir padrões de consumo e de produção sustentáveis.
ODS 13	AÇÃO CONTRA A MUDANÇA GLOBAL DO CLIMA	Adotar medidas urgentes para combater as alterações climáticas e os seus impactos.
ODS 14	VIDA NA ÁGUA	Conservar e usar de forma responsável os oceanos, os mares e os recursos marinhos para o desenvolvimento sustentável.
ODS 15	VIDA TERRESTRE	Proteger, restaurar e promover o uso sustentável dos ecossistemas terrestres, gerir de forma sustentável as florestas, combater a desertificação, reverter a degradação dos solos e preservar a biodiversidade.
ODS 16	PAZ, JUSTIÇA E INSTITUIÇÕES EFICAZES	Promover sociedades pacíficas e inclusivas para o desenvolvimento sustentável, proporcionar o acesso à justiça para todos e construir instituições eficazes, responsáveis e inclusivas em todos os níveis.
ODS 17	PARCERIAS E MEIOS DE IMPLEMENTAÇÃO	Reforçar os meios de implementação e revitalizar a parceria global para o desenvolvimento sustentável.

Fonte de pesquisa: ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. *Sobre o nosso trabalho para alcançar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável no Brasil.* Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs. Acesso em: 22 set. 2024.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 ANÁLISE COMBINATÓRIA 14

Métodos de contagem 16

Princípio aditivo da contagem 16

Princípio multiplicativo da contagem 17

Exercícios e problemas 18

Fatorial 20

Exercícios e problemas 20

Arranjo simples 21

Exercícios e problemas 23

Permutação simples 25

Exercícios e problemas 26

Permutação com repetição 27

Exercícios e problemas 28

Combinação simples 29

Resolvendo por etapas 30

Exercícios e problemas 33

TRABALHO E JUVENTUDES 36

O profissional de logística 36

Binômio de Newton 37

Triângulo de Pascal 37

Exercícios e problemas 40

Fórmula e termo geral do Binômio de Newton 41

Exercícios e problemas 44

SÍNTESE DO CAPÍTULO 45

CAPÍTULO 2 PROBABILIDADE 46

Introdução 48

Experimento aleatório, espaço amostral e evento 49

Exercícios e problemas 52

Calculando probabilidades 55

Exercícios e problemas 59

Probabilidade da união de dois eventos 62

Exercícios e problemas 63

Probabilidade condicional 65

Eventos dependentes e eventos independentes 66

TRABALHO E JUVENTUDES 68

O que faz o cientista de dados? 68

Exercícios e problemas 69

Experimentos binomiais 72

Exercícios e problemas 74

SÍNTESE DO CAPÍTULO 75

CAPÍTULO 3 ESTATÍSTICA 76

Introdução 78

Variáveis estatísticas 78

População e amostra estatística 79

Levantamentos amostrais 79

Exercícios e problemas 81

Gráficos e tabelas 82

Tabelas 82

Gráfico de barras 83

Gráfico de linhas 84

Gráfico de setores 84

Pirâmide etária 85

Pictograma 85

Acessando tecnologias 86

DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL 88

Conservando a Floresta Amazônica 88

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas 90
Inadequações em gráficos e tabelas 99
Exercícios e problemas 99
TRABALHO E JUVENTUDES 101
O que faz um biomédico? 101
EDUCAÇÃO MIDIÁTICA 102
Tipos de desinformação 102
Medidas de tendência central 104
Média aritmética 104
Média aritmética ponderada 105
Moda 105
Mediana 106
Exercícios e problemas 109
Medidas separatrizes 112
Quartis 112
Decis 113
Percentis 114
Exercícios e problemas 115
Medidas de dispersão 116
Amplitude 116
Desvio médio 117
Variância 117
Desvio padrão 118
Exercícios e problemas 119
Distribuição de frequência 122
Exercícios e problemas 123
Intervalo de classe 124
Exercícios e problemas 126
Medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos de classes 127
Exercícios e problemas 128
Outros gráficos e outras representações 129
Diagrama de ramo-e-folhas 129
Diagrama de pontos 130
Box-plot 131
Exercícios e problemas 132
Estatística e probabilidade 134
DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL 138
Métodos contraceptivos e sua eficácia 138
Exercícios e problemas 140
SÍNTESE DO CAPÍTULO 141

CAPÍTULO 4 GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO 142
Introdução 144
Conceitos iniciais 145
Exercícios e problemas 147
Posições relativas entre duas retas 148
Exercícios e problemas 150
Posições relativas entre reta e plano 151
Exercícios e problemas 152
Posições relativas entre dois planos 152
Exercícios e problemas 154
Propriedades de paralelismo e perpendicularismo 155
Resolvendo por etapas 157
Exercícios e problemas 159
Projeções ortogonais sobre um plano 160
Exercícios e problemas 161
TRABALHO E JUVENTUDES 163
O que faz um arquiteto? 163
Distâncias no espaço 164
Exercícios e problemas 165
SÍNTESE DO CAPÍTULO 167

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 5 POLIEDROS 168

Os poliedros 170

Poliedros convexos e poliedros não convexos 171

Acessando tecnologias 172

Exercícios e problemas 174

Relação de Euler 175

Exercícios e problemas 176

Poliedros de Platão 177

Poliedros regulares 179

Exercícios e problemas 181

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA 182

Cada um na sua bolha 182

Prismas 184

Exercícios e problemas 186

Área da superfície de um prisma 187

Exercícios e problemas 188

Volume de um prisma 191

Volume do paralelepípedo reto retângulo 191

Princípio de Cavalieri 193

Volume de um prisma qualquer 193

Exercícios e problemas 194

TRABALHO E JUVENTUDES 198

O que faz um artista 3D? 198

Pirâmides 199

Área da superfície de uma pirâmide 201

Exercícios e problemas 202

Volume de uma pirâmide 204

Volume de uma pirâmide triangular 205

Volume de uma pirâmide qualquer 205

Exercícios e problemas 207

DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL 208

Proteção aos Patrimônios Mundiais 208

Tronco de pirâmide reta 210

Área da superfície de um tronco de pirâmide 211

Volume de um tronco de pirâmide 211

Exercícios e problemas 213

SÍNTESE DO CAPÍTULO 215

CAPÍTULO 6 CORPOS REDONDOS 216

Os corpos redondos 218

Cilindro 219

Área da superfície de um cilindro reto 220

Exercícios e problemas 222

Volume do cilindro 224

TRABALHO E JUVENTUDES 226

O trabalho do serralheiro 226

Exercícios e problemas 227

Acessando tecnologias 232

O cone 234

Área da superfície de um cone reto 235

Exercícios e problemas 237

Volume do cone 238

Exercícios e problemas 240

Tronco de cone reto 243

Área da superfície de um tronco de cone reto 243

Volume de um tronco de cone reto 245

Exercícios e problemas 246

Esfera 251

Volume da esfera 252

Resolvendo por etapas 254

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas 256
Área da superfície da esfera 257
Exercícios e problemas 258
SÍNTESE DO CAPÍTULO 259

CAPÍTULO 7 PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS 260
Cartografia 262
O formato do planeta Terra 262
Estudando projeções cartográficas 263
Classificação de projeções 263
TRABALHO E JUVENTUDES 266
O que faz um engenheiro cartógrafo? 266
Exercícios e problemas 267
Acessando tecnologias 270
SÍNTESE DO CAPÍTULO 271

Ação e participação 272
Projeto **A** – Empreendedorismo sustentável de comunidades tradicionais 274
Projeto **B** – Saúde e segurança no trabalho 278
Ampliando seus conhecimentos 282
Respostas 286
Referências bibliográficas comentadas 303
Lista de siglas 304

OBJETOS DIGITAIS

***Podcast*: Filmes interativos: os possíveis caminhos e finais** 15
Infográfico clicável*: Aleatoriedade nos jogos de *videogame 47
***Carrossel de imagens*: Contribuições para a probabilidade** 48
***Vídeo*: O problema de Monty Hall** 55
***Podcast*: Qual é a probabilidade de errar todas as questões do Enem?** 62
***Podcast*: Probabilidade em aniversários** 63
***Vídeo*: Método de captura e recaptura simples** 79
***Podcast*: O que é o TRI e como ela afeta sua nota na prova do Enem?** 105
***Vídeo*: Outros gráficos** 129
***Infográfico clicável*: Como saber se o consumidor é um bom pagador?** 134
***Carrossel de imagens*: Contribuições para a Geometria Espacial** 144
***Carrossel de imagens*: Geometria Esférica** 148
***Infográfico clicável*: Impedimento no futebol** 151
***Mapa clicável*: Mapa altimétrico** 160
***Infográfico clicável*: Calculando o desnível de um terreno** 191
***Mapa clicável*: Centros de lançamento brasileiros** 258
***Vídeo*: Dá para ir a pé dos EUA à Rússia?** 265

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

1

ANÁLISE COMBINATÓRIA



STOCK PHOTO DIRECTORS/SHUTTERSTOCK

Momento de expectativa durante exibição de cena de uma série no televisor de casa.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Com tantas séries e seriados produzidos e lançados, é provável que alguns deles sejam seus favoritos. Mas você sabe qual é a diferença entre série e seriado? A principal característica de uma série é a relação que ela tem com o próximo episódio a ser exibido, ou seja, a continuidade é o que diferencia uma série de um seriado. Já o seriado pode ser classificado como uma história concluída em cada episódio.

Contudo, existe pelo menos uma série de animação japonesa cujos episódios em diferentes ordenamentos poderiam ser igualmente interessantes: *A melancolia de Haruhi Suzumiya*. Como essa série envolve viagens no tempo, a ordem cronológica de apresentação dos episódios não é evidente. A primeira temporada foi ao ar, originalmente, em ordem não cronológica; houve também uma versão em DVD que alterou novamente a ordem dos episódios. Enquanto os fãs refletiam sobre qual seria a melhor ordem, alguém perguntou em um fórum *on-line*: quantos episódios no mínimo é preciso assistir para que se tenha assistido à série em todas as sequências possíveis? Em menos de uma hora, um autor anônimo respondeu que era preciso assistir a, no mínimo, 93 884 313 611 episódios seguidos. Por vários anos, essa questão despertou o interesse da comunidade matemática, exigindo muito esforço para verificar esse cálculo.

Para simplificar, vamos considerar apenas dois episódios: X e Y. Há duas maneiras de assisti-los: (X, Y) e (Y, X). Se juntarmos as duas maneiras e assistirmos na sequência (X, Y, Y, X) resolvemos o problema. Mas, nesse caso, teremos uma redundância, pois não é preciso assistir ao episódio Y duas vezes seguidas. Sendo assim, basta que adotemos a sequência (X, Y, X) para assistir à série em todas as sequências possíveis.

Estruturas sequenciais, como essa, que envolvem, em um único bloco, todas as ordens possíveis de um conjunto de elementos, são denominadas superpermutações e podem ser usadas em outros contextos, como no caso em que é necessário construir uma sequência para testar todas as senhas possíveis obtidas a partir dos dígitos X, Y, Z e W, sem repetição.

OBJETO DIGITAL ***Podcast*:** Filmes interativos: os possíveis caminhos e finais

Neste capítulo, você vai estudar:

- o princípio aditivo da contagem;
- o princípio multiplicativo da contagem;
- arranjo simples, permutação simples e combinação simples;
- permutação com repetição;
- Binômio de Newton e Triângulo de Pascal.

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes verifiquem que essa sequência contém todas as seis possibilidades da questão anterior, considerando três elementos seguidos, na mesma ordem. Então, podemos dizer que essa sequência é a superpermutação desse problema.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Você conhece ou já assistiu a uma série cujos episódios em diferentes ordenações não interferem na coerência entre eles? Converse com os colegas e o professor. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

2. Há quantas maneiras de assistir aos três episódios X, Y e Z de uma série? Escreva essas possibilidades. Resposta: Há seis maneiras. São elas: (X, Y, Z), (X, Z, Y), (Y, X, Z), (Y, Z, X), (Z, X, Y) e (Z, Y, X).

3. É preciso assistir a, no mínimo, nove episódios para que seja possível assistir uma série com três episódios em todas as sequências possíveis. Com base nessa informação e na resposta da questão anterior, verifique se a sequência única $(X, Y, Z, X, Y, X, Z, Y, X)$ é a superpermutação mínima desse problema.

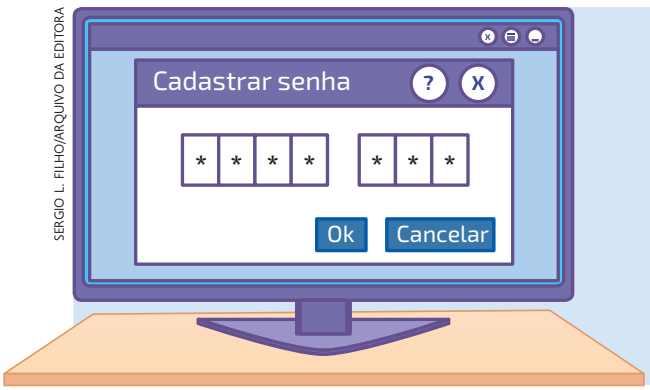
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Métodos de contagem

Métodos de contagem são processos organizados que permitem determinar quantas decisões podem ser tomadas para se executar uma tarefa ou um procedimento. Esses métodos possibilitam resolver problemas como os apresentados a seguir. Professor, professora: Se julgar oportuno, proponha aos estudantes que, em grupos, desenvolvam estratégias para solucionar os problemas apresentados. Esses problemas serão propostos aos estudantes na seção **Exercícios e problemas**.

A. Em certo dia no cinema *FilmesMat*, estão disponíveis três títulos de ação, dois de comédia e um de animação. Quantos são os filmes que um espectador pode assistir nesse dia? Professor, professora: O nome do cinema apresentado nesta questão é fictício.

B. Para acessar determinado *site*, é necessário cadastrar uma senha formada por quatro letras maiúsculas e três algarismos, nessa ordem. Na senha, os caracteres devem ser distintos, ou seja, não podem se repetir.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Exemplos de senhas:
- AUDT409
- ABPK791
- CVEZ362
- DOTQ452

Sabendo que estão disponíveis 26 letras e 10 algarismos, quantas senhas diferentes podem ser cadastradas nesse *site*?

Nos próximos tópicos, estudaremos os métodos de contagem denominados princípio aditivo e princípio multiplicativo, que possibilitam resolver problemas semelhantes aos apresentados.

Princípio aditivo da contagem

Podemos resolver o problema **A** proposto anteriormente utilizando o princípio aditivo da contagem.

Considere dois acontecimentos independentes. Se um pode ocorrer de m maneiras distintas e o outro pode ocorrer de n maneiras distintas, então a quantidade de maneiras de ocorrer um acontecimento ou o outro é $n + m$. Esse é o **princípio aditivo da contagem**.

Observação

Dois acontecimentos são independentes quando a ocorrência de um não afeta a ocorrência do outro.

A seguir, apresentamos outra situação que pode ser resolvida por esse princípio.

Uma lanchonete vende alguns sanduíches já montados. Ela oferece três opções de sanduíche com carne, duas opções de sanduíche com frango e quatro opções de sanduíches vegetarianos. Nesse tipo de serviço, quantas são as possibilidades de um cliente escolher apenas um sanduíche?

De acordo com as informações apresentadas, o cliente pode escolher qualquer opção de lanche entre as apresentadas, que totalizam:

$$3 + 2 + 4 = 9$$

Portanto, um cliente possui 9 possibilidades de escolha.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

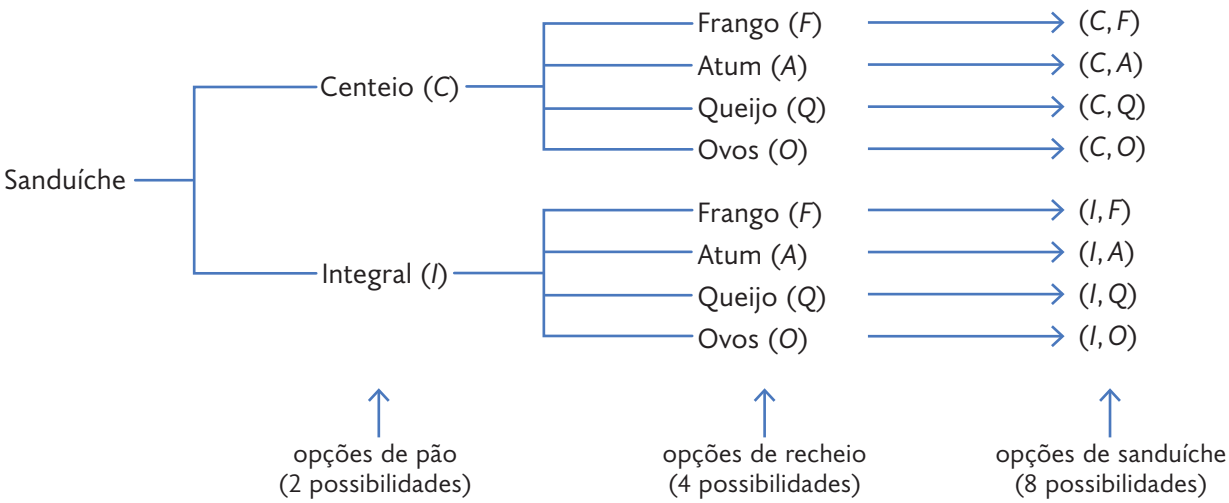
Princípio multiplicativo da contagem

Podemos resolver o problema **B** proposto anteriormente escrevendo todas as possibilidades e realizando a contagem das senhas. No entanto, escrever todas essas senhas pode ser bem trabalhoso. Uma maneira de resolver esse tipo de problema é por meio do princípio multiplicativo da contagem ou, como também é chamado, princípio fundamental da contagem.

Acompanhe uma situação que pode ser resolvida por esse princípio.

No caso da lanchonete apresentada na página anterior, o cliente também pode optar por montar seu sanduíche. Nesse tipo de serviço, são oferecidas duas opções de pão (centeio e integral) e quatro de recheio (frango, atum, queijo ou ovos). De quantas maneiras distintas um cliente pode montar um sanduíche com um tipo de pão e um de recheio?

Vamos organizar as possibilidades de escolha em uma **árvore de possibilidades** (ou **diagrama de árvore**).



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Essas possibilidades também podem ser organizadas em um **quadro de dupla entrada**.

Possibilidades de montar um sanduíche com um tipo de pão e um recheio

Recheio	Pão	
	Centeio (*C*)	**Integral (*I*)**
Frango (*F*)	(C, F)	(I, F)
Atum (*A*)	(C, A)	(I, A)
Queijo (*Q*)	(C, Q)	(I, Q)
Ovos (*O*)	(C, O)	(I, O)

A escolha do sanduíche pode ser realizada em duas etapas: a escolha do tipo de pão, com 2 possibilidades, e a escolha do recheio, com 4 possibilidades.

Tanto na árvore de possibilidades quanto no quadro de dupla entrada, o total de possibilidades para a montagem de um sanduíche é igual a 8, ou seja, $2 \cdot 4 = 8$.

Se um acontecimento A pode ocorrer de n maneiras distintas e, para cada uma dessas maneiras, um acontecimento B pode ocorrer de m maneiras distintas, então a quantidade de possibilidades de ocorrência dos acontecimentos A e B é dada pelo produto $n \cdot m$. Esse é o **princípio fundamental da contagem**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

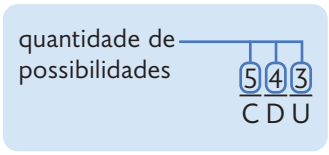
3. Resposta pessoal. A resposta depende de cada problema elaborado pelos estudantes.
Professor, professora: A tarefa **3** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Exemplos

a) Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9?

O número formado terá três ordens, ou seja, centena (C), dezena (D) e unidade (U). Na ordem das centenas, temos 5 possibilidades. Como os algarismos devem ser distintos, na ordem das dezenas, temos 4 possibilidades e na ordem das unidades, 3 possibilidades.

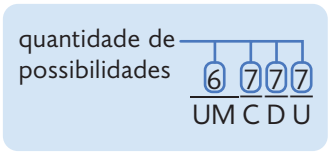
Portanto, a quantidade de números que podemos formar é $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.



b) Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, podemos formar quantos números de quatro algarismos?

O número formado terá quatro ordens, ou seja, unidade de milhar (UM), centena (C), dezena (D) e unidade (U). Na ordem das unidades de milhar, temos 6 possibilidades, ou seja, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, pois o 0 não pode ocupar essa ordem. Como os algarismos podem se repetir, na ordem das centenas, das dezenas e das unidades, temos 7 possibilidades.

Portanto, a quantidade de números que podemos formar é $6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2\,058$.



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

Professor, professora: O nome do cinema apresentado nesta questão é fictício.

1. De acordo com as informações apresentadas na página **16**, determine a quantidade de filmes que um espectador pode assistir no cinema *FilmesMat* naquele dia. Resposta: 6 filmes.

2. Nos itens a seguir, determine a solução de cada situação e o princípio de contagem utilizado.

a) Maria está jogando um *videogame*. Nele, há um personagem com poderes da terra, dois com poderes da água, um com poderes do vento e três com poderes do fogo. Quantos são os personagens que Maria pode escolher?
Resposta: 7 personagens; princípio aditivo da contagem.

b) Renato levou em uma viagem três calças, dois pares de sapato e quatro camisas, todos diferentes entre si. De quantas maneiras distintas ele pode se vestir, utilizando uma calça, um par de sapatos e uma camisa?
Resposta: De 24 maneiras; princípio multiplicativo da contagem.

c) Maurício tem a opção de comprar uma camisa listrada ou uma camisa xadrez. Quantas são as opções de camisa que Maurício pode escolher?
Resposta: 2 opções. Princípio aditivo da contagem.

3. Elabore um problema que seja possível resolver usando o princípio aditivo da contagem. Em seguida, peça a um colega que o resolva.

4. Em certo *shopping*, há sete portões de entrada/saída. De quantas maneiras distintas uma pessoa pode entrar e sair desse *shopping*? E entrar e sair por um portão não utilizado na entrada?
Resposta: 49 maneiras; 42 maneiras.

5. A partir das informações apresentadas na página **16**, calcule quantas senhas distintas podem ser cadastradas naquele *site*. Resposta: 258 336 000 senhas.

6. Antes do início de uma partida de futebol, é verificado o uso de uniformes cujas cores distingam as equipes claramente. Resposta: De 24 maneiras.

Para certa partida de futebol, uma das equipes dispunha de quatro modelos de camisa, dois de calção e três de meião. De quantas maneiras distintas essa equipe pode compor seu uniforme?



RICHARD CALLIS/SPP/FOTOARENA

Seleção brasileira feminina de futebol posando para fotografia antes da partida das quartas de final contra a França, em Nantes, nos Jogos Olímpicos de Paris 2024.

7. Uma companhia de transporte rodoviário intermunicipal estuda as 15 possíveis rotas para fazer viagens do município **A** ao município **C**, com passagem obrigatória pelo município **B**. Sabendo que de **A** a **B** existem três possíveis trajetos, quantos trajetos existem entre **B** e **C**?
Resposta: 5 trajetos.

8. Uma fantasia é composta de vestido, máscara e sapatos, disponíveis nas cores vermelha, amarela e preta. Sabendo que os sapatos e o vestido devem ter cores diferentes e a máscara é opcional, de quantas maneiras distintas pode-se compor a fantasia?
Resposta: De 24 maneiras.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

9. O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), realizado em 2023, era composto de uma redação e 4 provas – Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias –, sendo cada uma delas com 45 questões de múltipla escolha. Cada questão tinha 5 alternativas.

O item que apresenta o total de possibilidades para responder às questões das provas do Enem nesse ano é: Resposta: Alternativa **d**.

a) $180 \cdot 5$

b) $4 \cdot 545$

c) 180^5

d) 5^{180}

e) $\frac{4^5 \cdot 45}{180}$

14. Professor, professora: Ao trabalhar com esta tarefa, questione os estudantes se o número de telefone 1 234-5 678 pode pertencer a essa companhia. Espera-se que eles digam que não, pois o 4º dígito deve ser 5 ou 7.

10. Com os algarismos de 0 a 9, quantos números:

a) de quatro algarismos podem ser formados? Resposta: 9 000 números.

b) de cinco algarismos distintos podem ser formados? Resposta: 27 216 números.

c) ímpares de três algarismos podem ser formados? Resposta: 450 números.

d) múltiplos de 5 com seis algarismos podem ser formados? Resposta: 180 000 números.

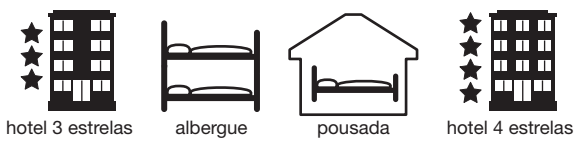
11. A seguir, estão apresentadas as opções que uma pessoa tem ao realizar a compra de certo pacote turístico em uma agência de viagens.

Transporte



Professor, professora: A tarefa **15** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Hospedagem



Permanência



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

11. b) Resposta: De 12 maneiras.

a) De quantas maneiras distintas a pessoa pode compor o pacote turístico? Resposta: De 36 maneiras.

b) Se a pessoa optar por transporte aéreo e hospedagem em hotel, de quantas maneiras distintas ela pode compor o pacote turístico?

12. Para representar as informações da tabela a seguir em um gráfico de setores, dispõe-se de 9 cores. Sabendo que não deve haver setores com cores iguais, de quantas maneiras distintas o gráfico pode ser colorido? Resposta: De 15 120 maneiras.

Produção de cana-de-açúcar em 2022

Região	Produção (milhões de toneladas)
Sudeste	499,9
Nordeste	54
Centro-Oeste	131,7
Sul	35,1
Norte	3,8

Fonte de pesquisa: SIDRA. Disponível em: https://sidra.ibge.gov.br/Tabela/1612. Acesso em: 2 ago. 2024.

13. Saulo esqueceu a senha de sua conta de *e-mail*, mas lembra-se de que ela é formada por 5 algarismos pares distintos. Um dispositivo de segurança do servidor de *e-mail* impede que sejam feitas várias tentativas de acesso a partir de um mesmo local e bloqueia a conta por 5 minutos após 3 tentativas de acesso malsucedidas. Se Saulo tentar todas as possíveis senhas de acordo com o que ele se lembra, sem repeti-las, em quantos minutos, no máximo, ele poderá conseguir acessar sua conta de *e-mail*? Considere que seja necessário 1 minuto para realizar 3 tentativas.
Resposta: 235 min

14. Em certo município, para compor o número dos telefones de 8 dígitos, certa companhia telefônica tem o 1º, o 2º e o 3º dígitos iniciais fixos, o 4º dígito pode ser 5 ou 7, e os demais dígitos podem ser qualquer algarismo.

a) Quantos números distintos de telefone essa companhia pode compor? Resposta: 20 000 números.

b) Se for acrescida ao 4º dígito a possibilidade de ser 3 ou 9, quantos números distintos a mais essa companhia poderá compor?
Resposta: 20 000 números distintos a mais.

15. O sistema de numeração binário é um sistema posicional no qual as quantidades são indicadas a partir de dois números, em geral 0 e 1. Nesse sistema, o número 177, na base decimal, é representado por 10110001. Os computadores digitais usam em seus processos internos o sistema binário, e cada dígito binário é denominado bite e cada conjunto de 8 dígitos, que forma um caractere, baite. Resposta pessoal. A resposta depende de cada problema elaborado pelos estudantes.
Com base nas informações, elabore um problema que seja possível resolver utilizando o princípio multiplicativo da contagem. Em seguida, peça a um colega que o resolva.

Professor, professora: Durante a execução da tarefa **13**, explique aos estudantes que senhas são sigilosas, de uso pessoal e intransferíveis. Por isso, devemos ter cuidado para não divulgá-las a estranhos, evitando fraudes e compras indevidas de terceiros em nosso nome.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Fatorial

Professor, professora: Informe aos estudantes que a notação n fatorial ($n!$) foi introduzida, em 1808, pelo matemático francês Christian Kramp (1760-1826), para sanar dificuldades gráficas apresentadas pelo símbolo previamente utilizado.

Em algumas situações da análise combinatória, é necessário calcular o produto entre números naturais consecutivos. Para representar esses cálculos, utilizamos a notação $n!$ (lê-se: "fatorial de n").

Considere um número natural n, com $n \geq 2$. Definimos como fatorial de n, indicado por $n!$, o produto de n por seus antecessores naturais até o 1, ou seja:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 1$$

Também definimos que:

- $1! = 1$
- $0! = 1$

Exemplos

- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Com base nos exemplos, podemos notar que: $3! = 3 \cdot 2!$, $4! = 4 \cdot 3!$ e $5! = 5 \cdot 4!$. De maneira geral: $n! = n \cdot (n-1)!$

Exercícios e problemas resolvidos

R1. Efetue os cálculos.

a) $\frac{10!}{8!}$

b) $\frac{5!}{2! + 3!}$

Resolução

a) $\frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 10 \cdot 9 = 90$

b) $\frac{5!}{2! + 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! + 3 \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}(1+3)} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot 3}{\cancel{4}} = 15$

R2. Simplifique a expressão $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$.

Resolução

$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = (n^2 + n) \cdot (n-1) = n^3 - n^2 + n^2 - n = n^3 - n$$

R3. Resolva a equação $\frac{(n+2)!}{5 \cdot n!} = 4$.

Resolução

$$\frac{(n+2)!}{5 \cdot n!} = 4 \Rightarrow \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot \cancel{n!}}{5 \cdot \cancel{n!}} = 4 \Rightarrow n^2 + 3n - 18 = 0$$

Nesse caso, $n = 3$ ou $n = -6$, que não convém, pois $n \geq 0$. Portanto, $n = 3$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

16. Resolva os cálculos a seguir.

a) $6!$
Resposta: 720

b) $7!$
Resposta: 5 040

c) $4 \cdot 2!$
Resposta: 8

d) $0! + 4!$
Resposta: 25

e) $5! - 4!$
Resposta: 96

f) $\frac{10!}{3!\,7!}$
Resposta: 120

g) $\frac{15!\,13!}{14!\,12!}$
Resposta: 195

h) $\frac{12!\,3!}{15!}$
16. h) Resposta: $\frac{1}{455}$

i) $\frac{(3! - 0!)!}{3!\,2!}$
Resposta: 10

17. Simplifique as expressões.

a) $\frac{n!}{(n-1)!}$
Resposta: n

b) $\frac{(n+4)!}{(n+2)! + (n+3)!}$
Resposta: $n + 3$

18. Resolva as equações.

a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 12$
Resposta: $n = 3$

b) $n! = 1$
Resposta: $n = 1$ ou $n = 0$

c) $\frac{(n+10)!}{(n+8)!} = 30$
Resposta: $n = -4$

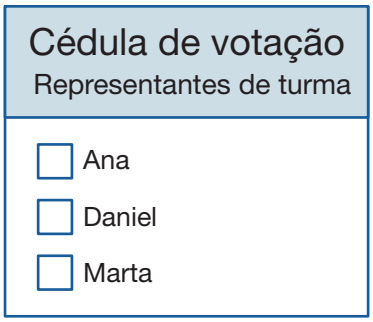
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Arranjo simples

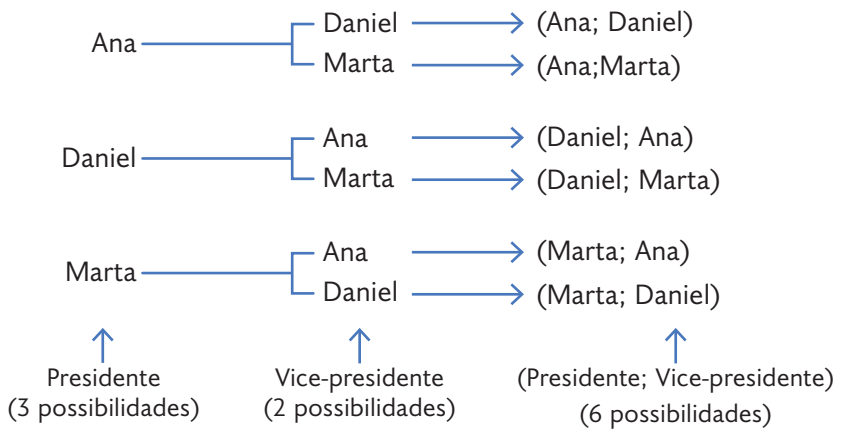
Para a escolha do presidente e do vice-presidente de uma turma do Ensino Médio, candidataram-se três estudantes, conforme a cédula de votação apresentada.

Os dois candidatos mais votados serão eleitos, respectivamente, presidente e vice-presidente. Quantas são as possibilidades de resultado dessa eleição?

Obtemos todas as possibilidades de resultado construindo um diagrama de árvore.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Dica

Também podemos calcular a quantidade de resultados dessa eleição por meio do princípio fundamental da contagem: $3 \cdot 2 = 6$.

De acordo com o diagrama, são 6 as possibilidades de resultado dessa eleição.

Nessa situação, a ordem das colocações interfere no total de possibilidades. Por exemplo, (Ana; Daniel) é diferente de (Daniel; Ana), pois em um dos casos Daniel é presidente e Ana é vice-presidente, e no outro os cargos são invertidos.

Nesse caso, temos um arranjo de 3 elementos tomados 2 a 2 (três candidatos para dois cargos distintos), e o total de arranjos é indicado por $A_{3,\,2} = 3 \cdot 2 = 6$. Esse tipo de agrupamento é denominado **arranjo simples**.

Observação

Um arranjo é chamado simples quando não ocorre repetição de elementos em um agrupamento. Em arranjos simples, os agrupamentos podem diferir entre si tanto pela natureza como pela ordem dos elementos.

Vamos obter uma fórmula para calcular o total de agrupamentos no caso de n elementos tomados p a p, com $n \geq p$, ou seja, uma fórmula para determinar $A_{n,p}$. Calculando a quantidade de agrupamentos, temos:

- 1ª posição: n possibilidades
- 2ª posição: $(n - 1)$ possibilidades
- 3ª posição: $(n - 2)$ possibilidades
- 4ª posição: $(n - 3)$ possibilidades

...

- p-ésima posição: $\left[n - (p - 1)\right]$ possibilidades

Professor, professora: A sistematização do princípio fundamental da contagem torna-se mais fácil e natural com a associação intuitiva proporcionada pela observação do comportamento das ramificações nas árvores de possibilidades. Por exemplo, se uma possibilidade se ramifica em duas possibilidades e cada uma das duas se ramifica em mais quatro, é evidente que a quantidade final de ramificações será $1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$, ou seja, o resultado da multiplicação das quantidades de ramificações em cada etapa. Assim, a árvore de possibilidades pode ser compreendida como uma visualização geométrica do princípio fundamental da contagem.

De acordo com o princípio fundamental da contagem:

$$A_{n,\,1} = n$$
$$A_{n,\,2} = n \cdot (n - 1)$$
$$A_{n,\,3} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$$
$$A_{n,\,4} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3)$$
$$\ldots$$
$$A_{n,\,p} = \underbrace{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \ldots \cdot \left[n - (p - 1)\right]}_{p \text{ fatores}}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para escrever $A_{n,\,p}$ por meio de fatoriais, multiplicamos por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$.

$$A_{n,\,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot \left[n-(p-1)\right] \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} =$$

$$= \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot \left[n-(p-1)\right]}^{n!} \cdot (n-p)!}{(n-p)!} \Rightarrow A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Observação

Note que multiplicar por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$ não altera o resultado da expressão, pois: $\frac{(n-p)!}{(n-p)!} = 1$.

Arranjo simples de n elementos distintos tomados p a p, com n e p números naturais e $n \geq p$, é todo agrupamento ordenado formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados.

A quantidade total de agrupamentos é indicada por $A_{n,\,p}$ ou A_n^p, e calculada por:

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Professor, professora: Para que os estudantes não tenham dificuldades na dedução da expressão geral para o arranjo simples, faça-lhes a observação de que $n-(p-1) = n-p+1$. Por mais que isso seja trivial, é algo que torna mais claro o motivo pelo qual, na dedução da expressão desejada, faz-se a multiplicação por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, já que $(n-p)$ é o antecessor de $(n-p+1)$.

Professor, professora: Solicite aos estudantes que verifiquem que $A_{n,\,0} = 1$ e $A_{0,\,0} = 1$.

Exemplos

- $A_{9,\,2} = 9 \cdot 8 = 72$ ou $A_{9,\,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 9 \cdot 8 = 72$
- $A_{10,\,5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$ ou $A_{10,\,5} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$

Exercícios e problemas resolvidos

R4. Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Resolução

Os números 123 e 213, por exemplo, possuem os mesmos algarismos, porém são diferentes, ou seja, a ordem tem de ser considerada. Nesse caso, cada número corresponde a um arranjo dos 6 algarismos, tomados 3 a 3.

$$A_{6,\,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$$

Também podemos resolver esse problema por meio do princípio fundamental da contagem.

quantidade de possibilidades

6	5	4
C	D	U

$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Observação

As situações que envolvem arranjo simples também podem ser resolvidas utilizando o princípio fundamental da contagem. Nesses casos, resolva da maneira que preferir.

Portanto, podemos formar 120 números.

R5. Uma senha de computador é formada por duas letras maiúsculas distintas (de 26 disponíveis), seguidas de quatro algarismos distintos (de 10 disponíveis). Quantas senhas diferentes é possível formar?

Resolução

As senhas AB1234 e BA1423, por exemplo, possuem as mesmas letras e algarismos, porém são diferentes, ou seja, a ordem tem de ser considerada. Nesse caso, cada senha corresponde ao produto entre o arranjo de 26 letras, tomadas 2 a 2, e o arranjo de 10 algarismos, tomados 4 a 4.

$$A_{26,\,2} \cdot A_{10,\,4} = \frac{26!}{(26-2)!} \cdot \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot \cancel{24!}}{\cancel{24!}} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 650 \cdot 5\,040 = 3\,276\,000$$

Portanto, é possível formar 3 276 000 senhas diferentes.

LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

Professor, professora: Durante a resolução da tarefa **23**, se julgar conveniente, relembre aos estudantes que senhas são sigilosas, de uso pessoal e intransferíveis.

19. Efetue os cálculos.

a) $A_{6,\,2}$ Resposta: 30

b) $A_{9,\,3}$ Resposta: 504

c) $A_{7,\,4}$ Resposta: 840

d) $A_{8,\,6}$ Resposta: 20 160

e) $A_{5,\,4} - A_{9,\,2}$ Resposta: 48

f) $A_{20,\,3} + A_{40,\,1}$ Resposta: 6 880

20. Simplifique as expressões.

a) $\dfrac{A_{n-1,\,2}}{A_{n-3,\,1}}$ Resposta: $\dfrac{(n-1)\cdot(n-2)}{(n-3)}$

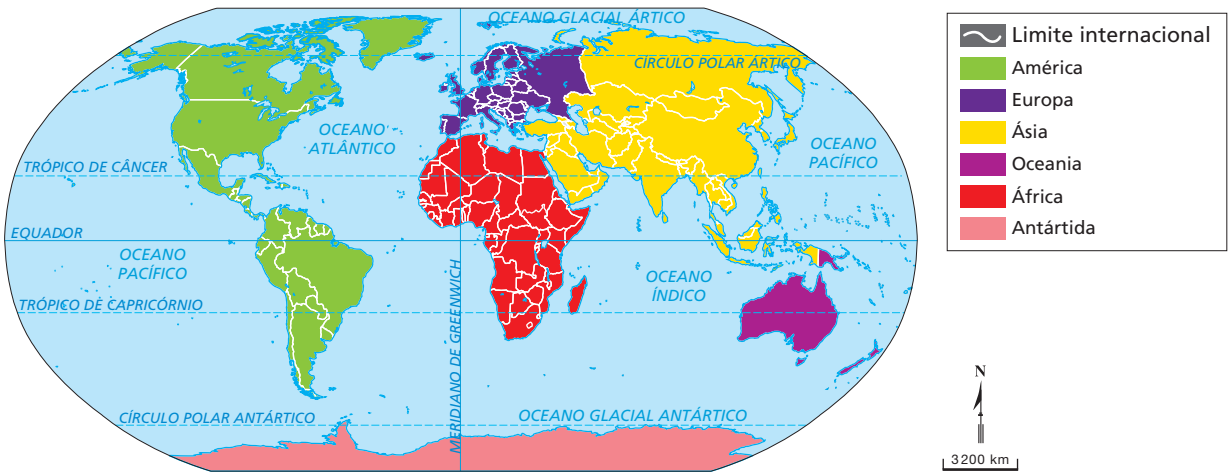
b) $\dfrac{A_{n+1,\,n}}{A_{n,\,n-1}}$ Resposta: $n+1$

c) $\dfrac{A_{n-1,\,n-3}}{A_{n+1,\,n}}$ Resposta: $\dfrac{1}{2n^2+2n}$

21. Uma empresa possui uma linha com 12 produtos diferentes. O departamento de *marketing* dessa empresa, em uma campanha publicitária, realizará três anúncios para divulgação dos produtos: um em *outdoor*, um em redes sociais e um em televisão. Sabendo que em cada tipo de anúncio apenas um dos produtos será divulgado, de quantas maneiras distintas essa empresa pode compor a campanha publicitária?
Resposta: De 1 320 maneiras distintas.

22. Para colorir um mapa-múndi, cada um dos seis continentes será pintado com uma cor diferente. De quantas maneiras distintas esse mapa pode ser pintado, dispondo-se para isso de 12 cores distintas?
Resposta: De 665 280 maneiras distintas.

Os continentes



KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro, 2023.

23. Para acessar sua conta bancária via internet, uma pessoa deve cadastrar uma senha composta de 5 caracteres distintos, entre 32 disponíveis.

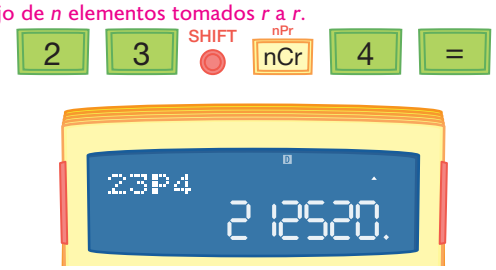
a) De quantas maneiras diferentes é possível cadastrar a senha? Resposta: De 24 165 120 maneiras diferentes.

b) Certo cliente usa sempre senhas em que o primeiro e o último caractere são iguais. Nesse caso, quantas maneiras diferentes esse cliente dispõe para compor a senha que vai acessar sua conta?
Resposta: De 863 040 maneiras diferentes.

24. Uma biblioteca utiliza um sistema de cadastramento de livros em que os códigos são compostos de duas partes: uma parte alfabética com 2 letras (de 26 disponíveis) e uma parte numérica com 5 algarismos (de 10 disponíveis). Sabendo que não há repetição de caracteres nos códigos nem livros com códigos repetidos, quantos livros essa biblioteca pode cadastrar? Resposta: 19 656 000 livros.

Professor, professora: Explique aos estudantes que nPr corresponde ao arranjo de n elementos tomados r a r.

25. Vamos calcular $A_{23,\,4}$ usando uma calculadora científica. Para isso, registramos o número 23 e, em seguida, digitamos as teclas SHIFT (para acessar a 2ª função) e nPr (nCr). Por fim, inserimos o número 4 e digitamos a tecla =, obtendo o resultado.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Utilizando uma calculadora científica e procedendo de maneira parecida à apresentada, calcule:

a) $A_{20,\,6}$. Resposta: 27 907 200

b) $A_{13,\,11}$. Resposta: 3 113 510 400

c) $A_{40,\,5} + A_{0,\,0}$. Resposta: 78 960 961

d) $A_{12,\,8} - A_{0,\,0}$. Resposta: 19 958 399

e) $A_{11,\,8} \cdot A_{0,\,0}$. Resposta: 6 652 800

f) $\dfrac{A_{22,\,5}}{A_{0,\,0}}$. Resposta: 3 160 080

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

26. A partir dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 8, calcule a quantidade de números que podem ser formados:

a) com 4 algarismos. Resposta: 625 números.

b) com 4 algarismos distintos. Resposta: 120 números.

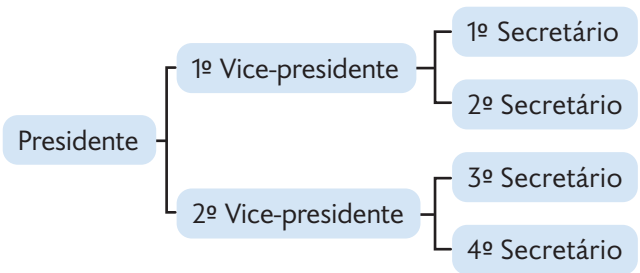
c) com números ímpares de 4 algarismos distintos. Resposta: 48 números.

d) com múltiplos de 4 com 4 algarismos distintos. Resposta: 36 números.

Dica

Para resolver o item **d** dessa tarefa, lembre-se de que um número inteiro será múltiplo de 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos for divisível por 4.

27. O Senado Federal do Brasil é composto de 81 senadores, que representam todas as 27 unidades da federação. A mesa diretora do Senado é eleita internamente e tem a seguinte composição (com exceção dos suplentes):



a) Sabendo que cada unidade da federação é representada igualmente no Senado Federal, quantos senadores representam cada uma delas? Resposta: 3 senadores.

b) Escreva uma expressão para representar de quantas maneiras distintas pode ser composta a mesa diretora do Senado Federal em uma eleição interna. Resposta: $\frac{81!}{74!}$

PARA EXPANDIR

Que tal saber mais sobre as atribuições dos senadores e senadoras brasileiros? Para isso, leia o artigo *Atribuições do Senado Federal*, publicado no portal O Senado. Disponível em: https://www.senado.leg.br/senado/atribuicoes.asp. Acesso em: 25 jul. 2024.

28. Um concurso promovido por uma emissora de televisão vai formar uma nova banda de *rock*. Classificaram-se para a etapa final três bateristas, quatro baixistas, cinco guitarristas e dois vocalistas. A banda vencedora do concurso será formada por um baterista, um baixista, dois guitarristas e um vocalista.

De quantas maneiras a banda pode ser formada, com base nos candidatos finalistas, sabendo que os guitarristas têm funções diferentes nessa banda? Resposta: De 480 maneiras diferentes.

29. Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 5, 7 e 9, quantos números de cinco algarismos distintos menores do que 70 000 podem ser formados? Resposta: 1 440 números.

30. Resolva a equação $A_{3n+3,\,n+2} = 15 \cdot A_{3n+2,\,n+1}$. Resposta: $n = 4$

31. Em certa categoria de corrida automobilística, participam 10 equipes com 2 pilotos cada e, ao final de cada prova, os 6 melhores classificados recebem as respectivas pontuações: 10, 8, 6, 4, 2 e 1.

a) De quantas maneiras distintas podemos distribuir a pontuação aos pilotos em uma dessas provas? Resposta: De 27 907 200 maneiras distintas.

b) Sabendo que em certa prova os pilotos da equipe **A** pontuaram, de quantas maneiras distintas pode ter ocorrido a pontuação dessa prova? Resposta: De 2 203 200 maneiras distintas.

32. Na temporada 2022/2023 da Liga do Novo Basquete Brasil (NBB), em que Franca foi a equipe masculina campeã, os jogos da fase classificatória foram disputados em turno e returno, de maneira que cada equipe realizasse dois jogos contra cada uma das outras equipes, um em "casa" e outro na "casa" do adversário. Sabendo que ao todo foram realizados 272 jogos, resolva os itens.



CELSO PUPO/FOTOARENA

Momento de disputa pela bola durante a partida entre Flamengo e Franca pela 11ª rodada do NBB, na cidade do Rio de Janeiro, em 29 de dezembro de 2022.

a) Quantas equipes disputaram esse campeonato de basquetebol? Resposta: 17 equipes.

b) Cada equipe disputou quantas partidas na fase classificatória? Resposta: 32 partidas.

33. Em uma competição, um participante deve digitar uma senha composta de 3 algarismos distintos, entre os 10 possíveis. Considerando que, em média, cada tentativa de acertar a senha dure cerca de 5 segundos, responda aos itens a seguir.

a) Se não forem digitadas senhas repetidas, em quantos minutos, no máximo, o participante acertará a senha? Resposta: Em 60 min.

b) Caso o participante saiba que os algarismos 0 e 7 fazem parte da senha correta, na pior das hipóteses, ele conseguirá acertar a senha em 3 min? Justifique sua resposta.

Resposta: Não, pois, nessas condições, a quantidade máxima de senhas a serem digitadas é 48, o que equivale a 4 min.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Permutação simples

Nos casos de arranjos simples, em que $n = p$, temos uma permutação simples, ou seja, um arranjo de n elementos, tomados n a n. Indicamos a quantidade total de permutações simples de n elementos por P_n e obtemos esse valor da seguinte maneira:

$$P_n = A_{n,\,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Permutação simples é todo arranjo de n elementos distintos tomados n a n. A quantidade total de permutações simples é indicada por P_n e calculada por:

$$P_n = n!$$

Exercícios e problemas resolvidos

R6. Considerando os **anagramas** da palavra **BRASIL**, determine:

a) a quantidade total de anagramas.

b) quantos começam com **B**.

c) quantos terminam com **L**.

d) quantos começam com **B** e terminam com **L**.

e) um diagrama de Venn representando os itens **a**, **b**, **c** e **d**.

f) quantos começam com **B** ou terminam com **L**.

Anagrama: palavra formada pela troca da ordem das letras de outra palavra. A palavra LIBRAS é um anagrama da palavra BRASIL.

Resolução

a) Cada anagrama é uma permutação das 6 letras. Assim, a quantidade total de anagramas é:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Portanto, há, ao todo, 720 anagramas.

b) Fixando a primeira letra, devemos permutar as outras 5 letras.

$$\underline{B}\ \underbrace{_\ _\ _\ _\ _}_{5\text{ letras}}$$

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Portanto, 120 anagramas começam com **B**.

c) Fixando a última letra, devemos permutar as outras 5 letras.

$$\underbrace{_\ _\ _\ _\ _}_{5\text{ letras}}\ \underline{L}$$

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Portanto, 120 anagramas terminam com **L**.

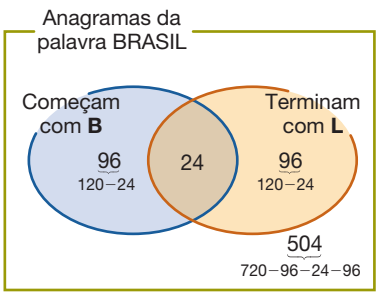
d) Fixando a primeira e a última letra, devemos permutar as outras 4 letras.

$$\underline{B}\ \underbrace{_\ _\ _\ _}_{4\text{ letras}}\ \underline{L}$$

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Portanto, 24 anagramas começam com **B** e terminam com **L**.

e)



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

f) Conforme o diagrama do item **e**, o total de anagramas que começam com **B** ou terminam com **L** é:

$$96 + 24 + 96 = 216$$

Portanto, 216 anagramas começam com **B** ou terminam com **L**.

Observação

Se nomearmos por X o conjunto dos anagramas começados com **B**, e por Y o conjunto dos anagramas terminados com **L**, verificamos que:

- $n(X \cup Y)$ é a quantidade de anagramas começados com **B** ou terminados com **L**.
- $n(X \cap Y)$ é a quantidade de anagramas começados com **B** e terminados com **L**.

Logo:

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y) =$$
$$= 120 + 120 - 24 = 216$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R7. (Enem, 2011) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é:

a) 24 **b)** 31 **c)** 32 **d)** 88 **e)** 89

Resolução

Como os números gerados têm 5 algarismos, todos ímpares e distintos, esses números correspondem às permutações de 75 913, entre as quais, aquelas que representam números menores do que 75 913 são as que têm as possíveis composições:

$1\underbrace{****}_{P_4}$ $3\underbrace{****}_{P_4}$ $5\underbrace{****}_{P_4}$ $71\underbrace{***}_{P_3}$ $73\underbrace{***}_{P_3}$ $751\underbrace{**}_{P_2}$ $753\underbrace{**}_{P_2}$

Segue que: $3 \cdot P_4 + 2 \cdot P_3 + 2 \cdot P_2 = 3 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 2 \cdot 2! = 88$

Portanto, 88 números eram menores do que 75 913.

Logo, esse número ocupa a posição 89 entre aqueles gerados pelo computador e a alternativa correta é a **e**.

41. Sugestão de resposta: Considerando *V*, *A* e *P* as cores das caixas vermelhas, amarelas e pretas, respectivamente, a sequência será (*V*, *A*, *P*, *V*, *A*, *V*, *P*, *A*, *V*). Essa sequência tem 9 caixas.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

34. Efetue os cálculos.

a) P_7 Resposta: 5 040

b) $\frac{A_{8,5}}{P_3}$ Resposta: 1 120

c) $P_7 - P_5$ Resposta: 4 920

d) $\frac{P_{12}}{P_{10}}$ Resposta: 132

e) $P_3 \cdot P_6$ Resposta: 4 320

f) $\frac{P_7}{A_{7,3}}$ Resposta: 24

35. Quantos anagramas tem a palavra:

a) AMOR? Resposta: 24 anagramas.

b) LUCRO? Resposta: 120 anagramas.

c) TRIÂNGULO? Resposta: 362 880 anagramas.

36. Certo restaurante é aberto de segunda-feira a sábado e, para cada dia da semana, tem um cardápio diferente. O dono do restaurante deseja alterar o cardápio da semana apenas permutando os cardápios já existentes. De quantas maneiras ele pode fazer isso? Resposta: De 719 maneiras.

37. Considere todas as palavras de 5 letras, com ou sem significado, que podem ser escritas com **A**, **B**, **R**, **O** e **D**, sem que haja repetição de letra.

a) Quantas são essas palavras? Resposta: 120 palavras.

b) Determine quantas dessas palavras começam com a letra **R**. Resposta: 24 palavras.

c) Quantas dessas palavras terminam em vogal? Resposta: 48 palavras.

38. Considerando todas as permutações dos algarismos do número 714 853, responda às questões.

a) Qual é o maior número obtido? E o menor? Resposta: 875 431; 134 578

b) Quantos desses números são maiores do que 478 135? E menores do que 458 713? Resposta: 389 números; 310 números.

39. Em um município, a fiscalização sanitária inspeciona mensalmente uma única vez cada um dos quatro frigoríficos locais. A fim de surpreender os frigoríficos, mensalmente os fiscais sanitários alteram a ordem em que as inspeções são realizadas. Durante quantos meses os fiscais podem realizar esse procedimento sem que haja repetição na ordem dos frigoríficos inspecionados? Resposta: 24 meses.

40. Ao ordenar alfabeticamente em uma lista todos os anagramas da palavra PERMUTA, qual é a posição dessa palavra na lista? Resposta: 2 340ª

41. Você verificou, na abertura deste capítulo, um pouco sobre as superpermutações, ou seja, grandes sequências que garantem que a ordem desejada ocorra.

Em um jogo, temos caixas vermelhas, amarelas e pretas. As letras G, O e L estão escritas em fichas, colocadas cada uma em uma das caixas coloridas, e as caixas de mesma cor têm sempre a mesma letra. Em uma partida, um jogador tem de formar a palavra GOL organizando uma sequência de caixas sem saber qual letra a caixa contém. Qual é a menor sequência de caixas que o jogador deve organizar para garantir que a palavra GOL seja formada? Essa sequência tem quantas caixas?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Permutação com repetição

Estudamos que o total de permutações simples de n elementos distintos é dado por $P_n = n!$. Com esse resultado, podemos calcular, por exemplo, a quantidade de anagramas de palavras que não possuem letras repetidas. No caso da palavra HOSPITAL, temos 40 320 anagramas, pois $P_8 = 8! = 40\,320$.

E como podemos calcular a quantidade de permutações de n elementos quando alguns deles se repetem?

Para responder a essa pergunta, vamos calcular a quantidade de anagramas da palavra PESSOAS. Caso essa palavra não tivesse letras repetidas, teríamos 7! anagramas. Porém, ela possui três letras **S** repetidas, que, ao serem permutadas entre si, dão origem a anagramas iguais. Logo, a palavra PESSOAS possui menos de 7! anagramas.

No esquema, podemos verificar que, ao permutar as letras **S**, obtém-se um mesmo anagrama.



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Na palavra PESSOAS a letra **S** se repete três vezes. Isso faz com que em nossa contagem de 7! tenhamos contado o mesmo anagrama 3! vezes, pois há 3! modos de trocar as letras **S** entre si. Assim, o total de anagramas dessa palavra é:

$$\frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 840$$

Portanto, a palavra PESSOAS possui 840 anagramas.

A quantidade de permutações de n elementos com repetições, dos quais n_1, n_2, ..., n_k são as quantidades dos diferentes elementos, e $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, é:

$$P_n^{(n_1, n_2, \ldots, n_k)} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

Exemplos

a) Na palavra TATU, a letra **T** se repete duas vezes. Então, essa palavra tem 12 anagramas, pois:

$$P_4^{(2, 1, 1)} = \frac{4!}{2!1!1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot 1 \cdot 1} = 12$$

Observação

Temos:

$$P_4^{(2, 1, 1)} = P_4^{(2)} = \frac{4!}{2!} = 12$$

b) Na palavra CARROSSÉIS, a letra **R** se repete duas vezes e a letra **S**, três vezes. Então, essa palavra tem 302 400 anagramas, pois:

$$P_{10}^{(2, 3, 1, 1, 1, 1, 1)} = P_{10}^{(2, 3)} = \frac{10!}{2!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} = 302\,400$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R8. Considerando os anagramas da palavra MATEMÁTICA, determine:

a) a quantidade total de anagramas.

b) quantos começam com **A**.

Resolução

a) A palavra MATEMÁTICA tem 10 letras, sendo 3 letras **A**, 2 letras **M**, 2 letras **T**, 1 letra **E**, 1 letra **I** e 1 letra **C**.

$$P_{10}^{(3, 2, 2)} = \frac{10!}{3!2!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{604\,800}{4} = 151\,200$$

Portanto, a quantidade total é 151 200 anagramas.

b) Fixando a primeira letra, sobram 9 letras para permutar, sendo 2 letras **A**, 2 letras **M**, 2 letras **T**, 1 letra **E**, 1 letra **I** e 1 letra **C**.

$$P_{9}^{(2, 2, 2)} = \frac{9!}{2!2!2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{181\,440}{4} = 45\,360$$

Portanto, 45 360 anagramas começam com **A**.

R9. No conjunto dos números naturais, quantas soluções tem a equação $a + b + c = 7$?

Resolução

Sendo a, b e c números naturais, podemos considerar que as soluções da equação correspondem às maneiras pelas quais podemos separar 7 elementos em 3 partes inteiras. Assim, representando por "bolinhas" esses elementos e separando-os por "barras", verificamos, por exemplo, que:

•• | ••• | •• corresponde à solução (2, 3, 2).

| | ••••••• corresponde à solução (0, 0, 7).

Dessa maneira, a quantidade de soluções naturais da equação é dada pela quantidade de permutação das 7 "bolinhas" e das 2 "barrinhas", com 7 e 2 repetições.

$$P_{9}^{(7, 2)} = \frac{9!}{7!2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 2 \cdot 1} = \frac{72}{2} = 36$$

Portanto, a equação tem 36 soluções.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Professor, professora: A tarefa **43** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação de seu repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

42. Determine quantos anagramas tem cada palavra.

a) MONITOR
Resposta: 2 520 anagramas.

b) AMERICANA
Resposta: 60 480 anagramas.

c) LIBERTADOR
Resposta: 1 814 400 anagramas.

d) CALCULADORA
Resposta: 1 663 200 anagramas.

43. Elabore um problema que, para ser respondido, seja necessário usar a permutação $P_{8}^{(4, 2, 2)}$ e o entregue a um colega para que ele o resolva. Em seguida, verifique se a resposta que ele obteve está correta. Resposta pessoal. A resposta depende de cada problema elaborado pelos estudantes.

44. Sendo x, y, z e w números naturais, quantas soluções possui a equação $x + y + z + w = 6$?
Resposta: 84 soluções.

45. Permutando os algarismos do número 125 612, quantos números:

a) são obtidos?
Resposta: 180 números.

b) pares são obtidos?
Resposta: 90 números.

c) menores do que 400 000 são obtidos?
Resposta: 120 números.

46. Ao ordenar alfabeticamente todos os anagramas da palavra CÉLULA, qual deles ocupará a 301ª posição? Resposta: UACÉLL

47. (Enem, 2005) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra **A** é representada por:



TATIANE GALHEIRO/ ARQUIVO DA EDITORA/ ENEM 2005

A quantidade total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é:

a) 12 **b)** 31 **c)** 36 **d)** 63 **e)** 720

Resposta: Alternativa **d.**

Combinação simples

Um *pizzaiolo* tem à sua disposição ingredientes para fazer *pizzas* nos seguintes sabores.


Atum
(A)


Queijo
(Q)


Champignon
(C)


Milho
(M)


Portuguesa
(P)

Quantas são as possibilidades de *pizzas* que podem ser feitas com três sabores diferentes?

Nesse caso, escolher os sabores queijo, *champignon* e milho $\{Q, C, M\}$ é o mesmo que escolher *champignon*, queijo e milho $\{C, Q, M\}$, ou seja, a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades.

Assim, podemos obter as possibilidades de *pizzas* que podem ser montadas construindo os **subconjuntos** ou **agrupamentos não ordenados** de três elementos do conjunto de sabores disponíveis, ou seja, $\{A, Q, C, M, P\}$. Construindo os agrupamentos, temos:

$\{A, Q, C\}$ $\{A, Q, M\}$ $\{A, Q, P\}$ $\{A, C, M\}$ $\{A, C, P\}$
$\{A, M, P\}$ $\{Q, C, M\}$ $\{Q, C, P\}$ $\{Q, M, P\}$ $\{C, M, P\}$

Podemos verificar que esses agrupamentos se diferenciam pela natureza de seus elementos, e não pela ordem em que são combinados. Cada uma dessas possibilidades corresponde ao que chamamos uma **combinação** de 5 sabores tomados 3 a 3, que indicamos por $C_{5,3}$. Como são 10 combinações ao todo, temos $C_{5,3} = 10$.

Permutando de todas as maneiras possíveis os 3 elementos de cada uma dessas combinações, obtemos 6 arranjos, ou seja, 3! arranjos. No caso da combinação $\{A, Q, C\}$, temos os seguintes arranjos: (A, Q, C), (A, C, Q), (Q, A, C), (Q, C, A), (C, A, Q) e (C, Q, A).

Podemos afirmar, então, que multiplicando por 3! o total de combinações de 5 elementos, tomados 3 a 3, obtemos a quantidade de arranjos de 5 elementos, tomados 3 a 3, ou seja:

$$C_{5,3} \cdot 3! = A_{5,3}$$

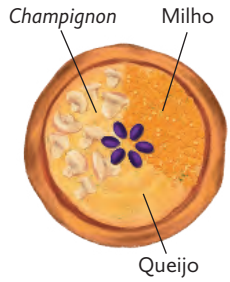
Para $n \geq p$, a fórmula para o cálculo de combinações é dada por:

$$C_{n,p} \cdot p! = A_{n,p} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Combinação simples de n elementos distintos, tomados p a p, com $n, p \in \mathbb{N}$ e $n \geq p$, é todo subconjunto ou agrupamento não ordenado formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados.

A quantidade total de combinações é indicada por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$, e calculada por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ ou } C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$



ILUSTRAÇÕES: LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolvendo por etapas

Abel e Bianca fazem parte de uma turma com um total de 20 estudantes. Para representá-la em uma reunião, a turma precisa selecionar quatro de seus membros para compor uma comissão especial. Quantas comissões diferentes são possíveis de obter com a participação de pelo menos um dos dois estudantes citados?

A. Compreendendo o problema

1. O que se pede no problema?

A quantidade total de comissões possíveis de obter com a participação de pelo menos um dos dois estudantes: Abel e Bianca.

2. Quais são os dados apresentados no problema?

Quantidade total de estudantes da turma; quantidade de pessoas necessárias para compor a comissão; e a necessidade de que Abel e/ou Bianca faça(m) parte da comissão.

B. Organizando as ideias e elaborando um plano

1. Registrando um possível plano.

Devemos separar a contagem em casos mais simples antes de adicioná-los. Primeiro, calculamos a quantidade de comissões das quais Abel faça parte e Bianca não. Depois, calculamos a quantidade de comissões das quais Bianca faça parte e Abel não. Em seguida, calculamos as comissões das quais tanto Abel quanto Bianca façam parte. Ao fim, adicionamos os resultados obtidos em cada um dos três casos, obtendo, assim, a quantidade total de comissões das quais pelo menos um dos dois estudantes, Abel e Bianca, seja membro.

2. Escolhendo as notações.

A: quantidade de comissões com a participação de Abel, mas não de Bianca.

B: quantidade de comissões com a participação de Bianca, mas não de Abel.

AB: quantidade de comissões com a participação tanto de Abel quanto de Bianca.

C. Executando o plano

Em todos os casos das contagens que vamos fazer, trata-se de escolher p elementos dentro de um conjunto maior de n elementos, de maneira que a ordem dos elementos não importa. Assim, a contagem se dará por meio de uma combinação simples.

Passo 1

Inicialmente, vamos calcular a quantidade de comissões com a participação de Abel, mas não de Bianca.

A sala tem 20 estudantes, mas como a participação de Abel e a não participação de Bianca já estão predeterminadas, a quantidade de estudantes que são possíveis integrantes das demais vagas da comissão se reduz para 18. Das quatro vagas disponíveis, uma com certeza já está ocupada por Abel, restando, portanto, três vagas para os demais estudantes. Assim:

$$A = C_{18,\,3} = \frac{18!}{3!\,(18-3)!} = \frac{18!}{3!15!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 17 \cdot 16 = 816$$

Passo 2

Analogamente ao que foi feito no **Passo 1**, a quantidade de comissões possíveis com a participação de Bianca, mas não de Abel, também é uma combinação de 18 elementos tomados 3 a 3. Logo:

$$B = C_{18,\,3} = 816$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Passo 3

No caso da contagem das comissões das quais tanto Abel quanto Bianca façam parte, o total de candidatos para as demais vagas permanece sendo 18, mas, nesse caso, as vagas ainda disponíveis são apenas duas, uma vez que as outras duas já estão ocupadas por Abel e Bianca. Assim:

$$AB = C_{18,\,2} = \frac{18!}{2!\,(18-2)!} = \frac{18!}{2!16!} = \frac{18 \cdot 17}{2 \cdot 1} = 9 \cdot 17 = 153$$

Passo 4

Pela maneira como separamos os casos, nenhuma possibilidade de comissão pode ter sido contada mais de uma vez, isto é, não há como uma possibilidade contada em A ter sido contada também em B ou AB, e vice-versa. Assim, o total de comissões que podem ser formadas é dado por:

$$A + B + AB = 816 + 816 + 153 = 1\,785$$

Portanto, é possível formar exatamente 1 785 comissões diferentes com a participação de ambos ou de apenas um dos dois.

D. Verificando a solução obtida

Outra maneira de calcular a quantidade de possibilidades seria, primeiro, contar todas as comissões possíveis, sem nos preocuparmos se Abel ou Bianca fazem parte delas ou não e, desse total, subtrair a quantidade de comissões das quais nem Abel nem Bianca sejam membros. O resultado obtido será a quantidade de comissões em que pelo menos um dos dois faça parte.

O total de comissões, independentemente da participação ou não de Abel ou Bianca, é uma combinação de 20 elementos tomados 4 a 4, ou seja:

$$C_{20,\,4} = \frac{20!}{4!\,(20-4)!} = \frac{20!}{4!16!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 17 = 4\,845$$

A quantidade de comissões das quais nem Abel nem Bianca fazem parte é uma combinação de 18 elementos tomados 4 a 4, ou seja:

$$C_{18,\,4} = \frac{18!}{4!\,(18-4)!} = \frac{18!}{4!14!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 17 \cdot 4 \cdot 15 = 3\,060$$

Assim, o total de comissões com a participação de Abel e/ou Bianca é, de fato, dado por:

$$C_{20,\,4} - C_{18,\,4} = 4\,845 - 3\,060 = 1\,785$$

Observação

Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de algumas tarefas semelhantes propostas na seção **Exercícios e problemas** deste tópico.

Agora é você quem resolve!

1. Leia o problema.

Em uma sala com 15 estudantes, deseja-se formar uma equipe de xadrez constituída de quatro membros, e necessariamente pelo menos uma das vagas da equipe deve ser preenchida por um estudante que tirou nota 10 em todas as provas. Sabendo que na sala apenas Arlindo e Beatriz tiraram 10 em todas as provas, de quantas maneiras diferentes é possível escolher os membros dessa equipe?

2. É possível resolver o problema utilizando, com algumas adequações, o plano apresentado nesta seção? Qual é a resposta desse problema? Respostas no final do **Livro do Estudante**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R10. Utilizando a combinação simples, mostre que a fórmula para calcular a quantidade de diagonais D de um polígono convexo de n lados é $D = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

Dica

Lembre-se de que um polígono é convexo quando todo segmento de reta que liga dois pontos quaisquer dele está inteiramente contido nele.

Resolução

As combinações dos n vértices desse polígono, tomados 2 a 2, representam todos os lados e diagonais do polígono. Como queremos apenas as diagonais, subtraímos do total dessas combinações a quantidade de segmentos que formam os lados do polígono, ou seja:

$$D = C_{n,2} - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{(n-2)!}} - n =$$

$$= \frac{n^2 - n}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Portanto, a quantidade de diagonais de um polígono convexo de n lados é dado por $D = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

R11. Uma sala de aula tem 18 meninas e 14 meninos. De quantas maneiras o professor pode formar grupos de 5 estudantes, sendo 3 meninas e 2 meninos?

Resolução

Os grupos diferenciam-se pelos estudantes, e não pela ordem em que são agrupados, logo, cada grupo é uma combinação de 5 estudantes, em que a escolha das meninas é dada por $C_{18,3}$ e a dos meninos, por $C_{14,2}$. Então, o total de grupos é dado por:

$$C_{18,3} \cdot C_{14,2} = \frac{18!}{3!\,(18-3)!} \cdot \frac{14!}{2!\,(14-2)!} = \frac{18!}{3!15!} \cdot \frac{14!}{2!12!} =$$

$$= \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot \cancel{15!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{15!}} \cdot \frac{14 \cdot 13 \cdot \cancel{12!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{12!}} = \frac{891\,072}{12} = 74\,256$$

Portanto, o professor pode formar os grupos de 74 256 maneiras.

R12. Mostre que $C_{n,p} = C_{n,n-p}$.

Resolução

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n!}{(n-p)!\underbrace{\left[n-(n-p)\right]}_{p}!} = C_{n,n-p}$$

Observação

Essa propriedade é conhecida por igualdade das combinações complementares e pode ser utilizada para simplificar alguns cálculos de combinações.

R13. Em uma confraternização de Ano-Novo, após a meia-noite, cada pessoa abraçou todas as outras uma única vez. Sabendo que ocorreram 153 abraços no total, determine a quantidade de pessoas presentes.

Resolução

A pessoa **A** abraçar a **B** é o mesmo que a pessoa **B** abraçar a **A**. Assim, sendo n a quantidade de pessoas presentes, temos:

$$C_{n,2} = 153 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 153 \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{(n-2)!}} = 153 \Rightarrow n^2 - n - 306 = 0$$

Logo, $n_1 = 18$ ou $n_2 = -17$ (não convém).

Portanto, 18 pessoas estavam presentes na confraternização.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

49. d) Resposta: $\frac{n-1}{p-1}$

48. Efetue os cálculos.

a) $C_{6,\,2}$ Resposta: 15 b) $C_{9,\,5}$ Resposta: 126 c) $C_{15,\,10}$ Resposta: 3 003 d) $C_{12,\,6} + C_{8,\,2}$ Resposta: 952 e) $C_{8,\,4} - C_{8,\,3}$ Resposta: 14 f) $\frac{C_{19,\,11}}{C_{19,\,8}}$ Resposta: 1

49. Simplifique as expressões.

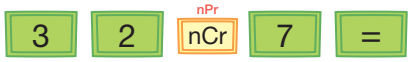
a) $\frac{A_{n,\,p}}{C_{n,\,p}}$ Resposta: $p!$ b) $C_{n,\,n-1} \cdot C_{n-2,\,n-3}$ Resposta: $n(n-2)$ c) $C_{n-1,\,p-1} \cdot \frac{(n-p)!(p+1)!}{n!}$ Resposta: $\frac{p(p+1)}{n}$ d) $\frac{C_{n-1,\,p-1}}{C_{n-2,\,p-2}}$

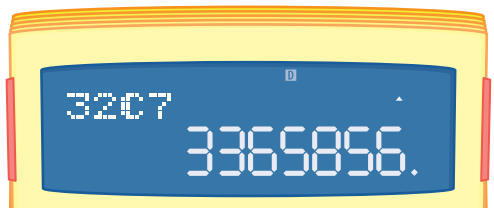
50. (UEA, 2023) Um assinante de TV paga selecionou 6 filmes para assistir, porém sem ordem de preferência. Sabendo que em um domingo esse assinante assistirá a 2 desses filmes selecionados, o número de maneiras distintas de ele fazer essa escolha é: Resposta: Alternativa **d**.

a) 10 b) 30 c) 12 d) 15 e) 24

51. Vamos calcular $C_{32,\,7}$ usando uma calculadora científica. Para isso, registramos o número 32 e, em seguida, digitamos a tecla nPr nCr. Por fim, inserimos o número 7 e digitamos a tecla =, obtendo o resultado.

Professor, professora: Diga aos estudantes que esse procedimento pode variar dependendo do modelo da calculadora. Além disso, explique-lhes que nCr corresponde à combinação de n elementos tomados r a r.





SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Utilizando uma calculadora científica e procedendo de maneira semelhante à apresentada, efetue os cálculos.

a) $C_{25,\,4}$ Resposta: 12 650 b) $C_{25,\,9}$ Resposta: 2 042 975 c) $C_{32,\,7}$ Resposta: 3 365 856 d) $C_{29,\,20}$ Resposta: 10 015 005 e) $C_{80,\,75}$ Resposta: 24 040 016 f) $C_{100,\,96}$ Resposta: 3 921 225

52. Utilizando o método de tentativas, determine o valor de n, tal que $C_{n,\,3} = 455$. Resposta: 15

53. Uma escola de inglês vai sortear 5 bolsas de estudos. Sabendo que participarão desse sorteio 50 pessoas, determine quantos grupos diferentes podem ser sorteados. Para isso, utilize uma calculadora.
Resposta: 2 118 760 grupos diferentes.

54. Uma papelaria disponibiliza para venda 8 tipos de caderno, 7 tipos de lápis e 5 tipos de caneta. Utilizando uma calculadora, determine de quantas maneiras distintas é possível montar um *kit* escolar, nessa papelaria, composto de 5 tipos de caderno, 4 tipos de lápis e 2 tipos de caneta. Resposta: De 19 600 maneiras.

55. Marlene tem uma coleção de 18 moedas. Ela vai expor 7 dessas moedas em um evento. Utilize uma calculadora para determinar de quantas maneiras distintas ela pode formar o conjunto de moedas para a exposição.
Resposta: De 31 824 maneiras.

56. Para a composição de um simulado do Enem, certo professor escolherá 25 questões de um banco de dados contendo 60 questões. O total de maneiras distintas de compor esse simulado, não se diferenciando a ordem das questões, é dado por: Resposta: Alternativa **a**.

a) $\frac{A_{60,\,25}}{25!}$. b) $\frac{C_{60,\,25}}{25!}$. c) $\frac{A_{60,\,25}}{C_{60,\,25}}$. d) $\frac{A_{60,\,25}}{35!}$. e) $\frac{C_{60,\,25}}{35!}$.

57. (Fuvest, 2023) Um professor precisa elaborar uma prova multidisciplinar que consta de duas questões de Matemática e seis de Física. Ele deve escolher questões de um banco de dados que contém três questões de Matemática e oito de Física. O número de provas distintas possíveis, sem levar em conta a ordem em que as questões aparecem, é: Resposta: Alternativa **e**.

a) 42 b) 54 c) 62 d) 72 e) 84

58. João, Mara e outros 8 amigos vão participar de um torneio de futsal. Para formar o time que começará jogando a 1ª partida, eles precisam selecionar, entre o grupo de amigos, 5 pessoas. Quantos times diferentes será possível formar com a participação de pelo menos um dos amigos citados? Resposta: 196 times diferentes.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

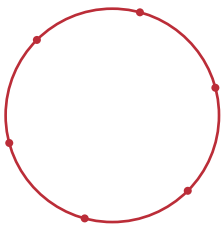
Professor, professora: Ao realizar a tarefa **66**, caso haja interesse dos estudantes, oriente-os a realizar uma pesquisa a fim de conhecerem as escolhas feitas pelo comitê nesse concurso.

59. Em certo corredor de um edifício, há 25 lâmpadas com interruptores individuais. De quantas maneiras diferentes esse corredor pode ser iluminado por 16 dessas lâmpadas?
Resposta: De 2 042 975 maneiras diferentes.

60. Resolva a equação apresentada a seguir.
Resposta: $x = 4$

$$C_{x,\,2} = 6$$

61. Sobre uma circunferência são indicados 6 pontos distintos, conforme a figura.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Quantos segmentos de reta com extremidades em dois desses pontos podem ser traçados? Resposta: 15 segmentos.

b) Tendo três desses pontos como vértice, quantos triângulos podem ser formados?
Resposta: 20 triângulos.

62. Duas pessoas de um grupo serão escolhidas para representá-lo. Sabendo que essa escolha pode ser feita de 630 maneiras distintas, quantas pessoas formam esse grupo? Resposta: 36 pessoas.

63. Para tratar de certo paciente, um hospital constituirá uma junta médica considerando médicos que lá trabalham. Se essa junta for composta de 5 médicos, o hospital terá 15 504 opções de formação da junta. De quantas maneiras distintas essa junta pode ser formada se ela for composta de 6 médicos? Resposta: De 38 760 maneiras distintas.

64. Em uma sala de aula do Ensino Médio, há 15 estudantes que tocam algum instrumento musical. Com o total de estudantes dessa turma é possível formar 30 030 comissões distintas, de 5 pessoas cada, e dessas, exatamente 3 tocam algum instrumento musical. Quantos estudantes há nessa sala de aula? Resposta: 27 estudantes.

65. (UFMS, 2022) Para a composição da comissão de formatura de Veterinária de 2021 da UFMS, há 8 estudantes, sendo 5 homens e 3 mulheres. A comissão deverá ser composta por 6 estudantes. Se 2 mulheres são de caráter obrigatório estar na comissão, o número de possibilidades para a composição de formatura é: Resposta: Alternativa **c**.

a) 5.
b) 8.
c) 25.
d) 56.
e) 120.

Professor, professora: Diga aos estudantes que utilizem o método de tentativas para resolver a tarefa **63**.

66. A Nova Zelândia é um país localizado na Oceania e uma antiga colônia britânica. Em 2014, a fim de trocar a bandeira utilizada até então, que remetia ao seu passado colonial, o governo neozelandês lançou um concurso para eleger uma nova bandeira para o país. Ao final da primeira fase desse concurso, foram selecionadas 40 bandeiras, e dessas, quatro seriam escolhidas finalistas por um comitê.

De quantas maneiras diferentes era possível compor o conjunto das quatro bandeiras finalistas nesse concurso? Utilize uma calculadora para efetuar os cálculos. Resposta: De 91 390 maneiras diferentes.

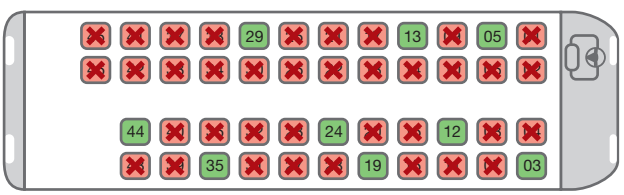
67. Os amigos cadastrados na rede social de certa pessoa estão agrupados da seguinte maneira.

Cadastros na rede social

Grupo	Quantidade de amigos
Trabalho	12
Escola	10
Família	9
Outros	15

Sabendo que essa pessoa deseja enviar uma mensagem para 10 amigos, sendo 3 do grupo Trabalho, 3 do grupo Escola, 3 do grupo Família e 1 do grupo Outros, de quantas maneiras diferentes essa pessoa pode enviar a mensagem?
Resposta: De 33 264 000 maneiras diferentes.

68. Um grupo de sete amigos decidiu passar o fim de ano no litoral. Ao consultar um aplicativo que comercializa passagens rodoviárias, eles perceberam que quase não havia mais assentos disponíveis para a data escolhida.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Dica

Na figura disponibilizada pelo aplicativo, os assentos ocupados estão marcados com um X e os disponíveis são os mostrados em verde.

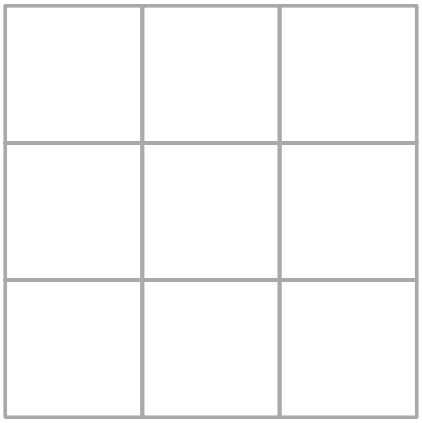
Qual é a quantidade de maneiras distintas para acomodar o grupo de amigos nesse ônibus?

a) $\frac{9!}{2!}$
b) $7!$
c) $7! \cdot \frac{9!}{2!}$
d) $5! \cdot 4!$
e) $\frac{5!}{4!} \cdot \frac{4!}{3!}$

Resposta: Alternativa **a**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

69. Uma pessoa deseja colorir de verde 3 dos 9 quadradinhos apresentados na figura a seguir.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

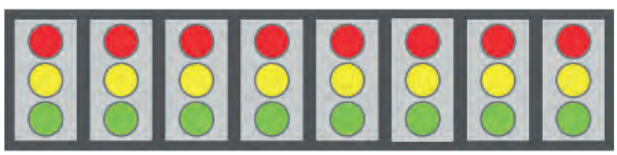
De quantas maneiras distintas essa pessoa poderá realizar essa pintura?
Resposta: De 84 maneiras distintas.

70. Ao ser infectada por certo vírus, uma pessoa pode desencadear 7 tipos de sintomas diferentes. Os órgãos de saúde pública definiram que, se um indivíduo apresentasse 4 ou mais desses sintomas, seria submetido a tratamento médico preliminar enquanto os resultados dos exames não estivessem prontos.

De quantas maneiras diferentes um indivíduo pode manifestar sintomas suficientes para que seja encaminhado a tratamento médico preliminar?
Resposta: De 64 maneiras diferentes.

71. Uma fábrica produz 10 tipos diferentes de peças que, para serem transportadas, são acondicionadas em caixas com 6 peças. Sabendo que, por motivos técnicos, entre os 10 tipos de peças, apenas 2 não podem ser acondicionados em uma mesma caixa, de quantas maneiras diferentes pode-se fazer o acondicionamento das peças nas caixas? Resposta: De 140 maneiras diferentes.

72. (UERJ, 2013) Um sistema luminoso, constituído de oito módulos idênticos, foi montado para emitir mensagens em código. Cada módulo possui três lâmpadas de cores diferentes – vermelha, amarela e verde. Observe a figura:



UERJ 2013

Considere as seguintes informações:

- cada módulo pode acender apenas uma lâmpada por vez;
- qualquer mensagem é configurada pelo acendimento simultâneo de três lâmpadas vermelhas, duas verdes e uma amarela, permanecendo dois módulos com as três lâmpadas apagadas;
- duas mensagens são diferentes quando pelo menos uma das posições dessas cores acesas é diferente.

Calcule quantas mensagens distintas esse sistema pode emitir. Resposta: 1680 mensagens.

73. (Unesp, 2014) Um professor, ao elaborar uma prova composta de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas cada e apenas uma correta, deseja que haja um equilíbrio no número de alternativas corretas, a serem assinaladas com X na folha de respostas. Isto é, ele deseja que duas questões sejam assinaladas com a alternativa A, duas com a B, e assim por diante, como mostra o modelo.

Modelo de folha de resposta (gabarito)

	A	B	C	D	E
01	X				
02			X		
03		X			
04				X	
05	X				
06					X
07				X	
08					X
09		X			
10			X		

UNESP 2014

Nessas condições, a quantidade de folhas de respostas diferentes, com a letra X disposta nas alternativas corretas, será Resposta: Alternativa **b**.

a) 302 400.
b) 113 400.
c) 226 800.
d) 181 440.
e) 604 800.

Professor, professora: A tarefa **74** propõe aos estudantes que elaborem uma questão utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de os estudantes elaborarem a questão, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tópico.

74. Elabore uma questão em que seja necessário utilizar combinação simples para obter a solução. Depois, dê a questão que você escreveu para um colega resolver e, na sequência, verifiquem se a resposta está correta.
Resposta pessoal. A resposta depende de cada questão elaborada pelos estudantes.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O profissional de logística

Diversos profissionais utilizam a análise combinatória em suas atribuições, e um deles é o profissional de logística. Ele é responsável pela organização operacional de uma empresa. Sua função consiste em gerenciar e otimizar processos, da produção à distribuição. Compra, armazenamento, transporte e entrega são alguns dos setores de sua atuação. Esses setores são organizados em atividades primárias e atividades secundárias.

Na logística, a análise combinatória é usada para antecipar resultados e, assim, atender a demandas necessárias dentro dos prazos estimados, com economia e segurança. Por isso, é importante que as empresas contem com profissionais especializados para organizar corretamente seus processos logísticos.

A logística de transporte é uma das etapas do processo em que são exigidas, do profissional de logística, eficiência e agilidade no serviço, pois envolve a análise de fatores, como veículos mais adequados, as condições de segurança da carga transportada, as melhores rotas para reduzir a medida do tempo e os custos do deslocamento, entre outros.

O crescimento da demanda por profissionais de logística tem aumentado a oferta no mercado de trabalho, surgindo oportunidades em centros de distribuição, portos, aeroportos, transportadoras, empresas de encomendas, indústrias etc.

GORODENKOFF/SHUTTERSTOCK



Profissional de logística supervisionando o carregamento de carga.

PARA EXPANDIR

Que tal conhecer o local de trabalho de um profissional de logística? Nessa visita, aproveite para conhecer mais sobre o dia a dia desse profissional.

Para atuar na área, é desejável que o profissional tenha habilidades, como boa escrita, boa comunicação, capacidade de relacionamento e de liderança de equipe, visão global, atualização do mercado, além de conhecimento em informática, matemática e certas legislações. 2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes compreendam, por meio da pesquisa, que a rotina do profissional de logística é bastante dinâmica e suscetível a situações inesperadas e de imprevistos, o que exige flexibilidade nas decisões operacionais mesmo diante de urgências.

Observação

Para se tornar um profissional de logística, é possível cursar graduação em Logística, com duração média de quatro anos. Outra possibilidade são os cursos de menor duração, como os técnicos e tecnólogos, oferecidos por instituições de ensino públicas e privadas.

Atividades

1. Resposta pessoal. Incentive os estudantes a compartilhar seus conhecimentos sobre a profissão de logística. Espera-se que eles percebam a importância da profissão para a organização das etapas operacionais de uma empresa.

Anote as respostas no caderno.

1. Você já conhecia a profissão de logística? Qual é a importância desse tipo de trabalho? Converse com os colegas sobre o assunto.

2. Pesquise na internet a rotina do profissional de logística e como são organizadas as atividades consideradas primárias e secundárias nessa profissão. Compartilhe com os colegas as informações obtidas.

Professor, professora: Verifique se os estudantes identificam que as atividades consideradas primárias são as principais atividades do processo logístico, sendo elas o transporte, a gestão de estoque e o processamento de pedidos. Já as atividades secundárias, conhecidas como atividades de apoio, são: armazenamento, manuseio de materiais, embalagem dos produtos, programação dos produtos e manutenção de informação.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Binômio de Newton

Analise a seguir o desenvolvimento de potências da forma $(x + y)^n$, com $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, para alguns valores de n.

Para $n = 0$, temos: $(x + y)^0 = 1$.

Para $n = 1$, temos: $(x + y)^1 = x + y$.

Para $n = 2$, temos: $(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x^2 + 2xy + y^2$.

Para $n = 3$, temos:

$$(x+y)^3 = (x+y) \cdot (x+y)^2 = (x+y) \cdot (x^2 + 2xy + y^2) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Para $n = 4$, temos:

$$(x+y)^4 = (x+y) \cdot (x+y)^3 = (x+y) \cdot (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) =$$
$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Seguindo esse mesmo raciocínio, para $n = 5$, teremos:

$$(x + y)^5 = (x + y) \cdot (x + y)^4$$

De modo geral, para $n > 0$, temos:

$$(x + y)^n = (x + y) \cdot (x + y)^{n-1}$$

Dependendo do valor de n, esse método de calcular potências pode ser muito trabalhoso. Vamos estudar uma fórmula que permite desenvolver $(x + y)^n$ de maneira menos trabalhosa, ou obter qualquer de seus termos sem efetuar todo o seu desenvolvimento.

Observação

Cada uma dessas potências é chamada **Binômio de Newton**.

Triângulo de Pascal

Sabemos que, em uma combinação simples, a ordem dos elementos não importa, e a quantidade total de combinações simples pode ser indicada por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$, tal que:

$$C_{n,p} = C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ com } n \geq p$$

O número $\binom{n}{p}$ é denominado **coeficiente binomial** ou **número binomial**.

Podemos organizar os números binomiais em uma estrutura triangular, conhecida como **Triângulo de Pascal**.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$
$$\cdots$$

De acordo com as partes desse triângulo, notamos que os números binomiais que possuem mesmo:

- n estão dispostos na mesma linha;
- p estão dispostos na mesma coluna.

Observação

No estudo do Binômio de Newton, para simplificar a escrita, utilizaremos a notação $\binom{n}{p}$ (lê-se: binomial de n sobre p).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O Triângulo de Pascal também pode ser representado pelos valores dos números binomiais. Substituindo os números binomiais por seus valores, temos:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
...

Vamos destacar e exemplificar algumas propriedades do Triângulo de Pascal.

1ª propriedade: Em uma linha qualquer do Triângulo de Pascal, dois números equidistantes são iguais.

$$C_{n,p} = C_{n,n-p} \Rightarrow \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Professor, professora: A veracidade da igualdade $C_{n,p} = C_{n,n-p}$ foi mostrada na tarefa resolvida **R12**.

$$\underbrace{\binom{5}{0}}_{1}\ \underbrace{\binom{5}{1}}_{5}\ \underbrace{\binom{5}{2}}_{10}\ \underbrace{\binom{5}{3}}_{10}\ \underbrace{\binom{5}{4}}_{5}\ \underbrace{\binom{5}{5}}_{1}$$

2ª propriedade: A partir da 3ª linha, e com exceção do primeiro e do último elemento de cada linha, cada elemento do Triângulo de Pascal é igual à soma do elemento imediatamente superior a ele com o elemento anterior a este.

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}, \text{ para } n \geq 2$$

Exemplos

$$\underbrace{\binom{2}{1} = \binom{1}{1} + \binom{1}{0}}_{2=1+1}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
...

$$\underbrace{\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1}}_{6=3+3}$$

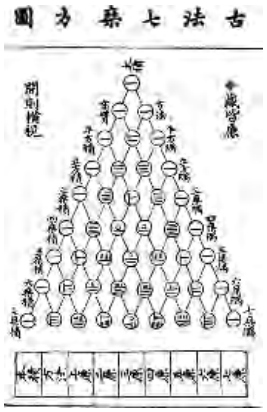
$$\underbrace{\binom{5}{4} = \binom{4}{4} + \binom{4}{3}}_{5=1+4}$$

A igualdade correspondente à 2ª propriedade é conhecida como Relação de Stifel. Ela recebeu esse nome em homenagem a Michael Stifel (1486-1567), comumente apresentado como o maior algebrista alemão do século XVI. Stifel foi um dos vários autores responsáveis por difundir os símbolos + e −.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

Observação

Não apresentaremos a demonstração da 2ª propriedade, porém essa pode ser demonstrada.



BIBLIOTECA BRITÂNICA, LONDRES

Representação do Triângulo de Pascal publicada na China, em 1303.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3ª propriedade: A soma dos elementos de uma linha n qualquer do Triângulo de Pascal é igual a 2^n.

$$\text{Linha } n \rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Observação

A 3ª propriedade será justificada na página **41**.

Exemplos

Linha $0 \rightarrow 1 = 2^0$

Linha $1 \rightarrow 1 + 1 = 2 = 2^1$

Linha $2 \rightarrow 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

Linha $3 \rightarrow 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

Linha $4 \rightarrow 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

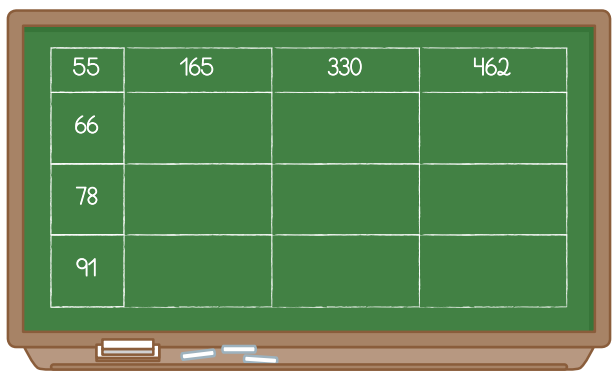
Linha $5 \rightarrow 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$

Linha $6 \rightarrow 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$

...

Exercícios e problemas resolvidos

R14. Um professor elaborou o seguinte quebra-cabeça para seus estudantes.



Dizendo apenas que o quebra-cabeça é parte de um Triângulo de Pascal, o professor pediu aos estudantes que o completassem. Explique um procedimento que os estudantes poderiam utilizar e completar o quebra-cabeça.

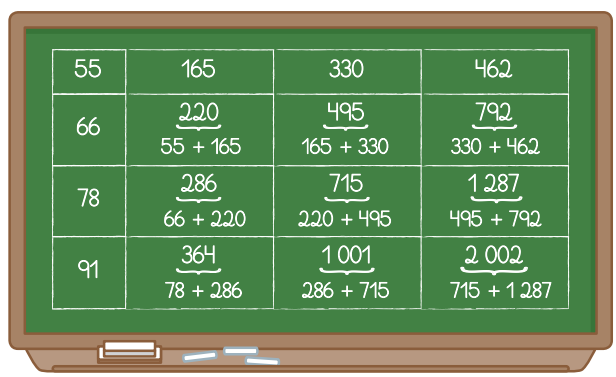
Resolução

Para completar o quebra-cabeça, os estudantes poderiam utilizar a Relação de Stifel.

$$\underbrace{\binom{2}{1} = \binom{1}{1} + \binom{1}{0}}_{2=1+1}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
...

Logo, completando o quebra-cabeça, temos:



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: VINÍCIUS COSTA/ARQUIVO DA EDITORA

R15. Calcule o valor de $\binom{5}{0} + \binom{7}{1} + \binom{8}{8}$.

Resolução

$$\binom{5}{0} + \binom{7}{1} + \binom{8}{8} = \frac{5!}{0!(5-0)!} + \frac{7!}{1!(7-1)!} + \frac{8!}{8!(8-8)!} = \frac{\cancel{5!}}{1 \cdot \cancel{5!}} + \frac{7 \cdot \cancel{6!}}{1 \cdot \cancel{6!}} + \frac{\cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot 1} = 1 + 7 + 1 = 9$$

Professor, professora: Oriente os estudantes a verificar que: $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ e $\binom{n}{n} = 1$.

R16. Em uma lanchonete, o cliente pode escolher até oito opções de frutas para compor sua vitamina. Quantas opções possíveis de vitamina estão disponíveis para o cliente?

Resolução

A ordem em que as frutas são escolhidas não é importante, ou seja, das oito opções de frutas, cada vitamina representa uma combinação, a qual o cliente pode compor com:

- uma fruta: $\binom{8}{1}$ possibilidades.
- duas frutas: $\binom{8}{2}$ possibilidades.
- três frutas: $\binom{8}{3}$ possibilidades.

...

- oito frutas: $\binom{8}{8}$ possibilidades.

Logo, o total de opções é:

$$\binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \cdots + \binom{8}{8} = 2^8 - \binom{8}{0} = 256 - 1 = 255$$

Portanto, estão disponíveis 255 opções de vitaminas.

Observação

Note que $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \cdots + \binom{8}{8} = 2^8 \Rightarrow \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \cdots + \binom{8}{8} = 2^8 - \binom{8}{0}$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

75. Efetue os cálculos.

a) $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5}$ Resposta: 112

b) $\binom{10}{4} + \binom{2}{0} + \binom{8}{3}$ Resposta: 267

c) $\binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \binom{15}{2} + \binom{15}{3} + \cdots + \binom{15}{14} + \binom{15}{15}$ Resposta: 32 768

d) $\binom{6}{2} + \binom{12}{7} + \binom{7}{0}$ Resposta: 808

76. Resolva as equações.

a) $\binom{9}{3} = \binom{x}{6}$ Resposta: $S = \{9\}$

b) $\binom{24}{x} + \binom{24}{12} = \binom{25}{12}$ Resposta: $S = \{11, 13\}$

c) $\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} + \ldots + \binom{x}{x} = 2^{(-x+200)}$ Resposta: $S = \{100\}$

d) $\binom{10}{x}^x = \binom{20}{14} - \binom{20}{6} + 1$ Resposta: $S = \{0, 10\}$

77. Quantos elementos a 8ª linha do Triângulo de Pascal tem? Qual é a soma desses elementos? Resposta: 8 elementos; 256

78. A expressão $\binom{6}{4} + \binom{6}{3} + \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$ corresponde a:

a) $\binom{7}{6}$ b) $\binom{8}{5}$ c) $\binom{6}{5}$ d) $\binom{8}{4}$

Resposta: Alternativa **d**.

Dica

Nesta tarefa, utilize a Relação de Stifel.

79. Resolva a equação.

$\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} + \ldots + \binom{x}{x-1} + \binom{x}{x} = 256$

Resposta: $x = 8$

80. De um grupo de 10 pessoas, deseja-se formar uma comissão com no mínimo 1 e no máximo 10 integrantes. Quantas comissões podem ser formadas? Resposta: 1023 comissões.

81. Qual é o valor de n na expressão $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 4\,095$? Resposta: $n = 12$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Fórmula e termo geral do Binômio de Newton

Anteriormente, estudamos que toda potência da forma $(x + y)^n$, com $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, é chamada Binômio de Newton. São apresentados a seguir o desenvolvimento de alguns Binômios de Newton e como podemos associar os coeficientes de cada termo desses desenvolvimentos com uma das linhas do Triângulo de Pascal.

$(x + y)^0 = 1$	1	$\binom{0}{0}$
$(x + y)^1 = x + y$	1 1	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	1 2 1	$\longrightarrow\ \binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$
$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	1 3 3 1	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$
$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$	1 4 6 4 1	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$

Substituindo esses coeficientes pelos números binomiais correspondentes, temos:

$$(x + y)^0 = \binom{0}{0}x^0y^0$$
$$(x + y)^1 = \binom{1}{0}x^1y^0 + \binom{1}{1}x^0y^1$$
$$(x + y)^2 = \binom{2}{0}x^2y^0 + \binom{2}{1}x^1y^1 + \binom{2}{2}x^0y^2$$
$$(x + y)^3 = \binom{3}{0}x^3y^0 + \binom{3}{1}x^2y^1 + \binom{3}{2}x^1y^2 + \binom{3}{3}x^0y^3$$
$$(x + y)^4 = \binom{4}{0}x^4y^0 + \binom{4}{1}x^3y^1 + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}x^1y^3 + \binom{4}{4}x^0y^4$$

Generalizando, obtemos a fórmula do Binômio de Newton. Tal resultado pode ser demonstrado, porém não o faremos nesta coleção.

Fórmula do Binômio de Newton

A **fórmula do Binômio de Newton** é dada por:

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^ny^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots +$$
$$+ \cdots + \binom{n}{p}x^{n-p}y^p + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-(n-1)}y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0y^n$$

para n e p naturais e x e y reais.

Com base nessa fórmula, destacamos que:

- em qualquer dos termos do desenvolvimento de $(x + y)^n$, a soma dos expoentes de x e y é igual a n.
- o desenvolvimento de $(x + y)^n$ possui $n + 1$ termos.
- os expoentes de x decrescem, de 1 em 1, de n até 0.
- os expoentes de y crescem, de 1 em 1, de 0 até n.
- os elementos da linha n do Triângulo de Pascal correspondem aos coeficientes do desenvolvimento de $(x + y)^n$.

Observação

Se $x = y = 1$, então:

$$(1 + 1)^n = \binom{n}{0}1^n \cdot 1^0 + \binom{n}{1}1^{n-1} \cdot 1^1 + \ldots + \binom{n}{n}1^0 \cdot 1^n$$

Ou seja:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Desse modo, justificamos a 3ª propriedade apresentada na página **39**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Termo geral do Binômio de Newton

Indicando os termos do desenvolvimento de $(x+y)^n$ por $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n, T_{n+1}$, temos:

$$(x+y)^n = \underbrace{\binom{n}{0}x^n y^0}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1}x^{n-1}y^1}_{T_2} + \underbrace{\binom{n}{2}x^{n-2}y^2}_{T_3} + \underbrace{\binom{n}{3}x^{n-3}y^3}_{T_4} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{p}x^{n-p}y^p}_{T_{p+1}} + \ldots +$$

$$+ \underbrace{\binom{n}{n-1}x^{n-(n-1)}y^{n-1}}_{T_n} + \underbrace{\binom{n}{n}x^0 y^n}_{T_{n+1}}$$

Para cada valor de p, com $0 \leq p \leq n$, o termo $\binom{n}{p}x^{n-p}y^p$ ocupa a posição $(p+1)$, ou seja, $T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{n-p}y^p$.

O **termo geral** do Binômio de Newton é dado por:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{n-p}y^p$$

para n e p naturais, com $0 \leq p \leq n$ e x e y reais.

Exercícios e problemas resolvidos

R17. Efetue o desenvolvimento de $(x-2)^5$.

Observação

Note que o binômio $(x-y)^n$ pode ser interpretado por $(x+(-y))^n$.

Resolução

Indicando os termos do desenvolvimento de $(x-2)^5$ por T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 e T_6, temos:

$(x-2)^5 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6$

Em que:

- $T_1 = \underbrace{\binom{5}{0}}_{1}x^5 \cdot (-2)^0 = x^5$
- $T_2 = \underbrace{\binom{5}{1}}_{5}x^4 \cdot (-2)^1 = 5x^4 \cdot (-2) = -10x^4$
- $T_3 = \underbrace{\binom{5}{2}}_{10}x^3 \cdot (-2)^2 = 10x^3 \cdot 4 = 40x^3$
- $T_4 = \underbrace{\binom{5}{3}}_{10}x^2 \cdot (-2)^3 = 10x^2 \cdot (-8) = -80x^2$
- $T_5 = \underbrace{\binom{5}{4}}_{5}x^1 \cdot (-2)^4 = 5x \cdot 16 = 80x$
- $T_6 = \underbrace{\binom{5}{5}}_{1}x^0 \cdot (-2)^5 = (-32) = -32$

Portanto:

$$(x-2)^5 = x^5 + (-10x^4) + 40x^3 + (-80x^2) + 80x + (-32) =$$
$$= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$$

R18. Sabendo que $(x+\alpha)^3 = x^3 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3$, desenvolva $(x+y+z)^3$.

Resolução

Considerando $\alpha = y + z$, temos:

- $\alpha^2 = (y+z)^2 = y^2 + 2yz + z^2$
- $\alpha^3 = (y+z)^3 = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$

Assim:

$$(x+y+z)^3 = (x+\alpha)^3 = x^3 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3 = x^3 + 3x^2(y+z) + 3x(y+z)^2 + (y+z)^3 =$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3x(y^2 + 2yz + z^2) + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 =$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 6xyz + 3xz^2 + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R19. Qual é a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(5x^2 - 2y)^3$?

Resolução

Desenvolvendo o binômio, temos:

$$(5x^2 - 2y)^3 = (5x^2)^3 \cdot (-2y)^0 + 3 \cdot (5x^2)^2 \cdot (-2y) + 3 \cdot 5x^2 \cdot (-2y)^2 + (5x^2)^0 \cdot (-2y)^3$$

Para determinar a soma dos coeficientes dos termos, basta considerarmos $x = y = 1$. Assim, substituindo $x = y = 1$ em $(5x^2 - 2y)^3$, segue que:

$$(5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1)^3 = (5 - 2)^3 = 3^3 = 27$$

Portanto, a soma dos coeficientes dos termos é 27.

R20. No desenvolvimento de $(3x + y)^6$, com expoentes decrescentes de x, determine:

a) o 3º termo.

b) o termo médio (ou central).

c) o termo independente de x.

d) o termo em x^6.

Observação

Uma vez que $(x + y)^n$ pode ser interpretado como $(y + x)^n$, no desenvolvimento do Binômio de Newton sempre que necessário será informado qual termo deve ter expoentes decrescentes (ou crescentes).

Resolução

a) Para o 3º termo, temos $p + 1 = 3 \Rightarrow p = 2$. Logo:

$$T_{2+1} = \underbrace{\binom{6}{2}}_{15}(3x)^{6-2}y^2 = 15 \cdot (3x)^4y^2 = 15 \cdot 81x^4y^2 = 1215x^4y^2$$

b) Como o binômio tem 7 termos, o 4º termo é o termo central. Assim: $p + 1 = 4 \Rightarrow p = 3$. Logo:

$$T_{3+1} = \underbrace{\binom{6}{3}}_{20}(3x)^{6-3}y^3 = 20 \cdot (3x)^3y^3 = 20 \cdot 27x^3y^3 = 540x^3y^3$$

Observação

No desenvolvimento de $(x + y)^n$, com n ímpar, a quantidade de elementos é par. Nesse caso, o binômio possui dois termos centrais.

c) O termo independente de x é aquele em que x^0, ou seja:

$$x^{6-p} = x^0 \Rightarrow 6 - p = 0 \Rightarrow p = 6$$

Utilizando a fórmula do termo geral do Binômio de Newton, temos:

$$T_{6+1} = \underbrace{\binom{6}{6}}_{1}(3x)^{6-6}y^6 = (3x)^0y^6 = y^6$$

d) O termo em x^6 ocorre quando $x^{n-p} = x^6$, ou seja:

$$x^{n-p} = x^6 \Rightarrow x^{6-p} = x^6 \Rightarrow 6 - p = 6 \Rightarrow p = 0$$

Utilizando a fórmula do termo geral do Binômio de Newton, temos:

$$T_{0+1} = \underbrace{\binom{6}{0}}_{1}(3x)^{6-0}y^0 = (3x)^6 = 729x^6$$

Observação

Desenvolvendo o binômio $(3x + y)^6$, temos:
$(3x + y)^6 = 729x^6 + 1458x^5y + 1215x^4y^2 + 540x^3y^3 + 135x^2y^4 + 18xy^5 + y^6$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R21. Determine o valor de k, sabendo que 7 é o coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $(x + k)^8$.

Resolução

O termo em x^5 ocorre quando $x^{n-p} = x^5$, ou seja:

$$x^{n-p} = x^5 \Rightarrow x^{8-p} = x^5 \Rightarrow 8 - p = 5 \Rightarrow p = 3$$

Utilizando a fórmula do termo geral do Binômio de Newton, temos:

$$T_{3+1} = \underbrace{\binom{8}{3}}_{56} x^{8-3}k^3 = 56x^5k^3$$

Como o coeficiente de x^5 é 7, então o termo em x^5 é $7x^5$.

$$7x^5 = 56x^5k^3 \Rightarrow k^3 = \frac{7\cancel{x^5}}{56\cancel{x^5}} \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

82. Desenvolva os binômios. Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) $(x + y)^5$

b) $(2a - b)^4$

c) $\left(2x - \frac{y}{4}\right)^6$

d) $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^4$

e) $\left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{\sqrt{b}}{3}\right)^4$

f) $\left(xy + \frac{z}{3}\right)^6$

83. Determine a soma dos coeficientes dos termos no desenvolvimento dos binômios.

a) $(7a - 6b)^{14}$ Resposta: 1

b) $(3x - 4y)^7$ Resposta: -1

c) $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^9$ Resposta: 0

d) $(-7x + 9y)^8$ Resposta: 256

84. Resolva os cálculos.

a) $\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^5$ Resposta: $220\sqrt{5} - 284\sqrt{3}$

b) $\left(\sqrt{7} + 3\sqrt{5}\right)^4$ Resposta: $3\,964 + 624\sqrt{35}$

c) $\left(1 - \sqrt{2}\right)^{10}$ Resposta: $3\,363 - 2\,378\sqrt{2}$

d) $\left(3 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5$ Resposta: $2\,403 + 981\sqrt{6}$

85. Sabendo que a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento do binômio $\left(\frac{2}{a^5} + \frac{\sqrt{b}}{b}\right)^n$ é 6 561, determine o valor de n. Se necessário, use uma calculadora para efetuar os cálculos. Resposta: $n = 8$

86. Determine a fórmula do termo geral dos binômios. Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) $(9 - a)^7$

b) $\left(3 + \frac{x}{3}\right)^5$

c) $\left(5ab - \frac{c}{7}\right)^9$

d) $\left(\frac{7}{x} + \frac{8y}{3}\right)^6$

87. Qual é o 8º termo do desenvolvimento do binômio $\left(-2x + \frac{1}{3}\right)^{10}$, com expoentes decrescentes de x? Resposta: $-\frac{320x^3}{729}$

88. Determine o 17º termo do desenvolvimento do binômio $(2x - y)^{20}$, com expoentes decrescentes de x. Resposta: $77\,520x^4y^{16}$

89. Determine o termo central no desenvolvimento dos binômios a seguir.

a) $(y^2 + 3)^6$, com expoentes decrescentes de y. Resposta: $540y^6$

b) $\left(a^2 - \frac{b}{a}\right)^8$, com expoentes decrescentes de a. Resposta: $70a^4b^4$

c) $\left(\frac{2}{xy} + \frac{z^3}{5}\right)^{12}$, com expoentes decrescentes de $\frac{1}{xy}$. Resposta: $\frac{59\,136z^{18}}{15\,625x^6y^6}$

90. Calcule, caso exista, o termo independente de x no desenvolvimento de: 90. c) Resposta: Não há termo independente de x.

a) $(x^2 + 3)^6$. Resposta: 729

b) $\left(\frac{3}{x} + 4\right)^5$. Resposta: 1 024

c) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x^3\right)^8$.

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\right)^8$. Resposta: 5 670

91. No desenvolvimento do binômio $\left(x - \frac{2}{y}\right)^{20}$, com expoentes decrescentes de x, qual é o termo em x^{18}? Resposta: $\frac{760x^{18}}{y^2}$

92. Em relação ao desenvolvimento de $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{y}\right)^{12}$, com expoentes decrescentes de x, determine:

a) o 10º termo. Resposta: $\frac{55x^3}{2y^9}$

b) o termo central. Resposta: $\frac{231x^6}{16y^6}$

c) o termo em x^8. Resposta: $\frac{495x^8}{256y^4}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos o princípio aditivo e o princípio multiplicativo da contagem, arranjos, permutações, combinações, Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal. Agora, chegou a hora de refletir sobre o que você aprendeu! Como estratégia de estudos, sugerimos a você que faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

14. Resposta pessoal. A resposta depende do conteúdo escolhido para ser abordado no problema.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

2. A seguir, estão apresentados os principais assuntos estudados neste capítulo. Resposta pessoal.
Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

- Princípio aditivo da contagem.
- Princípio multiplicativo da contagem.
- Fatorial.
- Arranjo simples.
- Permutação simples.
- Permutação com repetição.
- Combinação simples.
- Binômio de Newton.
- Triângulo de Pascal.

Você teve dificuldades em algum deles? Não se recorda de algum desses conceitos? Ficou com dúvidas? Reflita sobre esses questionamentos e, se necessário, retome o que foi estudado.

3. Em quais situações podemos usar o princípio fundamental da contagem?
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

4. Ao lançar uma moeda, pode-se obter cara ou coroa. Construa uma árvore de possibilidades que apresente todos os possíveis resultados no lançamento consecutivo de três moedas.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

5. Qual dos itens a seguir apresenta a definição correta de arranjo simples? Resposta: Alternativa **b**.

a) Arranjo simples de n elementos distintos tomados p a p, com n e p números naturais e $n \geq p$, é todo agrupamento não ordenado formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados.

b) Arranjo simples de n elementos distintos tomados p a p, com n e p números naturais e $n \geq p$, é todo agrupamento ordenado formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados.

6. Escreva um passo a passo que permita calcular a quantidade de arranjos simples de n elementos distintos tomados p a p, com n e p números naturais e $n \geq p$.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

7. Qual estratégia você utilizaria para calcular a quantidade de permutações possíveis de uma palavra sem letras repetidas? E com letras repetidas?
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

8. Suponha que você precise escolher p livros de um total de n livros distintos. Qual estratégia você usaria para determinar o total de maneiras diferentes em que é possível realizar essa escolha? Sugestão de resposta: Calcularia a combinação simples de n elementos tomados p a p.

9. A quantidade total de combinações simples de n elementos distintos, tomados p a p, com n e p naturais e $n \geq p$, é dada por:
Resposta: Alternativa **a**.

a) $C_{n,\,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

b) $C_{n,\,p} = \dfrac{n!}{n!(n-p)!}$.

c) $C_{n,\,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

10. Para calcular $C_{12,\,7}$ usando uma calculadora científica, digitamos, na ordem apresentada:

a) 1, 2, nPr nCr, 7 e =.

b) 1, 2, SHIFT, nPr nCr, 7 e =. Resposta: Alternativa **a**.

SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

11. Mostre que a soma dos elementos de uma linha n qualquer do Triângulo de Pascal é igual a 2^n.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

12. Qual estratégia você utilizaria para determinar a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(2x + 1)^5$.
Resposta: Substituiria $x = y = 1$ em $(2x + 1)^5$.

13. Qual dos itens apresenta o termo geral do Binômio de Newton? Resposta: Alternativa **b**.

a) $T_p = \binom{n}{p} x^{n-p} y^p$, para n e p naturais, com $0 \leq p \leq n$ e x e y reais.

b) $T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} y^p$, para n e p naturais, com $0 \leq p \leq n$ e x e y reais. 15. Resposta pessoal.
Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

14. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo-o. Depois, troque com um colega para que ele o resolva e você resolva o dele. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

15. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo. Nela, use desenhos e dê exemplos.

Professor, professora: Antes de os estudantes elaborarem o problema na tarefa **14**, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

2

PROBABILIDADE



YAROSLAV ASTAKHOV/SHUTTERSTOCK

Equipe de *gamers* comemorando sucesso na fase de um jogo virtual.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Você costuma jogar *videogame*? O sucesso em um jogo de *videogame* depende exclusivamente da habilidade ou também da sorte do jogador? A resposta para essa pergunta depende do jogo escolhido. Em jogos que envolvem aleatoriedade, ou seja, fatores imprevisíveis e baseados no acaso ou em acontecimentos incertos, é possível que um jogador menos experiente vença um mais experiente.

A aleatoriedade desempenha um papel importante nos jogos de *videogame*, influenciando a geração de níveis e a ocorrência de eventos, por exemplo. Ela é obtida por meio do RNG – do inglês *Random Number Generator*, que significa Gerador de Números Aleatórios –, e é responsável por criar experiências únicas a cada partida. Em jogos eletrônicos de aventura, por exemplo, a localização dos tesouros ou inimigos pode ser diferente a cada partida, tornando cada exploração uma nova experiência. Já em jogos eletrônicos de corrida, é possível variar aleatoriamente a posição em que surgem os carros, árvores, pedras e outros itens, de modo a tornar o jogo mais dinâmico.

Nem todos os jogos de *videogame* usam RNG. Alguns jogos de ritmo – que envolvem dança e instrumentos musicais, por exemplo – são totalmente desprovidos de aleatoriedade. E mesmo quando está presente, ela geralmente passa despercebida, pois são muitos elementos na tela, principalmente nos jogos mais modernos.

Neste capítulo, você vai estudar:

- experimentos aleatórios;
- espaços amostrais e eventos;
- cálculo de probabilidade;
- probabilidade da união de dois eventos;
- probabilidade condicional;
- experimentos binomiais.

OBJETO DIGITAL ***Infográfico clicável*:**
Aleatoriedade nos jogos de *videogame*

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes compreendam que a aleatoriedade em jogos de *videogame* influencia estratégias e decisões, por exemplo, ao introduzir variabilidade nos resultados, forçar adaptações às novas circunstâncias e criar imprevisibilidade.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Você tem costume de jogar *videogame*? Se sim, algum dos seus jogos tem características de aleatoriedade? Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

2. Você já teve alguma experiência em um jogo de *videogame* em que a sorte (ou a falta dela) teve um impacto significativo no resultado? Descreva essa experiência e como você se sentiu em relação ao elemento de aleatoriedade presente no jogo. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

3. Em sua opinião, como a aleatoriedade influencia estratégias e decisões durante uma partida em um jogo de *videogame*? Você tende a gostar mais de jogos com maior ou menor grau de aleatoriedade? Converse com os colegas e o professor.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Introdução

Embora as probabilidades já exercessem fascínio há muitos séculos, elas não tiveram um tratamento matemático aprofundado até o século XV e início do século XVI. Os italianos foram pioneiros nos cálculos probabilísticos, mas resolveram apenas problemas específicos em **jogos de azar** sem formular teoremas ou muitos conceitos.

Jogos de azar: aqueles em que o ganho ou a perda dependem exclusivamente da sorte, ou pelo menos dependem dela mais do que dos cálculos ou da habilidade do jogador.

A obra *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (Resumo da aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade), do italiano Luca Pacioli (1445-1517), publicada em 1494, forneceu um resumo da Matemática conhecida na época. Pacioli é o primeiro autor conhecido que estudou os jogos de azar. Ele analisou o "problema dos pontos", que, de acordo com o que comumente se diz, foi o que deu origem à teoria das probabilidades.

O médico e matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576) abordou o estudo das probabilidades em sua obra *Liber de Ludo Aleae* (O livro dos jogos de azar), publicada em 1663. Cardano foi o primeiro a estudar o lançamento de dados, propondo que havia um princípio científico na probabilidade de se obter um par de seis, além de sorte. Também introduziu técnicas de combinatória no cálculo dos casos possíveis de um evento, entre outras contribuições.

Fonte de pesquisa: VIALI, Lorí. *Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade*. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~viali/estatistica/mat2006/material/textos/Hist_Prob.pdf. Acesso em: 31 jul. 2024.



MUSEU DE CAPODIMONTE, NÁPOLES

Luca Pacioli, de Jacopo de' Barbari. Têmpera no painel, 99 cm × 120 cm, c. 1495-1500.

Em nosso cotidiano, é frequente ouvirmos frases como: "a probabilidade de chover amanhã é maior do que 25%"; "a probabilidade de que ocorram acidentes nas rodovias seria menor se as leis de trânsito fossem respeitadas"; ou "a probabilidade de que haja reduções de preço é remota". Além dessas, existem muitas outras situações em que são utilizados cálculos para determinar a probabilidade de que certo acontecimento ocorra.

Um meteorologista, por exemplo, baseando-se em algumas informações, pode calcular a probabilidade de que ocorram chuvas em determinada região nas próximas horas. Outra situação é a determinação do preço do seguro de um bem, que é calculado levando em consideração sua probabilidade de perda ou avaria.

Com base nos conteúdos que estudaremos neste capítulo, você poderá responder a algumas questões, como:

- Qual é a probabilidade de que, no lançamento de um dado não viciado, sejam obtidos dois pontos?
- Qual é a probabilidade de que, em uma ninhada de cinco cães, somente dois sejam fêmeas?
- Das 500 peças produzidas diariamente por uma máquina, 3% apresentam defeito. Escolhendo cinco dessas peças, qual é a probabilidade de que nenhuma apresente defeito?

OBJETO DIGITAL
***Carrossel de imagens*:** Contribuições para a probabilidade

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Experimento aleatório, espaço amostral e evento

No lançamento de uma moeda, por exemplo, não é possível prever o resultado, ou seja, se a face voltada para cima será cara ou coroa. Situações como essa, em que não é possível prever o resultado, são chamadas de experimentos aleatórios. Nesse caso, mesmo repetindo várias vezes o lançamento dessa moeda, sob as mesmas condições, não poderemos prever o resultado do próximo lançamento.

Denominamos **experimento aleatório** todo experimento (ou fenômeno) cujo resultado depende somente do acaso, ou seja, cujo resultado é imprevisível mesmo quando repetido várias vezes, sob as mesmas condições.

Alguns exemplos de experimentos aleatórios são:

- lançamento de um dado não viciado;
- sorteio ao acaso de um dia da semana;
- sorteio de uma ficha de uma urna.

No caso do lançamento de um dado comum, temos seis possíveis resultados, que correspondem às faces dos dados. A esse conjunto de resultados damos o nome de espaço amostral.

Denominamos **espaço amostral**, e geralmente indicamos por Ω (lê-se: ômega), o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

Exemplos

a) O espaço amostral do lançamento de uma moeda é:

$$\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$$

b) O espaço amostral do sorteio ao acaso de um dia da semana é:

$$\Omega = \{\text{domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado}\}$$

Vamos analisar alguns **eventos** do espaço amostral do sorteio ao acaso de um dia da semana.

Evento S: sortear um dia cuja letra inicial seja **s**.

$$S = \{\text{segunda-feira, sexta-feira, sábado}\}$$

Evento T: sortear um dia cuja letra inicial seja diferente de **t**.

$$T = \{\text{domingo, segunda-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado}\}$$

É muito provável que o evento T ocorra. Porém, não podemos afirmar que ele vai ocorrer. Podemos afirmar apenas que ele acontece com frequência alta.

Evento D: sortear um dia cuja letra inicial seja **d**.

$$D = \{\text{domingo}\}$$

Nesse caso, verificamos que o evento D é um conjunto unitário. Nesse caso, dizemos que esse evento é **simples** ou **unitário**. É pouco provável que o evento D ocorra. Porém, não podemos afirmar que ele não vai ocorrer. Podemos afirmar apenas que ele acontece com frequência baixa.

Evento C: sortear um dia cuja letra inicial seja uma consoante.

$$C = \Omega = \{\text{domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado}\}$$

Nesse caso, verificamos que o evento C é o próprio espaço amostral, ou seja, $C = \Omega$. Nesse caso, dizemos que esse evento é **certo**.

Observação

Nos estudos de probabilidade, consideramos moedas, dados, roletas etc. honestos (não viciados), ou seja, sem qualquer tipo de modificação que possa influenciar os resultados obtidos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Evento V: sortear um dia cuja letra inicial seja uma vogal.

$$V = \varnothing$$

Nesse caso, verificamos que o evento V é o conjunto vazio. Nesse caso, dizemos que esse evento é **impossível**.

Professor, professora: Ao trabalhar com os estudantes o desenvolvimento histórico dos estudos sobre probabilidade, mencione que, nos primeiros estudos sobre o assunto, mesmo sendo necessário realizar vários cálculos para determinar probabilidades, alguns pensadores relutaram em aceitar que a probabilidade fosse um ramo da Matemática, já que, para eles, os resultados de probabilidade não eram exatos, ao contrário das demais.

Denominamos **evento** ou **acontecimento**, e geralmente indicamos por uma letra maiúscula, cada subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório. Cada um dos elementos do espaço amostral é denominado **evento elementar**.

Os casos até aqui analisados foram de conjuntos com uma quantidade limitada de elementos, configurando **espaços amostrais finitos**. Contudo, há espaços amostrais com uma infinidade de elementos.

Exemplos

a) O espaço amostral do sorteio aleatório de um número natural qualquer:

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

b) O espaço amostral da escolha aleatória de um número real pertencente ao intervalo $I = [0, 1]$.

c) O espaço amostral do sorteio aleatório de um número natural par é:

$$\Omega = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

d) O espaço amostral do sorteio aleatório de um número primo é:

$$\Omega = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$$

e) O espaço amostral da escolha aleatória de um número inteiro negativo é:

$$\Omega = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, \ldots\}$$

Esses exemplos configuram **espaços amostrais infinitos**.

Espaços amostrais finitos são os que podemos associar seus elementos aos números naturais de 1 até um número n fixo; já os **espaços amostrais infinitos** são os que não são finitos.

Exercícios e problemas resolvidos

R1. Antônio (A), Bento (B), Carlos (C), Lurdes (L), Maria (M), Neuza (N) e Olinda (O) estão em um baile. Para a próxima dança, eles decidiram formar os pares de homens e mulheres por meio de um sorteio. Determine o espaço amostral que representa todas as possibilidades de formar um par de homem e mulher para a próxima dança.

Resolução

Para representar todas as opções de pares de homem e mulher para a próxima dança, podemos construir um quadro.

Quadro de possibilidades de pares de homem e mulher

Homens	**Mulheres**			
	Lurdes (*L*)	**Maria (*M*)**	**Neuza (*N*)**	**Olinda (*O*)**
Antônio (*A*)	(A, L)	(A, M)	(A, N)	(A, O)
Bento (*B*)	(B, L)	(B, M)	(B, N)	(B, O)
Carlos (*C*)	(C, L)	(C, M)	(C, N)	(C, O)

Portanto, o espaço amostral é:

$$\Omega = \{(A, L), (A, M), (A, N), (A, O), (B, L), (B, M), (B, N), (B, O), (C, L), (C, M), (C, N), (C, O)\}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R2. Uma concessionária oferece um modelo de automóvel custando R$ 98 000,00 na cor sólida (branco ou preto) e com 2 portas. Como opcionais, o cliente pode escolher:

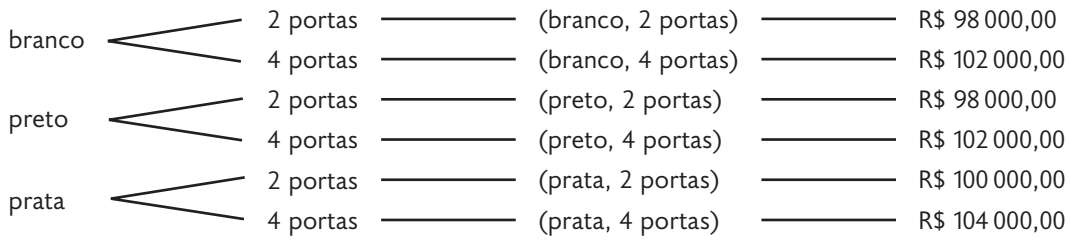
- cor metálica (prata) por R$ 2 000,00.
- 4 portas por R$ 4 000,00.

Um automóvel na cor prata com 4 portas, por exemplo, vai custar R$ $\underbrace{104\,000{,}00}_{98\,000 + 2\,000 + 4\,000}$.

Supondo que um cliente escolha aleatoriamente um automóvel, qual é o espaço amostral com todas as possibilidades de escolha do cliente em relação ao preço?

Resolução

Para representar todas as opções de escolha do cliente, podemos utilizar o seguinte diagrama.



Assim, em relação ao preço, temos quatro possibilidades:

$$\Omega = \{\text{R\$ 98 000,00; R\$ 100 000,00; R\$ 102 000,00; R\$ 104 000,00}\}$$

R3. Considerando o sorteio de uma das bolas a seguir, resolva os itens.



KEITHY MOSTACHI/ ARQUIVO DA EDITORA

a) Escreva o espaço amostral Ω desse sorteio.

b) Determine os seguintes eventos.

- Evento *A*: sortear a bola com o número 11.
- Evento *B*: sortear uma bola com um número menor do que 9.
- Evento *C*: sortear uma bola com um número maior ou igual a 9.
- Evento *D*: sortear uma bola com um número ímpar menor do que 8.

Resolução

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

b) $A = \{11\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $C = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ e $D = \{1, 3, 5, 7\}$.

R4. Os estudantes da turma de estudos para as Olimpíadas de Matemática, da qual Gabriel faz parte, propuseram um jogo curioso: nele, cada pessoa escolhe, de modo aleatório, um número par maior do que 2. Em seguida, essa pessoa desafia algum dos colegas a escrever esse número como soma de dois números primos.

Descreva o espaço amostral para a escolha dos números e diga se esse espaço é finito ou infinito.

Resolução

Os números a serem escolhidos são os números pares maiores do que 2, ou seja, 4, 6, 8, 10, e assim por diante. Desse modo, o espaço amostral é:

$$\Omega = \{4, 6, 8, 10, \ldots\}$$

Portanto, o espaço amostral é infinito, pois não é possível associar seus elementos aos números naturais de 1 até um número *n* fixo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R5. Para desenvolver um jogo de computador capaz de gerar personagens aleatórios por meio de um RNG, Guilherme se deparou com a dificuldade de descrever um espaço amostral com as cores possíveis para os personagens. Isso ocorre porque as possibilidades de cores são ilimitadas, quando levamos em consideração todas as tonalidades e combinações possíveis.

Para resolver o problema, Guilherme organizou o programa da seguinte maneira.

- Em primeiro lugar, notando que todas as cores podem ser obtidas por meio de combinações adequadas das três cores primárias (amarelo, vermelho e azul), definiu que as escolhas aleatórias deveriam levar em consideração cada uma dessas três cores.
- Em seguida, para cada cor primária, ele programou o computador para associar um número real de 0 a 1 indicando a intensidade da tonalidade com que essa cor primária vai influenciar na cor final. Nessa escala, 0 significa que a cor primária não está presente na constituição da cor final, enquanto 1 significa intensidade máxima.

Assim, por exemplo, o trio:

- $(\text{Amarelo} = 0;\ \text{Vermelho} = 1;\ \text{Azul} = 0{,}5)$ representa a tonalidade da cor roxa obtida com a combinação de cada parte de vermelho para meia parte da cor azul;
- $(\text{Amarelo} = 0;\ \text{Vermelho} = 0;\ \text{Azul} = 0)$ representa a cor branca;
- $(\text{Amarelo} = 1;\ \text{Vermelho} = 1;\ \text{Azul} = 1)$ representa a cor preta.

Utilizando a notação da teoria de conjuntos, descreva o espaço amostral com que Guilherme vai trabalhar na programação de seu jogo e indique se esse conjunto é finito ou infinito.

Resolução

O espaço amostral com que Guilherme vai trabalhar na programação de seu jogo é dado por:

$$\Omega = \left\{(\text{Amarelo} = a;\ \text{Vermelho} = b;\ \text{Azul} = c) \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ com } a, b, c \in [0, 1]\right\}$$

Como as componentes são números reais em um intervalo, o espaço amostral é infinito.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1. O time de futebol de certa escola disputará um campeonato escolar. Para isso, foram convocados, entre outros, quatro estudantes que jogam na posição de atacante (estudantes *A*, *B*, *C* e *D*). Considerando que a dupla de ataque seja formada por meio de um sorteio, determine o espaço amostral das duplas de ataque que podem ser formadas com esses estudantes.

Resposta: $\Omega = \{(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D)\}$

2. Jéssica deseja preparar um lanche com pão de forma e mais três ingredientes, que ela vai escolher entre alface, tomate, queijo e carne. O valor calórico das porções de cada ingrediente que ela pode utilizar está indicado a seguir.

Valor calórico de alguns ingredientes

Ingrediente	Valor calórico (em kcal)
Pão de forma (*P*)	130
Alface (*A*)	10
Tomate (*T*)	18
Queijo (*Q*)	55
Carne (*C*)	110

Fonte de pesquisa: Anotações de Jéssica.

Dica

Uma das possibilidades em relação aos ingredientes é (*P*, *A*, *T*, *Q*).

Supondo que Jéssica prepare aleatoriamente um lanche, qual é o espaço amostral que representa todas as possibilidades de escolha em relação:

a) aos ingredientes.

Resposta: $\Omega = \{(P, A, T, Q), (P, A, T, C), (P, A, Q, C), (P, T, Q, C)\}$

b) ao valor calórico.

Resposta: $\Omega = \{213, 268, 305, 313\}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. a) Resposta: $\Omega = \{(A, A, V), (A, V, A), (A, V, V), (V, V, A), (V, A, V), (V, A, A)\}$

3. No bolso da calça de um menino estão quatro bolinhas de gude diferenciadas apenas pela cor, sendo duas delas verdes (V) e duas azuis (A). Considerando que ele vai retirar aleatoriamente do bolso três bolinhas sucessivamente, determine:

a) o espaço amostral Ω, considerando a ordem em que elas serão retiradas.

b) o evento E em que todas as bolinhas de gude retiradas são da mesma cor.

Resposta: $E = \varnothing$

4. Em geral, os baralhos atuais têm 52 cartas, divididas igualmente em quatro naipes: copas, espadas, ouros e paus. Esses naipes se originaram da fusão entre os baralhos espanhóis e franceses; os nomes vieram dos espanhóis e os símbolos que os representam, dos franceses.

7. Resposta pessoal. A resposta depende de cada problema elaborado pelos estudantes.



CHUCK RAUSIN/SHUTTERSTOCK

As quatro damas de um baralho. Da esquerda para a direita: espadas, ouros, paus e copas.

4. b) Resposta: $B = \{(O, O), (O, C), (O, E), (O, P)\}$

Utilizando as iniciais de cada naipe, escreva os eventos considerando a retirada aleatória simultânea de duas cartas de um baralho completo.

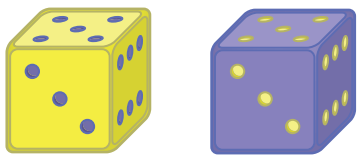
a) Evento A: as duas cartas serem do mesmo naipe. Resposta: $A = \{(C, C), (P, P), (O, O), (E, E)\}$

b) Evento B: pelo menos uma carta ser de ouros.

c) Evento C: nenhuma carta ter naipe de copas.

Resposta: $C = \{(E, E), (E, O), (E, P), (O, O), (O, P), (P, P)\}$

5. Considere o lançamento de dois dados comuns, não viciados.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Represente em um quadro o espaço amostral (Ω) dos possíveis resultados obtidos.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

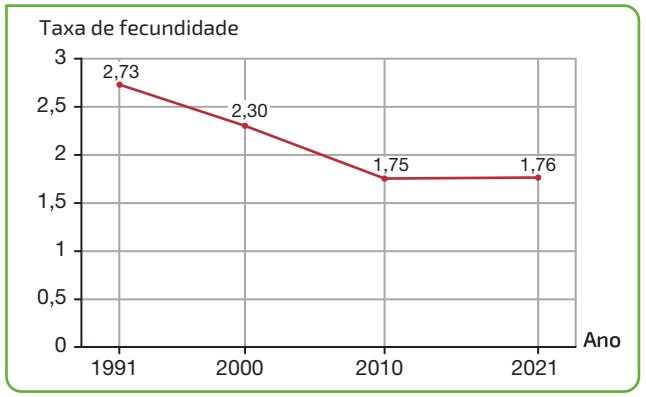
b) Escreva o conjunto que representa o evento:

Respostas no final do **Livro do Estudante**.

- A: duas faces ímpares voltadas para cima.
- B: faces iguais voltadas para cima.
- C: soma das faces voltadas para baixo igual a 7.
- D: soma das faces voltadas para cima maior do que 12.
- E: produto das faces voltadas para cima maior do que 16.

6. A taxa de fecundidade indica a quantidade média de filhos vivos que uma mulher teve, ao final do seu período reprodutivo, em determinado espaço geográfico. Essa taxa é estimada com base em informações retrospectivas obtidas em censos e inquéritos demográficos.

Taxa de fecundidade total no Brasil, de 1991 a 2021



OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

Fontes de pesquisa: IBGE. *Cidades*. Disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/panorama.

DATASUS. *Indicadores demográficos*. Disponível em: http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/idb2004/a05.htm. Acessos em: 31 jul. 2024.

Aproxime ao inteiro mais próximo a quantidade média de filhos que uma mulher tinha em 1991 e, com base no resultado obtido, resolva as questões.

a) Construa um diagrama para representar todas as possibilidades de filhos por mulher, em relação ao sexo masculino (M) e feminino (F).

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Escreva o conjunto que representa o evento:

- A: todos os filhos terem o mesmo sexo.
- B: exatamente dois filhos do sexo masculino.
- C: pelo menos um filho do sexo feminino.

Respostas no final do **Livro do Estudante**.

7. Elabore um problema em que alguma pessoa deva escolher aleatoriamente como vai se vestir para uma festa, tendo como opções p camisas, q calças e r sapatos. Em seguida, peça a um colega que resolva o problema elaborado e, depois, verifique se as respostas estão corretas.

Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

8. Considere uma moeda de 1 real.



Face cara (Ca)



Face coroa (Co)

IMAGENS: BANCO CENTRAL DO BRASIL

Descreva o espaço amostral do lançamento dessa moeda até que saia a face coroa voltada para cima. Esse espaço amostral é finito ou infinito?

Resposta: $\Omega = \{(Co), (Ca, Co), (Ca, Ca, Co), (Ca, Ca, Ca, Co), \ldots, (Ca, Ca, Ca, \ldots, Co), \ldots\}$. O espaço amostral é infinito.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

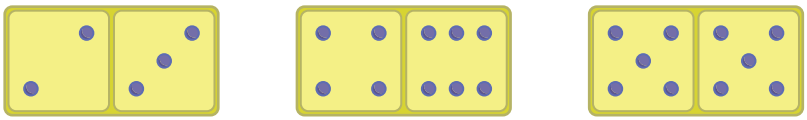
9. Em certa loja, estão à venda camisas polo, camisas de manga curta e de manga longa cujos preços são R$ 60,00, R$ 70,00 e R$ 90,00, respectivamente.

a) De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode comprar duas camisas nessa loja?
Resposta: Seis maneiras.

b) Supondo que uma pessoa realize a compra de maneira aleatória, qual é o espaço amostral em relação ao preço pago na compra de duas camisas?
Resposta: $\Omega = \{R\$\ 120{,}00;\ R\$\ 130{,}00;\ R\$\ 140{,}00;\ R\$\ 150{,}00;\ R\$\ 160{,}00;\ R\$\ 180{,}00\}$

10. O dominó é um jogo de 28 peças retangulares, divididas ao meio, combinando os pontos de 0 a 6.

As peças a seguir podem ser representadas, respectivamente, por $(2, 3)$, $(4, 6)$ e $(5, 5)$.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando que uma peça seja retirada aleatoriamente de um jogo de dominó e colocada com a face voltada para cima, determine os eventos a seguir.

a) Evento A: peça com a mesma quantidade de pontos em ambos os lados. Resposta: $A = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

b) Evento B: peça cuja soma dos pontos seja 6. Resposta: $B = \{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3)\}$

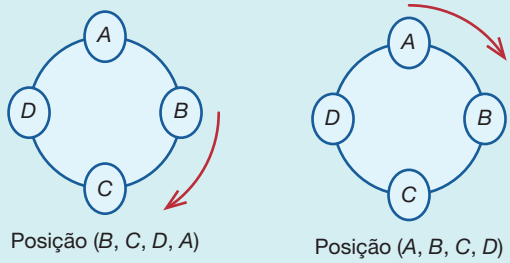
c) Evento C: peça em que a diferença dos pontos seja maior do que 6. Resposta: $C = \varnothing$

d) Evento D: peça em que o produto dos pontos seja não negativo. Resposta: $D = \Omega$

11. Agnaldo (A), Beatriz (B), Carolina (C) e Dênis (D) estão em um parque de diversões e vão entrar em um brinquedo giratório com quatro assentos dispostos em círculo.
Professor, professora: Se necessário, represente na lousa possíveis exemplos de posições da permutação circular.

Observação

Como o brinquedo tem formato circular, algumas possibilidades de posição são equivalentes umas às outras, de modo que não devem ser contadas em repetição. Por exemplo, a ordenação (B, C, D, A) é equivalente à ordenação (A, B, C, D), pois as posições relativas entre os amigos permanecem as mesmas, conforme ilustra a figura.



Posição (B, C, D, A) Posição (A, B, C, D)

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

11. b) Resposta: $M = \{(A, B, C, D), (A, B, D, C), (A, C, D, B), (A, D, C, B)\}$

a) Supondo que a escolha dos assentos seja feita por sorteio, determine o espaço amostral com as posições distintas que essas pessoas podem escolher para se sentar nos assentos sem que haja repetição de posições relativas entre uns e outros. Resposta: $\Omega = \{(A, B, C, D), (A, B, D, C), (A, C, B, D), (A, C, D, B), (A, D, B, C), (A, D, C, B)\}$

b) Escreva o conjunto que representa o evento M, em que Dênis se senta ao lado de Carolina.

c) Determine o evento N, em que Agnaldo não se senta ao lado de Beatriz. Resposta: $N = \{(A, C, B, D), (A, D, B, C)\}$

d) Escreva o conjunto que representa o evento P, em que Agnaldo não se senta ao lado de Beatriz nem de Carolina. Resposta: $P = \varnothing$

12. José comprou uma lâmpada nova para seu quarto e está preocupado com o tempo de vida útil dessa lâmpada antes que ela queime.

11. c) Professor, professora: Se necessário, diga aos estudantes que no caso (A, C, D, B), por exemplo, Agnaldo está sentado ao lado de Beatriz, já que a disposição dos assentos é circular. Nessa situação, a representação gráfica deixa esse fato mais evidente do que a escrita por meio de quádruplas ordenadas.

12. a) Resposta: $\Omega = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 1095\}$ ou $\Omega = \{t \in \mathbb{R} \mid t \in [0, 1095]\}$

Dica

Para resolver essa tarefa, desconsidere a existência de anos bissextos.

a) Determine o espaço amostral do tempo de vida útil t dessa lâmpada, em dias, sabendo que ela não vai durar mais do que 3 anos.

b) Escreva o conjunto que representa o evento A, em que a lâmpada deve durar mais do que 1 ano e menos do que 2 anos. Resposta: $A = \{t \in \mathbb{R} \mid 365 < t < 730\}$ ou $A = \{t \in \mathbb{R} \mid t \in]365, 730[\}$

Calculando probabilidades

Professor, professora: Proponha as questões **A** e **B** antes de trabalhar com os conteúdos desta página.

Considerando o sorteio de um número natural de 1 a 10, qual é a probabilidade de esse número ser o 7?

Nesse caso, temos um experimento aleatório cujo espaço amostral é:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Estamos considerando nesse experimento o evento simples "o número sorteado ser 7", dado por $A = \{7\}$.

Todos os elementos desse espaço amostral têm a mesma probabilidade de serem sorteados, ou seja, Ω é um **espaço amostral equiprovável**.

Como o 7 aparece uma única vez no espaço amostral, e este tem 10 elementos, então há 1 possibilidade em 10 de o número 7 ser sorteado.

Assim, a probabilidade de o número 7 ser sorteado é:

$$1 \text{ em } 10 \text{ ou } \frac{1}{10} \text{ ou } \frac{10}{100} = 10\%$$

E qual é a probabilidade de o número sorteado ser menor do que 5?

Nesse caso, temos o mesmo espaço amostral Ω e o evento "o número sorteado ser menor do que 5", dado por $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Assim, há 4 possibilidades em 10 de um número menor do que 5 ser sorteado, isto é:

$$4 \text{ em } 10 \text{ ou } \frac{4}{10} \text{ ou } \frac{40}{100} = 40\%$$

Considere um evento A de um espaço amostral Ω finito e equiprovável. A razão entre o número de elementos de A $\left(\text{indicada por } n(A)\right)$ e o número de elementos de Ω $\left(\text{indicada por } n(\Omega)\right)$ é a probabilidade $P(A)$ de o evento A ocorrer.

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \text{ ou } P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Considere A um evento qualquer de certo espaço amostral Ω. Para os conjuntos $\varnothing$, A e Ω, temos:

$$\varnothing \subset A \subset \Omega \Rightarrow n(\varnothing) \leq n(A) \leq n(\Omega)$$

Dividindo cada membro dessa desigualdade por $n(\Omega) > 0$, obtemos:

$$\frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

Portanto, a probabilidade de um evento ocorrer é um valor de 0 a 1, ou seja, de 0% a 100%.

Para todo evento A, temos:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \text{ ou } 0\% \leq P(A) \leq 100\%$$

Se A é um evento **impossível**, temos $P(A) = 0$:

$$A = \varnothing \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\overbrace{n(\varnothing)}^{0}}{n(\Omega)} = 0$$

Por outro lado, se A é um evento **certo**, temos $P(A) = 1$:

$$A = \Omega \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$$

Questão A. Em uma urna há três bolinhas coloridas, uma verde, uma amarela e uma vermelha, que se diferenciam apenas pela cor. Como você faria para determinar a probabilidade de sortear uma bolinha vermelha dessa urna? Qual é essa probabilidade?

Questão B. Considere a urna com bolinhas descritas na questão **A**. Como você faria para determinar a probabilidade de sortear uma bolinha que não é verde?

Questão A. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam que, como nesse sorteio todas as bolinhas têm a mesma probabilidade de serem sorteadas, a probabilidade de a bolinha vermelha ser sorteada é 1 em 3 ou $\frac{1}{3}$.

Questão B. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam que calculariam, por exemplo, 1 menos a probabilidade de sortear uma bolinha verde.

OBJETO DIGITAL
Vídeo: O problema de Monty Hall

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Podemos ainda calcular a probabilidade de um evento não ocorrer. Para isso, considere como espaço amostral os números naturais de 1 a 10 e o evento A, da ocorrência de um número maior do que 7 no sorteio de um desses números.

- $A = \{8, 9, 10\}$
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Seja $\overline{A}$ o conjunto formado pelos elementos de Ω que não pertencem a A, ou seja, $\overline{A} = \Omega - A$. Dizemos que $\overline{A}$ é **complementar** de A em relação a Ω. Nesse caso:

$$\overline{A} = \Omega - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Como $\overline{A} = \Omega - A$ e $\overline{A} \cap A = \varnothing$, temos:

$$n(\overline{A}) = n(\Omega) - n(A)$$

Ao dividirmos ambos os membros dessa igualdade por $n(\Omega) > 0$, obtemos:

$$\frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega) - n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} - \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Portanto, a probabilidade de não ocorrer um número maior do que 7 é:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{10} \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{7}{10}$$

A probabilidade $P(\overline{A})$ de um evento A não ocorrer é igual a 1 menos a probabilidade de A ocorrer, ou seja:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Vamos considerar um jogo no qual são depositadas as seguintes bolinhas numeradas em uma urna.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Nesse caso, ao ser selecionada uma bolinha, aleatoriamente, a probabilidade de que ela tenha o número 1 não é a mesma de ter o número 4, já que na urna há mais bolinhas com esse número do que com o número 1. Por isso, dizemos que esse espaço amostral não é equiprovável.

Desse modo, o espaço amostral pode ser escrito como $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, mas, como nem todos os seus elementos têm a mesma probabilidade de serem sorteados, trata-se de um **espaço amostral não equiprovável**.

Considerando A como o evento de sair o número 1 na escolha aleatória de uma bolinha e B de sair o número 3 na escolha aleatória de uma bolinha, temos $P(A) = \frac{1}{10}$, pois, entre as dez bolinhas, há apenas uma com o número 1, e $P(B) = \frac{3}{10}$, pois, entre as dez bolinhas, há três com o número 3.

Sendo C o evento de sair o número 2 ou o número 4, a quantidade de eventos favoráveis é 6 em 10, já que existem 6 possibilidades (2 + 4) de a bolinha sorteada ser 2 ou 4, pois há duas bolinhas com o número 2 e quatro bolinhas com o número 4. Sendo assim, $P(C) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

No cálculo da probabilidade $P(A)$ de um evento A ocorrer em um espaço amostral Ω finito, mas não equiprovável, a divisão do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis deve levar em consideração a proporção em que os elementos de cada conjunto ocorrem, adicionando as repetições.

Observação

Estamos considerando que a urna na qual as bolinhas foram depositadas não é transparente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

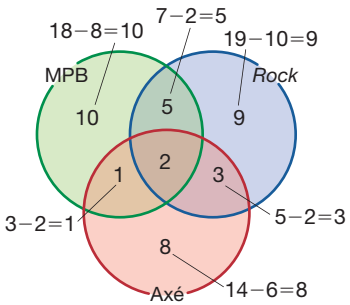
Exercícios e problemas resolvidos

R6. Marcela investigou a preferência de seus colegas de classe em relação aos gêneros musicais MPB (Música Popular Brasileira), *rock* e axé. Dos 38 entrevistados, 18 gostam de MPB; 19 gostam de *rock*; 14 gostam de axé; 7 gostam de MPB e *rock*; 5 gostam de *rock* e axé; 3 gostam de MPB e axé e 2 gostam dos três gêneros.

Ao sortear um desses entrevistados, qual é a probabilidade de que ele goste somente de axé?

Resolução

Inicialmente, construímos um diagrama de Venn. Professor, professora: Se necessário, construa o diagrama de Venn na lousa com os estudantes.

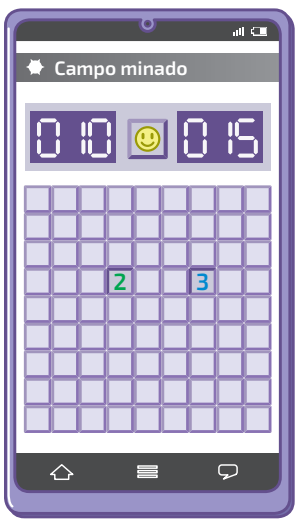


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Seja A o evento "gostar somente de axé", então $n(A) = 8$. Assim, a probabilidade de o entrevistado gostar somente de axé é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{38} = \frac{4}{19} \simeq 21{,}05\%$$

R7. No jogo **Campo Minado**, o objetivo é descobrir onde estão as dez minas escondidas nos 81 quadradinhos, sem clicar nessas minas. Um jogador clicou em dois quadradinhos em que não havia minas: no 1º apareceu o número 3, indicando que há três bombas nos 8 quadradinhos que o cercam; no 2º apareceu o 2, indicando que há duas bombas nos 8 quadradinhos que o cercam, conforme a figura.



RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Qual das jogadas a seguir é a mais indicada para o próximo clique? Justifique sua resposta.

- Jogada **A**: clicar em um dos 8 quadradinhos que cercam o número 3.
- Jogada **B**: clicar em um dos 8 quadradinhos que cercam o número 2.
- Jogada **C**: clicar em um dos quadradinhos restantes, não indicados nas jogadas **A** ou **B**.

Resolução

Calculamos a probabilidade de clicar em uma mina para cada jogada.

Jogada **A**

Há três minas escondidas em um total de 8 quadradinhos. Logo, a probabilidade de clicar em uma mina nos quadradinhos que cercam o número 3 é:

$$P(A) = \frac{3}{8} = 37{,}5\%$$

Jogada **B**

Há duas minas escondidas em um total de 8 quadradinhos. Logo, a probabilidade de clicar em uma mina nos quadradinhos que cercam o número 2 é:

$$P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Jogada **C**

Restam cinco minas escondidas nos 63 quadradinhos não incluídos nas jogadas **A** ou **B**. Logo, a probabilidade de clicar em uma mina em um deles é:

$$P(C) = \frac{5}{63} \simeq 7{,}9\%$$

Portanto, como $P(C) < P(B) < P(A)$, a jogada mais indicada é a **C**, pois nela há menor probabilidade de se clicar em uma mina.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R8. Considere todos os anagramas da palavra PROBABILIDADE. Qual é a probabilidade de escolher ao acaso um desses anagramas que começa com **R** e termina com **L**?

Resolução

Inicialmente, vamos determinar o total de anagramas da palavra PROBABILIDADE, ou seja, o número de elementos do espaço amostral desse experimento.

$$P_{13}^{2,\,2,\,2,\,2} = \frac{13!}{2!2!2!2!}$$

Devemos determinar quantos desses anagramas começam com **R** e terminam com **L**. Fixando a primeira e a última letra, sobram 11 para permutar.

$$P_{11}^{2,\,2,\,2,\,2} = \frac{11!}{2!2!2!2!}$$

Sendo A o evento "escolher ao acaso um anagrama da palavra PROBABILIDADE que começa com **R** e termina com **L**", temos:

$$P(A) = \frac{\frac{11!}{2!2!2!2!}}{\frac{13!}{2!2!2!2!}} = \frac{11!}{13!} = 0{,}0064 = 0{,}64\%$$

Portanto, a probabilidade de escolher ao acaso todos os anagramas da palavra PROBABILIDADE que começam com **R** e terminam com **L** é 0,64%.

R9. Joyce foi selecionada para participar de um programa de televisão no qual ela tem a possibilidade de ganhar os prêmios **1**, **2** e **3**, mas também corre o risco de não ganhar nada. Para isso, ela vai girar uma roleta honesta como o da imagem a seguir, na qual os prêmios estão indicados nos setores circulares correspondentes.

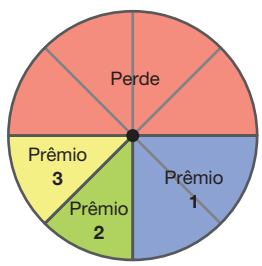


Qual é a probabilidade de que Joyce ganhe o prêmio **1** ou o prêmio **2**?

Resolução

O espaço amostral do sorteio é $\Omega = \{\text{Perde, Prêmio } \mathbf{1}, \text{ Prêmio } \mathbf{2}, \text{ Prêmio } \mathbf{3}\}$. No entanto, tal espaço não é equiprovável, já que os setores circulares correspondentes aos prêmios **2** e **3** são menores do que o correspondente ao setor em que Joyce não ganha nada.

Dividindo o círculo de modo conveniente em setores de mesma medida de área, porém, conseguimos associar as medidas das áreas de interesse a fatias equiprováveis do círculo.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

A área referente ao prêmio **1** abrange dois setores circulares, e a referente ao prêmio **2** abrange um. Assim, temos três setores de interesse em um total de oito setores equiprováveis.

Portanto, a possibilidade de que Joyce ganhe o prêmio **1** ou o prêmio **2** é 3 em 8, ou $\frac{3}{8}$, ou, ainda, 37,5%.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

13. f) Resposta: $\frac{3}{7}$ ou aproximadamente 42,86%.

13. Na lista de chamada de uma turma, os trinta estudantes são numerados de 1 a 30. Em certo dia, quando faltaram os estudantes de números 11 e 26, o professor sorteou, entre os presentes, um estudante para resolver uma tarefa na lousa. Qual é a probabilidade de o número do estudante que vai à lousa ser:

a) par? Resposta: $\frac{1}{2}$ ou 50%.

b) menor do que 9? Resposta: $\frac{2}{7}$ ou aproximadamente 28,57%.

c) múltiplo de 4? Resposta: $\frac{1}{4}$ ou 25%.

d) múltiplo de 5? Resposta: $\frac{3}{14}$ ou aproximadamente 21,43%.

e) primo? Resposta: $\frac{9}{28}$ ou aproximadamente 32,14%.

f) maior do que 12 e menor do que 25?

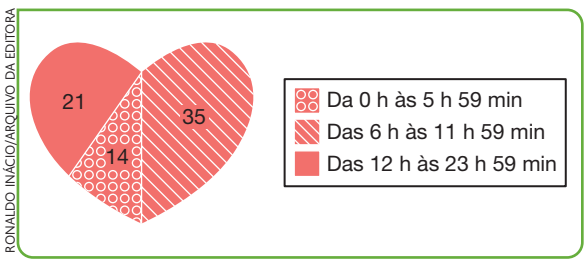
g) maior do que 17 e divisível por 6? Resposta: $\frac{3}{28}$ ou aproximadamente 10,71%.

14. Momentos antes de acordar, nosso organismo envia cortisol e adrenalina para circular pelo corpo. Esses hormônios são responsáveis por nos deixar mais dispostos, e no sistema cardiovascular aumentam a pressão arterial e aceleram a frequência cardíaca. Contudo, o cortisol e a adrenalina favorecem a formação de placas de gordura nas artérias, o que pode provocar um infarto durante a manhã.

Certo grupo de médicos cardiovasculares realizou uma pesquisa com os pacientes que deram entrada no hospital em março de 2024, obtendo como resultado os dados do gráfico a seguir.

As informações apresentadas no gráfico são fictícias.

Quantidade de pacientes que sofreram infarto por faixa horária em março de 2024



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: Administração do hospital.

a) Em qual faixa horária esse hospital deve colocar a maior quantidade de médicos de plantão? Por quê? Resposta: Na faixa horária das 6 h às 11 h 59 min, pois é na que ocorre a maior quantidade de infartos.

b) Considerando que a proporção de pacientes com infartos se mantenha, qual é a probabilidade de uma pessoa infartada dar entrada nesse hospital de:

- 0 h às 5 h 59 min? Resposta: $\frac{1}{5}$ ou 20%.
- 0 h às 11 h 59 min? Resposta: $\frac{7}{10}$ ou 70%.

15. Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numéricas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada não ser um número de 1 a 20? Resposta: Alternativa **e**.

a) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{2}{10}$ e) $\frac{8}{10}$

b) $\frac{19}{100}$ d) $\frac{2}{100}$

16. Considere todos os números de três dígitos distintos formados a partir dos algarismos 6, 7 e 8. Se escolhermos um desses números ao acaso, qual é a probabilidade de ele ser: Resposta: $\frac{1}{2}$ ou 50%.

a) ímpar. Resposta: $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$.

b) par. Resposta: $\frac{2}{3}$ ou $66,\overline{6}\%$.

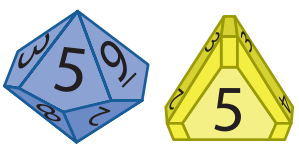
c) múltiplo de 3. Resposta: 1 ou 100%.

d) maior do que 770.

e) múltiplo de 5. Resposta: 0 ou 0%.

17. Ao realizar uma prova objetiva em que cada questão tinha cinco alternativas de respostas, sendo apenas uma correta, um estudante decidiu assinalar aleatoriamente a resposta da última questão. Qual é a probabilidade de esse estudante acertar a questão? E de errar? Resposta: $\frac{1}{5}$ ou 20%; $\frac{4}{5}$ ou 80%.

18. O **RPG** trata-se de um jogo em que seus participantes interpretam personagens e desenvolvem uma narrativa. Nesse tipo de jogo, costuma-se utilizar dados para definir o sucesso ou o fracasso dos jogadores, já que existem eventos aleatórios. A seguir, são apresentados dois dados que geralmente são usados no **RPG**: um de dez faces (numeradas de 1 a 10) e outro de cinco faces (numeradas de 1 a 5).



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Dica

Considere que todas as faces de um mesmo dado têm a mesma probabilidade de serem sorteadas (eventos equiprováveis).

Qual é a probabilidade de escolher ao acaso uma face de cada um desses dados, de modo que a soma dos números das faces escolhidas determine um número ímpar? Resposta: Alternativa **c**.

a) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3}{5}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

19. Em um congresso, compareceram oftalmologistas (profissionais especializados no tratamento do sistema ocular), ortopedistas (médicos especializados no tratamento do sistema locomotor) e cardiologistas (médicos especializados no tratamento do sistema cardiovascular), conforme apresentado na tabela.

Ao final do congresso, houve o sorteio de um prêmio entre os participantes. Calcule a probabilidade de o profissional sorteado ser:

Profissionais presentes no congresso, em 2024

Profissionais	Homens	Mulheres	Total
Oftalmologistas	17	14	31
Ortopedistas	12	18	30
Cardiologistas	13	11	24
Total	42	43	85

Fonte de pesquisa: Organizadores do congresso.

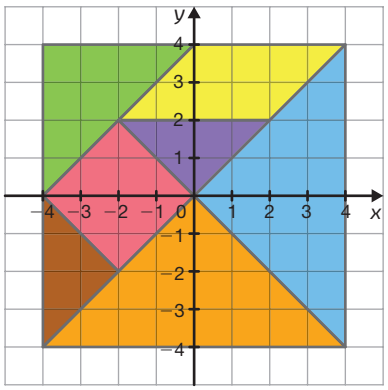
a) um homem. Resposta: $\frac{42}{85}$ ou aproximadamente 49,41%.

b) um ortopedista. Resposta: $\frac{6}{17}$ ou aproximadamente 35,29%.

c) uma mulher oftalmologista. Resposta: $\frac{14}{85}$ ou aproximadamente 16,47%.

20. O tangram é um quebra-cabeça chinês de origem milenar, composto de sete peças cujas formas lembram figuras geométricas planas que, organizadas, podem formar cerca de 1700 **silhuetas**. Os chineses o chamam de "Tábua de sabedoria" ou "Tábua das sete sabedorias". Considere o seguinte tangram em um plano cartesiano.

Silhuetas: desenhos que representam um objeto ou uma pessoa de acordo com sua sombra.



a) Qual é a probabilidade de, ao marcarmos aleatoriamente um ponto pertencente ao tangram, esse ponto:

- pertencer à região alaranjada? Resposta: $\frac{1}{4}$ ou 25%.
- pertencer à região roxa? Resposta: $\frac{1}{16}$ ou 6,25%.
- não pertencer à região azul? Resposta: $\frac{3}{4}$ ou 75%.

b) Se marcarmos um ponto pertencente ao tangram com abscissa −3, qual é a probabilidade de esse ponto pertencer à região alaranjada? E à região verde? Resposta: $\frac{1}{8}$ ou 12,5%; $\frac{3}{8}$ ou 37,5%.

c) Ao marcarmos um ponto pertencente ao tangram com ordenada positiva, qual é a probabilidade de esse ponto pertencer à região amarela? Resposta: $\frac{1}{4}$ ou 25%.

Dica

As probabilidades solicitadas nos itens **a**, **b** e **c** são proporcionais à medida da área das regiões.

21. Em uma enquete realizada com 50 moradores de um bairro, 42 afirmaram que têm internet em casa, 28 que têm TV por assinatura e 5 que não têm internet nem TV por assinatura. Ao sortear aleatoriamente um dos 50 moradores desse bairro, qual é a probabilidade de ele ter somente internet? E de ter internet e TV por assinatura? Resposta: $\frac{17}{50}$ ou 34%; $\frac{1}{2}$ ou 50%.

22. Para fazer o sorteio de um livro de História da Matemática entre todos os estudantes das turmas do 2º ano do Ensino Médio de uma escola, o professor reproduziu todos os anagramas da palavra LIVRO em pedaços de papel, distribuiu aos estudantes e colocou uma cópia em uma urna, onde seria realizado o sorteio. Qual é a probabilidade:

a) de o estudante que tem o anagrama ORVIL ganhar o livro? Resposta: $\frac{1}{120}$ ou $0,8\overline{3}\%$.

b) de ser sorteado um anagrama que comece com uma consoante? Resposta: $\frac{3}{5}$ ou 60%.

c) de ser sorteado um anagrama que contenha as vogais em sequência? Resposta: $\frac{2}{5}$ ou 40%.

23. Selecionando aleatoriamente dois números distintos do intervalo $1 \leq n < 10$, com $n \in \mathbb{N}$, qual é a probabilidade de que a soma desses números seja maior do que seu produto? Resposta: $\frac{2}{9}$ ou $22,\overline{2}\%$.

24. Amanda e Pedro estão participando de um jogo de dados com regras incomuns. No jogo, utilizam-se dois dados de seis faces honestos, mas um deles tem as faces numeradas de 1 a 6, enquanto o outro, de 3 a 8. Em cada rodada, os dois dados são arremessados simultaneamente, e a pontuação obtida é a soma das faces voltadas para cima. Nessas condições, responda às questões.

a) Para vencer Pedro em uma rodada, Amanda precisa obter soma maior do que 9. Qual é a probabilidade de isso acontecer? Resposta: $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ ou $41,\overline{6}\%$.

b) Na rodada seguinte, Pedro precisa obter soma 4 ou superior para vencer. Qual é a probabilidade de que isso aconteça? Resposta: 1 ou 100% (evento certo).

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

29. Resposta pessoal. A resposta depende de cada problema elaborado pelos estudantes.

25. A prática da queimada em colheitas de cana-de-açúcar é um método muito utilizado pelos produtores rurais, mas em vias de ser extinto devido ao seu potencial poluidor. Atualmente, a queima da cana-de-açúcar antes da colheita é praticada, quando autorizada por órgãos competentes, em muitos canaviais para facilitar a colheita e aumentar o rendimento da atividade. Seu objetivo é deixar os **colmos** limpos de folhas e adequados para serem transportados e moídos. Entre os efeitos negativos dessa prática, estão o aumento da concentração de dióxido de carbono e de material particulado na atmosfera, alterando o clima e contribuindo para o aumento de doenças respiratórias, além da possibilidade de o fogo se alastrar e prejudicar a qualidade do solo.

Colmo: caule, geralmente em formato cilíndrico, com nós e entrenós visíveis em toda sua extensão; nome dado ao tipo de caule de plantas como cana-de-açúcar, milho, arroz e bambu.

Professor, professora: Ao realizar a tarefa **25**, oriente os estudantes a pesquisar sobre outros métodos alternativos que podem ser utilizados na agricultura, a fim de evitar a prática da queimada em colheitas de cana-de-açúcar. Depois, solicite a eles que levem o resultado dessa pesquisa para a sala de aula e, juntos, conversem sobre as alternativas que encontraram.

Analise as informações apresentadas a seguir.

Quantidade de pacientes internados em um hospital de certa região canavieira no período da queima de cana-de-açúcar, por doenças respiratórias, em 2021

Pacientes	Doenças respiratórias causadas pelas queimadas	Doenças respiratórias resultantes de outras causas	Outras doenças	Total
Pessoas idosas	50	150	60	260
Crianças	150	210	90	450

Fonte de pesquisa: Informações do hospital da região canavieira pesquisada.

a) Escolhendo-se aleatoriamente um paciente internado nesse hospital por problemas respiratórios causados pelas queimadas, a probabilidade de que ele seja uma criança é igual a: Resposta: Alternativa **V**.

I) 0,26. **II)** 0,50. **III)** 0,63. **IV)** 0,67. **V)** 0,75.

b) Em relação à probabilidade indicada no item anterior, podemos concluir que: Resposta: Alternativa **III**.

I) a gravidade dos problemas respiratórios que atingem a população infantil nas regiões das queimadas não é relevante.

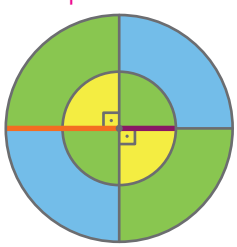
II) nenhum aspecto relativo à saúde infantil pode ser negligenciado.

III) em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria precisa ser reforçado.

IV) há necessidade de campanhas de conscientização que objetivem a eliminação das queimadas.

Professor, professora: A tarefa **29** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

26. Mariana está jogando dardos em um alvo como o da imagem a seguir.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Dica

Considere que a ponta do dardo tenha dimensões desprezíveis, isto é, que ela seja considerada um ponto, não podendo acertar duas cores diferentes ao mesmo tempo.

Sabendo que a probabilidade de acertar um dardo em determinada região é proporcional à medida de sua área e considerando um único arremesso aleatório que acerte em alguma região do alvo, qual é a probabilidade de que o dardo acerte em uma região:

a) verde? Resposta: $\frac{1}{2}$ ou 50%. **b)** amarela? Resposta: $\frac{1}{8}$ ou 12,5%. **c)** azul? Resposta: $\frac{3}{8}$ ou 37,5%.

27. Considere todos os números de 4 dígitos distintos que podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5 e 9. Qual é a probabilidade de que, em uma escolha ao acaso, seja tomado um número maior do que 4 593?
Resposta: $\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$ ou $58,\overline{3}\%$.

28. Em um recipiente, há bolinhas vermelhas, verdes e roxas, totalizando 33 bolinhas idênticas, que se diferenciam apenas pela cor. Determine a quantidade de bolinhas de cada cor, sabendo que, ao ser retirada uma bolinha aleatória, a probabilidade de ser uma bolinha verde é o triplo da probabilidade de ser roxa e o dobro da probabilidade de ser vermelha. Resposta: 9 bolinhas vermelhas, 18 verdes e 6 roxas.

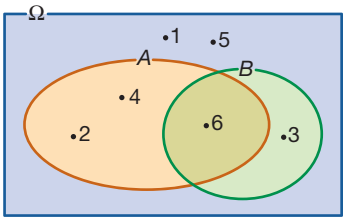
29. Elabore um problema envolvendo probabilidade. Depois, entregue o problema que você elaborou para um colega resolver e verifiquem se as respostas estão corretas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Probabilidade da união de dois eventos

Sendo A e B eventos de um mesmo espaço amostral, como podemos calcular a probabilidade de ocorrer ao menos um desses eventos?

Para responder a essa pergunta, vamos considerar o lançamento de um dado comum e os eventos A, "o número obtido ser múltiplo de 2", e B, "o número obtido ser múltiplo de 3". Nesse caso:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $n(\Omega) = 6$
- $A = \{2, 4, 6\}$; $n(A) = 3$
- $B = \{3, 6\}$; $n(B) = 2$

O diagrama nos auxilia a verificar que:

- $A \cap B = \{6\}$, ou seja, o elemento 6 satisfaz simultaneamente os eventos A e B.
- $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$, ou seja, os elementos 2, 3, 4 e 6 satisfazem o evento A ou B.

Calculando $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ e $P(A \cup B)$, temos:

- $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \dfrac{3}{6}$
- $P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$
- $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(B) = \dfrac{2}{6}$
- $P(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A \cup B) = \dfrac{4}{6}$

Portanto, em um lançamento, a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B é $\dfrac{4}{6}$ ou $66,\overline{6}\%$.

Com base nesses cálculos, podemos verificar que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

Para demonstrar essa igualdade, considere os eventos A e B de um espaço amostral Ω finito.

Da teoria de conjuntos, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Ao dividirmos ambos os membros dessa igualdade por $n(\Omega) > 0$, obtemos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(\Omega)} \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B, ou seja, a união dos dois eventos, é igual à probabilidade de ocorrer A mais a probabilidade de ocorrer B menos a probabilidade da interseção de A com B.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

OBJETO DIGITAL ***Podcast:*** Qual é a probabilidade de errar todas as questões do Enem?

Quando $A \cap B = \varnothing$, ou seja, A e B são conjuntos disjuntos, dizemos que os eventos são **mutuamente exclusivos**, isto é, a ocorrência de um deles exclui a possibilidade da ocorrência do outro.

Nesses casos, temos $n(A \cap B) = 0$ e $P(A \cap B) = 0$, logo $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R10. Em uma pesquisa realizada com 400 jovens de 15 a 20 anos, verificou-se que 200 estudam e 180 trabalham, e entre esses jovens, 130 estudam e trabalham. Qual é a probabilidade de que um dos jovens pesquisados, escolhido aleatoriamente, estude ou trabalhe?

Resolução

Sejam E e T os eventos "estude" e "trabalhe", respectivamente.

Temos:

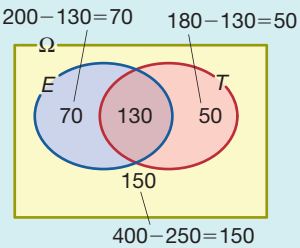
- $P(E) = \frac{200}{400}$
- $P(E \cap T) = \frac{130}{400}$
- $P(T) = \frac{180}{400}$

A probabilidade de que um jovem escolhido aleatoriamente estude ou trabalhe é dada por:

$$P(E \cup T) = P(E) + P(T) - P(E \cap T) =$$
$$= \frac{200}{400} + \frac{180}{400} - \frac{130}{400} = \frac{250}{400} =$$
$$= \frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\%$$

Observação

Podemos resolver essa situação de outra maneira, representando o total de jovens que estudam e trabalham no diagrama a seguir.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$$P(E \cup T) = \frac{n(E \cup T)}{n(\Omega)} = \frac{70 + 130 + 50}{400} =$$
$$= \frac{250}{400} = \frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\%$$

R11. Nos jogos de xadrez entre os amigos Evandro e Victor, o primeiro vence, em média, 3 a cada 5 jogos, e 1 a cada 10 jogos termina em empate. Determine, em média, a probabilidade de que em uma partida Victor seja o vencedor.

Resolução

Sejam E o evento "Evandro ser o vencedor da partida" e V o evento "Victor ser o vencedor da partida".

Obviamente, o evento $E \cap V = \varnothing$, já que em um jogo de xadrez não há como duas pessoas serem simultaneamente vitoriosas. Assim, $P(E \cap V) = 0$.

Com essas definições, $E \cup V$ é o evento "Evandro ou Victor é o vencedor da partida". Assim, considerando que $\frac{1}{10}$ das partidas termina em empate e que apenas uma pessoa é vencedora do jogo, temos:

$$P(E \cup V) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

Dessa maneira, considerando a informação do enunciado de que $P(E) = \frac{3}{5}$, obtemos a seguinte relação:

$$P(E \cup V) = P(E) + P(V) - P(E \cap V) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{9}{10} = \frac{3}{5} + P(V) - 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(V) = \frac{9}{10} - \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

Portanto, a probabilidade de que Victor seja o vencedor em uma partida é 3 em 10, ou $\frac{3}{10} = 30\%$.

OBJETO DIGITAL ***Podcast*:** Probabilidade em aniversários

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

30. Em baralhos comuns com 52 cartas, cada um dos 4 naipes tem 13 cartas e 9 delas são numeradas de 2 a 10. A carta que representa o 1 é a que contém a letra **A**, chamada ás, palavra originária do latim que significa "uma unidade". As outras 3 cartas – valete, dama e rei, também conhecidos como figuras – são representadas pelas iniciais das palavras em inglês: **J**, de *jack* (valete), **Q** de *queen* (rainha) e **K** de *king* (rei). Ao se retirar uma carta aleatoriamente de um desses baralhos, qual é a probabilidade de essa carta ser:

a) um rei de paus? Resposta: Aproximadamente 1,92%.

b) uma carta com o número 8? Resposta: Aproximadamente 7,69%.

c) um valete ou uma carta de ouros? Resposta: Aproximadamente 30,77%.

d) uma dama ou uma carta com o número 3? Resposta: Aproximadamente 15,38%.

e) uma carta de copas, que não seja figura? Resposta: Aproximadamente 19,23%.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

31. De um grupo de 48 pessoas, 36 têm cachorro como animal de estimação, 20 têm gato, 12 têm as duas espécies e os demais não têm ou têm outra espécie de animal de estimação. Escolhendo aleatoriamente uma pessoa desse grupo, qual é a probabilidade de ela ter:

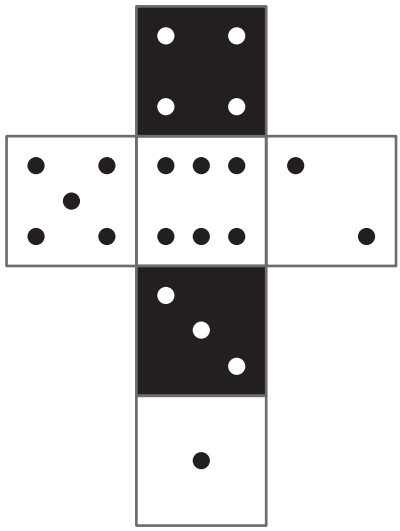
a) cachorro de estimação? Resposta: $\frac{3}{4}$ ou 75%.

b) cachorro ou gato de estimação? Resposta: $\frac{11}{12}$ ou $91,\overline{6}\%$.

c) apenas gato de estimação? Resposta: $\frac{1}{6}$ ou $16,\overline{6}\%$.

32. Em um jogo, que é decidido com apenas um lançamento do dado representado na planificação, quatro participantes vencem nos casos descritos a seguir.

- Luana: face preta ou número menor do que 4.
- Marcos: face branca ou número primo.
- Natália: face preta ou número 1.
- Otávio: face branca ou número menor do que 3.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Dica

Considere que, no lançamento do dado, a probabilidade de obtenção de qualquer face seja a mesma (eventos equiprováveis).

a) Qual dos participantes tem a menor probabilidade de vencer? Qual é essa probabilidade? Resposta: Natália; $\frac{1}{2}$ ou 50%.

b) Se em cada caso o termo **ou** for substituído por **e**, qual dos amigos terá a maior probabilidade de vencer? Qual é essa probabilidade? Resposta: Marcos e Otávio; $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$.

33. Dos 120 estudantes matriculados em certa academia, 62 praticam musculação, 48 participam das aulas de ginástica aeróbica e 20 praticam as duas modalidades de exercício físico. Ao ser sorteado um brinde entre os estudantes dessa academia, qual é a probabilidade de esse estudante praticar musculação ou ginástica aeróbica? Resposta: $\frac{3}{4}$ ou 75%.

34. Para a retirada da primeira Carteira Nacional de Habilitação (CNH), os candidatos devem ser considerados aptos nos exames médicos, psicológicos, de legislação de trânsito e de direção. A primeira CNH pode ser solicitada, por exemplo, nas categorias **A**, para condução de motocicletas de duas ou três rodas, e **B**, para condução de veículos que não contenham mais do que 8 lugares (excluindo o do motorista) e que não ultrapasse 3,5 t.

Em certo município, em uma semana, dos 120 candidatos que realizaram os exames médicos e psicológicos, 112 foram aprovados no exame médico, 104 foram considerados aptos no exame psicológico e apenas 6 não foram aprovados em nenhum desses exames. Qual é a probabilidade de, ao se escolher ao acaso uma das 120 pessoas, ela ter sido aprovada: 34. a) Resposta: $\frac{19}{20}$ ou 95%.

a) no exame médico ou no psicológico?

b) em ambos os exames? Resposta: $\frac{17}{20}$ ou 85%.

c) apenas no exame psicológico? Resposta: $\frac{1}{60}$ ou $1,\overline{6}\%$.

35. Certa professora de Matemática propôs 20 problemas para que os estudantes resolvessem em casa. O estudante **A** resolveu 17 e o estudante **B**, 14 desses problemas. Sabendo que é 95% a probabilidade de, ao ser sorteado um dos problemas, ele ter sido resolvido por um desses estudantes, calcule a probabilidade de ser sorteado um problema que foi resolvido por ambos os estudantes. Resposta: 60%

36. Escolhendo aleatoriamente um número natural de 1 a 100, qual é a probabilidade de que ele seja par, mas não seja múltiplo de 4? Resposta: $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ ou 25%.

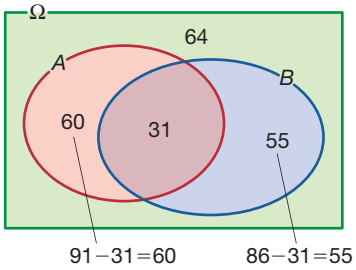
37. Gustavo tem uma coleção de filmes com 50 títulos distintos. Nela, 15 filmes têm o ator **A** no elenco, dos quais 10 foram dirigidos pelo cineasta **B**. Sabendo que 25 filmes foram estrelados pelo ator **A** ou dirigidos pelo cineasta **B** (podendo, inclusive, terem sido estrelados por **A** e dirigidos por **B** em simultaneidade), qual é a probabilidade de que, escolhendo ao acaso um título da coleção, o filme tenha sido dirigido pelo cineasta **B**? Resposta: $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$ ou 40%.

38. Segundo o noticiário, a probabilidade de que chova em algum momento durante o dia do aniversário de Camila é 79%, e a probabilidade de que em algum momento faça Sol nesse mesmo dia é 84%. Dessa maneira, qual é a probabilidade de que, no dia do aniversário de Camila, aconteça de chover em um período e fazer Sol em outro? Resposta: 63%

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Probabilidade condicional

Em uma pesquisa, foram entrevistados 210 estudantes. Nela, constatou-se que 91 praticam esportes coletivos (A), 86 praticam esportes individuais (B), 31 praticam os dois tipos de esporte e 64 não praticam esportes. Analise essas informações no diagrama de Venn.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Se necessário, construa o diagrama de Venn na lousa com os estudantes.

Vamos analisar três situações.

a) Sorteando um desses estudantes, a probabilidade de ele praticar os dois tipos de esporte é:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{31}{210}$$

Nessa situação, o espaço amostral é Ω, ou seja, todos os estudantes entrevistados.

b) Sorteando um estudante que pratica esporte coletivo (A), a probabilidade de ele praticar também esporte individual (B) é:

$$\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{31}{91}$$

Nessa situação, o espaço amostral é A, pois sorteamos um estudante entre os que praticam esportes coletivos (A), ou seja, os casos possíveis são os estudantes que praticam esportes coletivos.

Denominamos a razão $\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ de **probabilidade condicional de B em relação a A**, ou seja, a probabilidade de B ocorrer sabendo que A ocorreu, a qual indicamos por $P(B|A)$.

c) Sorteando um estudante que pratica esporte individual (B), a probabilidade de ele praticar também esporte coletivo (A) é:

$$\frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{31}{86}$$

Nessa situação, o espaço amostral é B, pois sorteamos um estudante entre os que praticam esportes individuais (B), ou seja, os casos possíveis são os estudantes que praticam esportes individuais.

Denominamos a razão $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ de **probabilidade condicional de A em relação a B**, ou seja, a probabilidade de A ocorrer sabendo que B ocorreu, a qual indicamos por $P(A|B)$.

Para escrever $P(A|B)$ em função de $P(A \cap B)$ e $P(B)$, dividimos o numerador e o denominador de $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ por $n(\Omega)$.

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \Rightarrow P(A|B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Sejam A e B eventos não vazios de um espaço amostral Ω. Denominamos probabilidade condicional de A em relação a B, a qual indicamos por $P(A|B)$, a probabilidade de ocorrer o evento A, sabendo que já ocorreu o evento B.

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Eventos dependentes e eventos independentes

Sabemos que a probabilidade de ocorrer o evento A dado que já ocorreu o evento B é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Desse modo:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Exemplo

De uma urna com trinta fichas numeradas de 1 a 30, serão retiradas duas fichas sem reposição. Qual é a probabilidade de o número em cada uma das fichas ser ímpar?

Para responder a essa pergunta, vamos considerar o evento B, "retirar a 1ª ficha e o número ser ímpar", o evento A, "retirar a 2ª ficha e o número ser ímpar", e calcular $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$.

Ao retirar a 1ª ficha, temos 15 números ímpares em um total de 30. A probabilidade de obter um número ímpar na 1ª retirada é:

$$P(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Ao retirar a 2ª ficha, já tendo retirado uma ficha com número ímpar sem reposição, temos 14 números ímpares em um total de 29. A probabilidade de obter um número ímpar na 2ª retirada é:

$$P(A|B) = \frac{14}{29}$$

Calculando $P(A \cap B)$, obtemos a probabilidade de ambos os números serem ímpares:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = \frac{14}{29} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{7}{29}$$

Portanto, a probabilidade de o número em cada uma das fichas ser ímpar é $\frac{7}{29}$.

Em situações em que os eventos A e B de um mesmo espaço amostral são **independentes**, ou seja, a ocorrência de um deles não influencia a ocorrência do outro, temos $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$. Assim:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Observação

Dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral que não são independentes são chamados **dependentes**.

Exemplo

Qual é a probabilidade de, ao lançar um dado comum duas vezes, obter em ambos os lançamentos um número par de pontos?

Vamos considerar o evento A, "número de pontos do 1º lançamento ser par", e o evento B, "número de pontos do 2º lançamento ser par". Podemos verificar que esses eventos são independentes, pois a ocorrência de um deles não influencia a ocorrência do outro. Então, para responder a essa pergunta, calculamos:

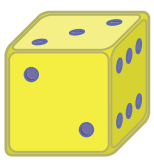
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Para obter um número par de pontos no 1º lançamento, temos três possibilidades em um total de seis. A probabilidade de obter um número par de pontos no 1º lançamento é:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Para obter um número par de pontos no 2º lançamento, ainda temos três possibilidades em um total de seis. Assim, temos:

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Calculando $P(A \cap B)$, temos:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Portanto, a probabilidade de obter um número par de pontos em ambos os lançamentos é $\frac{1}{4}$.

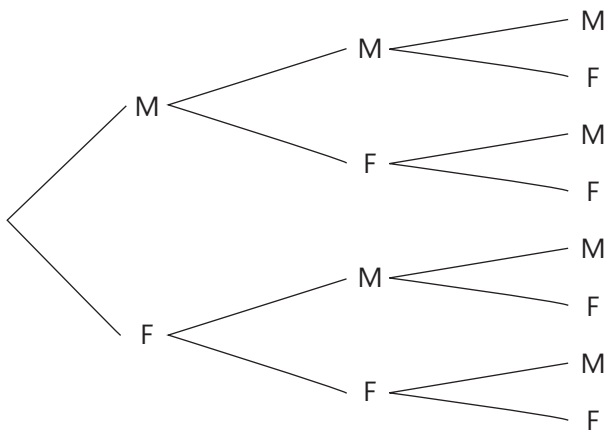
Se os eventos não vazios A e B de um mesmo espaço amostral são **dependentes**, então $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$. No caso em que A e B são **independentes**, temos $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Exercícios e problemas resolvidos

R12. Um casal planeja ter três filhos. Qual é a probabilidade de que o casal tenha exatamente dois filhos do sexo masculino (M), sabendo que o primeiro filho nascido é do sexo feminino (F)?

Resolução

Inicialmente, vamos determinar o espaço amostral Ω, que representa a possibilidade de o casal ter três filhos. Para isso, construiremos uma árvore de possibilidades.



Professor, professora: Verifique a possibilidade de propor aos estudantes o problema resolvido **R12**, antes de apresentar a resolução deste problema. Para isso, organize-os em duplas ou em pequenos grupos, apresente o enunciado do problema e oriente-os a resolver sem olhar a resolução do livro. Desse modo, eles podem empregar diferentes estratégias, como recorrer a diagramas com base nos conhecimentos prévios sobre probabilidade. Em seguida, promova uma conversa a fim de que todos possam compartilhar suas soluções.

Desse modo:

$$\Omega = \{(M, M, M), (M, M, F), (M, F, M), (M, F, F), (F, M, M), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)\}$$

Considerando o evento A, "dois filhos do sexo masculino", e o evento B, "primeiro filho é do sexo feminino", temos:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{8}$$

Observação

Os eventos A e B são dependentes, ou seja, a ocorrência de B influencia a ocorrência de A.

Por fim, calculamos a probabilidade de que o casal tenha exatamente dois filhos do sexo masculino, já tendo um primeiro filho do sexo feminino, ou seja, $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Portanto, essa probabilidade é $\frac{1}{4}$ ou 25%.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

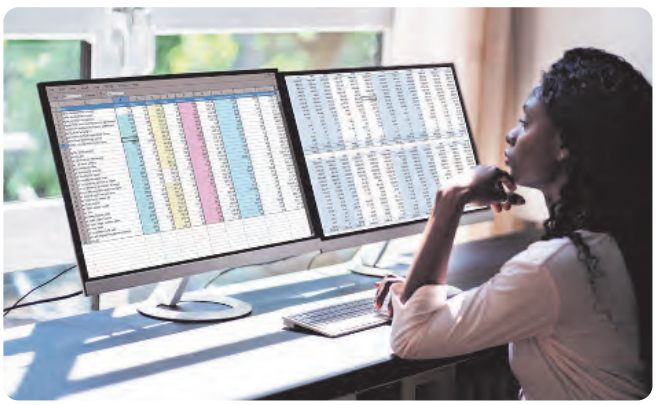
TRABALHO E JUVENTUDES

O que faz o cientista de dados?

O estudo das probabilidades pode ser aplicado para prever diversas situações, como o aumento da taxa de juros na economia, a quantidade de vencedores em um sorteio, a possibilidade de conquista em uma competição esportiva, a ocorrência de doenças em um grupo de pessoas etc.

Diversos profissionais usam a probabilidade para realizar suas atividades. O cientista de dados é um deles. Mas afinal, você sabe o que faz esse profissional?

O cientista de dados analisa grandes conjuntos de informações para transformá-los em dados que permitem avaliar riscos, certezas e outras condições para tomada de decisões. Esses dados são utilizados com diferentes finalidades e por distintas áreas, como a segurança pública, o setor financeiro, o setor de saúde e as empresas de tecnologia. Conheça a seguir como é a atuação do cientista de dados em cada uma dessas áreas.



ANDREY_POPOV/SHUTTERSTOCK

Cientista de dados analisando informações durante trabalho.

- Na segurança pública, os dados coletados por diferentes órgãos são integrados pelo cientista de dados em um mesmo sistema, com o objetivo de prevenir crimes e de identificar pessoas, por exemplo.
- No setor financeiro, o profissional sistematiza dados de diferentes fontes para identificar fraudes e avaliar riscos em investimentos, aplicações etc.
- Na área de saúde, ele analisa grandes volumes de dados com a intenção de identificar doenças e de prever possíveis impactos na saúde da sociedade. Esses estudos auxiliam outros cientistas no desenvolvimento de novos medicamentos e imunizantes para o tratamento de doenças.
- Em empresas de tecnologia, o profissional analisa dados gerados por produtos e serviços consumidos pelos usuários, permitindo o desenvolvimento de novas recomendações para os consumidores.

PARA EXPANDIR

Que tal conhecer o local de trabalho de um cientista de dados? Nessa visita, aproveite para conhecer mais sobre o dia a dia desse profissional.

Observação

Para se tornar cientista de dados, é necessário concluir o curso de graduação em Ciência de Dados. No Brasil, o curso é ofertado, principalmente, em instituições privadas de ensino.

O cientista de dados também pode atuar em organizações governamentais, com a análise de dados que auxiliam na criação e na melhoria de políticas públicas sociais, econômicas, educacionais, ambientais, entre outras.

1. Resposta pessoal. Incentive todos os estudantes a participar comentando se já conheciam a profissão. Na explicação das principais atribuições, os estudantes podem citar que o cientista de dados analisa grandes conjuntos de informações de diferentes áreas e as transformam em dados que podem ser usados, por exemplo, para avaliação de riscos e tomada de decisões, como financeiras, sanitárias, empresariais etc.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Você já conhecia a profissão de cientista de dados? Explique as principais atribuições dessa profissão.

2. De acordo com o texto, como a profissão de cientista de dados pode estar relacionada com a Matemática? Resposta: A profissão de cientista de dados pode estar relacionada no campo matemático com o estudo de probabilidades, a fim de antever determinada situação.

3. Pesquise outras duas áreas de atuação do cientista de dados. Escreva as principais informações de como é o trabalho nas áreas pesquisadas e depois apresente para os colegas.

Resposta pessoal. Os estudantes podem pesquisar informações de trabalho em algumas áreas, como empresas de desenvolvimento de *games*, empresas de *marketing* e lojas *e-commerce* (comércio eletrônico).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Professor, professora: Oriente os estudantes a consultar mais informações sobre os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS) no início do volume.

Anote as respostas no caderno.

39. De cada lote de vinte peças produzidas por uma máquina que está com um pequeno problema de regulagem, quatro apresentam algum tipo de defeito. Retirando-se aleatoriamente duas peças de um desses lotes, sem reposição, calcule a probabilidade de se retirar:

a) duas peças perfeitas. Resposta: $\frac{12}{19}$ ou aproximadamente 63,16%.

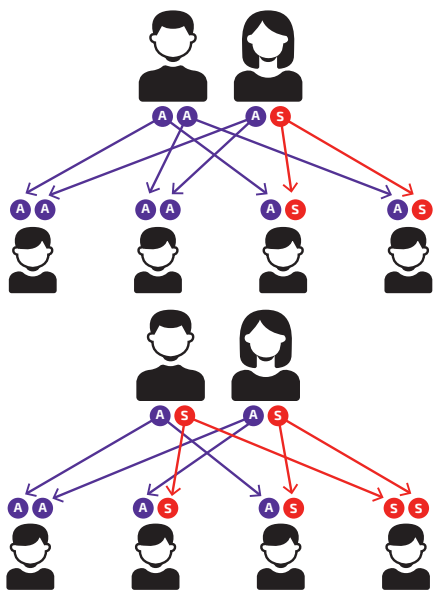
b) duas peças defeituosas. Resposta: $\frac{3}{95}$ ou aproximadamente 3,16%.

40. Os glóbulos vermelhos (ou hemácias) são células do sangue que, graças à hemoglobina **A**, transportam oxigênio dos pulmões aos tecidos. A hemoglobina **S**, uma variação genética, não oxigena o corpo adequadamente, causando **anemia falciforme**. Essa doença genética deforma os glóbulos vermelhos, dificultando o transporte de oxigênio. Os sintomas incluem dores, palidez, cansaços, olhos amarelados, febre, úlceras e maior propensão a infecções. O exame laboratorial específico que identifica a anemia falciforme é a eletroforese de hemoglobina, o qual é realizado na triagem de recém-nascidos, conhecido como teste do pezinho, ou quando houver necessidade de identificar traços da hemoglobina **S**. Existem tratamentos que proporcionam qualidade de vida e conforto e o transplante de medula óssea pode ser uma cura, desde que haja um doador compatível.

ODS 3

A maioria das pessoas recebe dos seus pais o gene para hemoglobina **A**. Como uma parte vem da mãe e a outra do pai, dizemos que seu genótipo é **AA**. As pessoas com anemia falciforme recebem de seus pais o gene para hemoglobina **S**, portanto têm genótipo **SS**. Quando uma pessoa herda de um dos pais o gene para hemoglobina **A** e do outro o gene para hemoglobina **S**, seu genótipo é **AS**, e dizemos que ela tem o traço falciforme, porém não desenvolverá a doença, conforme os esquemas a seguir.

Possibilidades para herança genética de anemia falciforme



No caso de um casal em que um deles tenha o traço falciforme (AS) e o outro não tenha esse traço nem a doença (AA), há 50% de probabilidade de um filho desse casal nascer com o traço falciforme e 50% de probabilidade de nascer sem o traço e sem a doença.

No caso de um casal em que ambos tenham o traço falciforme (AS), há 25% de probabilidade de nascer um filho desse casal sem o traço e sem a doença, 50% de probabilidade de nascer com o traço falciforme e 25% de probabilidade de nascer com a doença.

Observação

Nas imagens, a seta roxa indica a herança do gene para hemoglobina **A**, e a seta vermelha indica a herança do gene para hemoglobina **S**.

ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

40. e) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes compreendam que o teste do pezinho pode detectar precocemente doenças, permitindo tratamento e prevenindo complicações.

Com base nessas informações, responda às questões a seguir.

a) É possível um casal sem anemia falciforme ter um filho com anemia falciforme? Resposta: Sim, pois o casal pode ter o traço falciforme sem desenvolver a doença, conforme apresentado nos esquemas.

b) Um casal teve dois filhos, um com anemia falciforme e outro com o traço da doença. Como pode ser o genótipo dos pais? Resposta: **AS** × **SS** ou **AS** × **AS**.

c) Qual é a probabilidade de um casal, em que ambos tenham o traço falciforme, gerar:

- dois filhos sem a doença? Resposta: $\frac{9}{16}$ ou 56,25%.
- um filho com a doença e outro sem a doença? Resposta: $\frac{3}{16}$ ou 18,75%.

d) Uma mulher cujo pai tinha anemia falciforme casa-se com um homem cuja mãe tinha a doença e o pai não tinha o traço nem a doença. Qual é a probabilidade de esse casal ter um filho com o traço falciforme?

e) Em sua opinião, qual é a importância do teste do pezinho? Converse com os colegas e o professor.

f) Junte-se a um colega e pesquisem outras aplicações de probabilidade no estudo da genética. Depois, apresentem os resultados da pesquisa à turma. Resposta pessoal. Orientações sobre este item no **Suplemento para o professor**.

40. d) Resposta: $\frac{1}{2}$ ou 50%

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Professor, professora: Reforce com os estudantes sobre a importância do voto. Diga também que o voto é secreto, sendo um direito de todos os cidadãos brasileiros a partir dos 16 anos, conforme previsto na Constituição Brasileira.

41. O bloco lógico é composto de 48 peças que combinam cores, formatos, espessuras e tamanhos. Existem peças para todas as combinações possíveis, podendo ser amarelas, azuis e vermelhas, nos formatos circular, quadrangular, retangular e triangular, e ainda podem ser finas ou grossas, grandes ou pequenas. As 48 peças estão distribuídas da seguinte maneira: 16 peças de cada cor; 12 peças de cada formato; 24 peças de cada espessura e 24 peças de cada tamanho.

a) Ao escolher duas dessas peças aleatoriamente, qual é a probabilidade de ambas:

- serem vermelhas? Resposta: $\frac{5}{47}$ ou aproximadamente 10,64%.
- terem o mesmo formato? Resposta: $\frac{11}{47}$ ou aproximadamente 23,4%.

b) Qual é a probabilidade de se retirar uma peça com formato triangular entre as que não tenham formato circular? Resposta: $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$.

42. De acordo com uma revista não científica, que informa curiosidades, há alguns anos, a média do número dos calçados das mulheres era 35,5 e, atualmente, passou a ser 37,0. Intrigado com a notícia dessa revista, o diretor de um colégio resolveu verificar se esse fato se confirmava entre as funcionárias, fazendo uma pesquisa com as mulheres que trabalhavam no colégio. Como resultado, ele obteve as infomações a seguir.

Quantidade de funcionárias por número do calçado, em 2024

Número do calçado	Quantidade de funcionárias
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Fonte de pesquisa: Funcionárias do colégio.

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que o número de seu calçado é maior do que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é:

a) $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{5}$ **e)** $\frac{2}{5}$

b) $\frac{5}{7}$ **d)** $\frac{5}{14}$ Resposta: Alternativa **b**.

43. (UERJ, 2024) Para fazer o sorteio de um livro, quatro amigos colocaram três bolas brancas e duas pretas em uma caixa. Decidiram que o primeiro a retirar uma bola preta ficará com o livro. Na ordem alfabética de seus nomes, cada um retira uma bola, ao acaso, sem devolvê-la à caixa. A probabilidade de o terceiro amigo retirar a primeira bola preta e ficar com o livro é igual a: Resposta: Alternativa **b**.

a) 10% **b)** 20% **c)** 30% **d)** 40%

44. (Famema-SP, 2020) Uma confecção de roupas produziu um lote com um total de 150 camisetas, distribuídas entre os tamanhos P e M, sendo 59 lisas e as demais estampadas. Nesse lote, havia 100 camisetas tamanho P, das quais 67 eram estampadas. Retirando-se, ao acaso, uma camiseta desse lote e sabendo que seu tamanho é M, a probabilidade de que seja uma peça estampada é igual a: Resposta: Alternativa **c**.

a) 36%
b) 24%
c) 48%
d) 60%
e) 72%

Professor, professora: A tarefa **48** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

45. Para testar um novo medicamento contra certa doença e seus efeitos colaterais, foi feito um teste com 200 pessoas, sendo 25% sadias e as restantes portadoras da doença. Nesse teste, 160 pessoas tomaram o remédio e as restantes, **placebo**. Sabendo que 35 pessoas sadias tomaram placebo, qual é a probabilidade de escolher ao acaso uma pessoa que tomou o remédio entre as pessoas sadias? Resposta: $\frac{3}{10}$ ou 30%.

Placebo: substância neutra que substitui um medicamento com finalidade de controlar as reações psicológicas.

Professor, professora: Durante a realização da tarefa **45**, reforce aos estudantes que tomar medicamento sem prescrição médica pode ser prejudicial à nossa saúde.

46. No Brasil, o voto é facultativo para analfabetos, maiores de 70 anos e jovens de 16 a 18 anos. Para menores de 16 anos, o voto é proibido, e para o restante da população, é obrigatório. Em um bairro, 45% da população é composta de homens e 80% deles são obrigados a votar. Qual é a probabilidade de uma pessoa desse bairro, escolhida ao acaso, ser homem e não ser obrigado a votar? Resposta: $\frac{9}{100}$ ou 9%.

47. Para a realização do exame *antidoping* em certo campeonato de futebol, a confederação estipulou que seriam sorteados 2 jogadores de cada equipe, entre titulares e suplementares, após os 30 minutos da segunda etapa de cada jogo. Se uma equipe com 18 jogadores registrasse 4 com cartão amarelo até o momento do sorteio, qual é a probabilidade de ser sorteado para o exame *antidoping* um jogador que recebeu cartão amarelo, visto que já foi sorteado um jogador que recebeu cartão amarelo? Resposta: $\frac{3}{17}$ ou aproximadamente 17,65%.

48. De acordo com os resultados obtidos na pesquisa realizada no item **f** da tarefa **40**, elabore um problema envolvendo probabilidade. Em seguida, peça a um colega que o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

Resposta pessoal. A resposta depende dos resultados obtidos na pesquisa.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

49. Você já pensou na quantidade de resíduos sólidos que produzimos diariamente e para onde eles vão? É importante se preocupar e começar a agir, reduzindo, reutilizando e ajudando a reciclar. Seria ótimo se não gerássemos resíduo sólido algum em nossas atividades cotidianas; porém, como isso não ocorre, podemos nos esforçar para reduzir nossa produção com atitudes simples, como planejar compras, evitar desperdício de alimentos, substituir itens descartáveis, escolher produtos com menos embalagens e usar sacolas retornáveis. Muitos itens podem ser reutilizados, como garrafas de vidro que se transformam em decoração. Resíduos como óleo de cozinha e baterias precisam de descarte especial, pois podem contaminar o meio ambiente e prejudicar a saúde.

ODS 12

Dicas para descarte de resíduos sólidos

É essencial que façamos a separação e o descarte correto dos resíduos sólidos, pois esse é o primeiro passo para a reciclagem. Analise a seguir algumas dicas.

- Resíduos úmidos devem ser separados de resíduos secos.
- Armazene pilhas e baterias e leve-as a um posto de reciclagem.
- Os recipientes que serão reciclados devem ser descartados limpos e secos.
- Utilize uma garrafa PET limpa para armazenar óleo usado e, depois, leve a um posto de reciclagem.



MIRIAN WEYO/SHUTTERSTOCK

Pessoa armazenando óleo usado, depois de resfriado, em uma garrafa PET.

a) Em 2023, segundo dados do Ciclosoft 2023 (Panorama da Coleta Seletiva no Brasil) e do Cempre (Compromisso Empresarial para Reciclagem), aproximadamente 78% dos municípios brasileiros não tinham coleta seletiva efetiva, ou seja, aqueles municípios em que o serviço atende a, no mínimo, 50% de sua população (rural e urbana) na modalidade porta a porta realizada por agentes vinculados à prefeitura. Ao sortear um município brasileiro aleatoriamente, qual é a probabilidade de que ele tenha coleta seletiva efetiva? Resposta: $\frac{22}{100}$ ou 22%.

b) Em alguns locais públicos, são colocadas lixeiras coloridas a fim de separar o resíduo sólido a ser reciclado (vidro, plástico, metal e papel) e o orgânico. As cores atribuídas para cada tipo de material estão representadas a seguir. Resposta: $\frac{7}{20}$ ou 35%.



ANIMAFLORA PICS STOCK/SHUTTERSTOCK

Lixeiras utilizadas para coleta seletiva.

Uma pessoa desinformada, ao passar por uma dessas lixeiras, joga aleatoriamente uma embalagem de papel e uma lata metálica em lixeiras diferentes. Qual é a probabilidade de essa pessoa ter jogado pelo menos um dos materiais na lixeira correta? 49. d) Resposta pessoal. Orientações sobre este item no **Suplemento para o professor**.

c) No município em que você mora há algum tipo de coleta seletiva? Qual? Resposta pessoal. Orientações sobre este item no **Suplemento para o professor**.

d) Você tem o hábito de separar os resíduos sólidos? Relate como você faz.

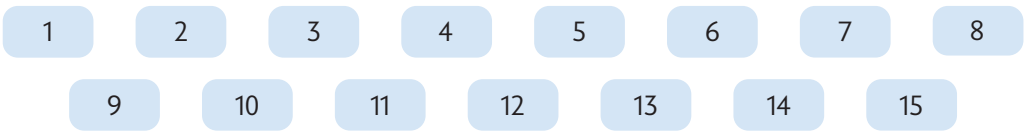
e) Pesquise e escreva uma lista de iniciativas que podem ser adotadas na escola para contribuir com o processo de reciclagem de resíduos sólidos. Depois, converse com os colegas e o professor sobre a importância da reciclagem. Resposta pessoal. Orientações sobre este item no **Suplemento para o professor**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Experimentos binomiais

Ao repetirmos um experimento várias vezes, sob as mesmas condições, de modo que as repetições sejam independentes umas das outras, a probabilidade de que ocorra certo evento em uma, duas, três ou todas as vezes em que o experimento for repetido pode ser calculada por meio da **lei binomial das probabilidades**.

Considere uma urna com as 15 fichas indicadas a seguir. Realizando cinco sorteios com reposição, qual é a probabilidade de, em exatamente três desses sorteios, ocorrer um número maior do que 10?



Nessa situação, para cada lançamento, o espaço amostral é:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

Além disso, considerando o evento A, "ocorrer um número maior do que 10", temos:

$$A = \{11, 12, 13, 14, 15\} \text{ e, consequentemente, } P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

$$\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \text{ e, consequentemente, } P(\overline{A}) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Observação

Lembre-se que $\overline{A}$ é o conjunto formado pelos elementos de Ω que não pertencem a A.

Nesses cinco sorteios, os eventos A e $\overline{A}$ podem ocorrer em diferentes ordens. Uma delas é $AAA\overline{A}\,\overline{A}$, ou seja, as três primeiras fichas sorteadas apresentarem números maiores do que 10 e as duas últimas, não. A partir dessa ordem, e sabendo que os sorteios são independentes, ou seja, a ocorrência de um não influencia na do outro, temos:

$$P(A \cap A \cap A \cap \overline{A} \cap \overline{A}) = P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) =$$

$$= [P(A)]^3 \cdot [P(\overline{A})]^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{27} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{243}$$

Essa é a probabilidade de ocorrer três vezes o evento A e duas vezes o evento $\overline{A}$, em determinada ordem. Devemos então multiplicar esse valor pela quantidade de ordens possíveis, que pode ser obtida por meio da combinação simples $\binom{5}{3}$.

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Portanto, como existem 10 ordens diferentes e a probabilidade de cada uma dessas ordens é $\frac{4}{243}$, a probabilidade de, em cinco sorteios, ocorrer exatamente três vezes o evento A é:

$$10 \cdot \frac{4}{243} = \frac{40}{243} \simeq 16{,}46\%$$

Se em um experimento aleatório a probabilidade de o evento A ocorrer em cada uma das n tentativas é dada por $P(A)$, então a probabilidade de o evento A ocorrer exatamente p vezes em n tentativas é:

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [P(\overline{A})]^{n-p}$$

sendo $n \geq p$ e $\overline{A}$ o evento complementar de A.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R13. Em 2024, uma das provas do Enem era a de Matemática e suas Tecnologias, composta de 45 questões. Sabendo que cada questão dessa prova continha cinco alternativas, das quais somente uma era correta, calcule a probabilidade de um candidato, ao marcar as alternativas aleatoriamente:

a) acertar 60% das questões.

b) errar todas as questões.

Professor, professora: Verifique a possibilidade de levar para a sala de aula diferentes modelos de calculadoras científicas ou solicitar aos estudantes que o tragam, caso tenham esse equipamento, a fim de conhecer as principais funções relacionadas aos conteúdos de probabilidade. Explore as funções da calculadora que permitam o cálculo, por exemplo, de combinações simples, destacando a importância da ordem na inserção dos valores, conforme o modelo de cada equipamento, para a obtenção de resultados corretos. Outra opção, caso disponham de aparelhos celulares compatíveis, é sugerir a instalação de aplicativos que simulem as funções de uma calculadora científica.

Resolução

Considere o evento A "marcar a alternativa correta em uma questão". Logo:

$$P(A) = \frac{1}{5}$$

a) Como os acertos são independentes, isto é, o acerto de uma questão não depende das demais, calculamos a probabilidade de acertar 60% do total de 45 questões da prova, ou seja, a probabilidade de o evento A ocorrer 27 vezes (p) em 45 tentativas (n). Sabendo que $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, podemos escrever:

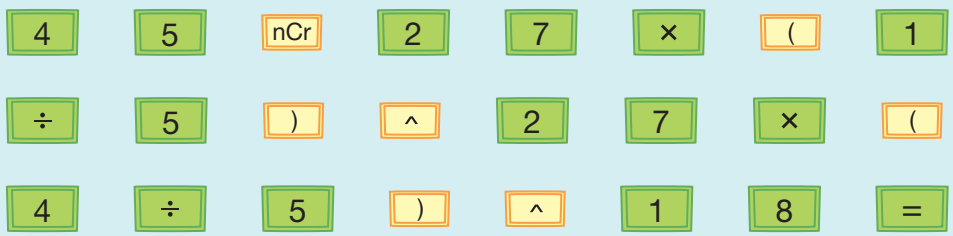
$$\binom{n}{p} \cdot \left[P(A)\right]^{p} \cdot \left[1 - P(A)\right]^{n-p} = \binom{45}{27} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{27} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{45-27} =$$

$$= \binom{45}{27} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{27} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{18} \simeq 0{,}000000004 = 0{,}0000004\%$$

Portanto, a probabilidade de um candidato, ao marcar as alternativas aleatoriamente, acertar 60% das questões é, aproximadamente, 0,0000004%.

Observação

Utilizando uma calculadora científica, podemos calcular $\binom{45}{27} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{27} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{18}$ digitando as seguintes teclas, na ordem apresentada.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Em algumas calculadoras, a tecla x^y substitui a tecla ^. Professor, professora: Diga aos estudantes que esse procedimento pode variar dependendo do modelo da calculadora.

b) Se a probabilidade de acertar uma questão é $P(A) = \frac{1}{5}$, então a de errar a questão é $P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

Calculamos a probabilidade de errar todas as 45 questões, ou seja, a probabilidade de o evento $\overline{A}$ ocorrer 45 vezes (p) em 45 tentativas (n).

$$\binom{n}{p} \cdot \left[P(\overline{A})\right]^{p} \cdot \left[1 - P(\overline{A})\right]^{n-p} = \binom{45}{45} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{45} \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right)^{45-45} =$$

$$= \underbrace{\binom{45}{45}}_{1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{45} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^{0}}_{1} = \left(\frac{4}{5}\right)^{45} \simeq 0{,}000043556 = 0{,}0043556\%$$

Portanto, a probabilidade de um candidato, ao marcar as alternativas aleatoriamente, errar todas as questões é, aproximadamente, 0,0043556%.

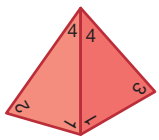
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

50. Uma loja de calçados constatou que 4 entre 5 clientes do sexo feminino compram sapatos com a numeração de 35 a 39. Num dia em que 12 mulheres compraram sapatos nessa loja, qual era a probabilidade de exatamente 9 delas terem comprado sapatos com a numeração apresentada?
Resposta: Aproximadamente 23,62%.

51. Considere um tetraedro regular em que, próximo a cada vértice, esteja escrito um dos números naturais de 1 a 4, em cada face adjacente a esse vértice. Ao lançarmos esse tetraedro, o número sorteado é o que estiver próximo ao vértice voltado para cima. Na figura, por exemplo, o número sorteado é 4.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Supondo que esse tetraedro seja lançado cinco vezes, calcule a probabilidade de:

a) ser sorteado o número 3 em exatamente dois lançamentos. Resposta: Aproximadamente 26,37%.

b) ser sorteado apenas o número 2.
Resposta: Aproximadamente 0,1%.

c) ser sorteado o número 4 apenas uma vez.
Resposta: Aproximadamente 39,55%.

d) não ser sorteado o número 1.
Resposta: Aproximadamente 23,73%.

52. Segundo as regras de um campeonato de futebol, uma partida deve ter início após um sorteio de cara ou coroa, e a equipe que ganhar o sorteio escolhe a direção em que atacará na 1ª etapa de jogo. Em seis partidas, qual é a probabilidade de uma equipe escolher a direção de ataque em exatamente cinco delas?
Resposta: Aproximadamente 9,38%.

53. O salto em distância é uma modalidade olímpica em que o objetivo é saltar a maior medida de distância possível. Os atletas correm em uma pista em direção a uma caixa com areia e saltam. Para que o salto seja válido, é necessário que o atleta o inicie antes da plataforma de decolagem. Em competições oficiais, os atletas efetuam o salto por três vezes, mas somente o melhor deles é considerado. Supondo que a probabilidade de certo atleta saltar mais de 8,5 m seja de 80%, qual é a probabilidade de esse atleta realizar exatamente dois saltos com mais de 8,5 m e uma competição? Resposta: 38,4%

54. Um jogador de basquetebol tem média de aproveitamento de 70% nos arremessos livres. Se em certo jogo esse jogador efetuar oito arremessos livres, qual é a probabilidade de ele:

a) acertar exatamente cinco arremessos.
Resposta: Aproximadamente 25,41%.

b) errar todos os arremessos.
Resposta: Aproximadamente 0,007%.

55. A probabilidade de uma mulher com menos de 30 anos gerar uma criança com síndrome de Down é aproximadamente 0,04%; já em uma mulher com 40 anos, a probabilidade é aproximadamente 0,9%. Isso ocorre devido a uma alteração genética causada por um erro na divisão celular durante a divisão embrionária.

Fonte de pesquisa: CAMPBELL, Neil A. *et al*. *Biology*. 8. ed. San Francisco: Pearson Benjamin Cummings, 2008. p. 299.

Supondo que a probabilidade de uma mulher gerar uma criança com síndrome de Down dos 20 aos 25 anos seja 0,04%, qual é a probabilidade de uma mulher ter três filhos nesse período e sem síndrome de Down? Resposta: Aproximadamente 99,88%.

56. Para uma pessoa ser aprovada em certo concurso, ela precisa passar por um teste composto de duas fases. A 1ª fase é uma prova objetiva com 10 questões de Matemática e 14 de Conhecimentos Gerais, em que apenas uma entre as quatro alternativas de cada questão está correta. Será classificado para realizar a 2ª fase, de teste físico, o candidato que atingir no mínimo 50% de aproveitamento em cada área da prova objetiva. Se um candidato assinalar aleatoriamente as respostas da prova objetiva, qual é a probabilidade de ele ser classificado para a 2ª fase com exatamente o aproveitamento mínimo?
Resposta: Aproximadamente 0,16%.

57. A probabilidade da ocorrência de combinações curiosas quanto ao sexo dos filhos de um casal acontece em diversos casos. Os filhos do casal norte-americano Emory Landon Harrison representam um agrupamento inusitado: 13 filhos, todos meninos. 57. a) Resposta: $\frac{1}{8192}$ ou aproximadamente 0,012%.


BETTMANN/GETTY IMAGES

Casal Emory Landon Harrison e seus 13 filhos homens, em Manhattan, Nova York, EUA, no dia 1º de maio de 1955.

a) Qual é a probabilidade de essa combinação de filhos acontecer em uma família com 13 filhos?

b) A probabilidade de ter 13 filhos do mesmo sexo é maior, menor ou igual à probabilidade de ter 13 filhos com alternância de sexo?
Resposta: Igual.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos experimentos aleatórios, espaço amostral, eventos, cálculo de probabilidade, probabilidade da união de dois eventos, probabilidade condicional, eventos dependentes, eventos independentes e experimentos binomiais. Agora, chegou a hora de refletir sobre o que você aprendeu! Como estratégia de estudos, sugerimos a você que faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os.

Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

2. A seguir, estão apresentados os principais conteúdos estudados neste capítulo.

- Experimentos aleatórios.
- Probabilidade.
- Probabilidade da união de dois eventos.
- Probabilidade condicional.
- Eventos dependentes.
- Eventos independentes.
- Experimentos binomiais.

Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

Você teve dificuldades em algum dos conteúdos? Não recorda algum desses conceitos? Ficou com dúvidas? Reflita sobre esses questionamentos e, se necessário, retome o que foi estudado.

3. Cite duas situações do cotidiano que podem ser relacionadas aos conteúdos estudados neste capítulo.

3. Sugestão de resposta: Calcular a probabilidade de sucesso de um tratamento médico baseado nas estatísticas de recuperação fornecidas por estudos clínicos e decidir a melhor rota para ir ao trabalho, considerando a probabilidade de trânsito.

4. Considerando o experimento aleatório "sortear ao acaso um número natural de 1 a 10", classifique as afirmativas a seguir em verdadeira ou falsa.

a) O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
Resposta: Verdadeira.

b) O evento "sortear um número maior do que 1 e menor do que 10" é certo.
Resposta: Falsa.

c) O evento "sortear um número primo menor do que 3" é unitário.
Resposta: Verdadeira.

5. Qual dos experimentos apresentados a seguir têm espaço amostral infinito?
Resposta: Alternativa **b**.

a) Sorteio aleatório de um número natural menor do que 10 000 000.

b) Escolher aleatoriamente um número real pertencente ao intervalo $]0, 1[$.

c) Lançamento de uma moeda.

9. Sugestão de resposta: Inicialmente, determina-se a probabilidade de sortear uma bolinha azul na primeira retirada, que é $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Ao retirar a segunda bolinha, já tendo retirado uma bolinha azul sem reposição, restam nove bolinhas na urna, sendo quatro delas azuis. A probabilidade de sortear uma bolinha azul na segunda retirada é $\frac{4}{9}$. Por fim, para determinar a probabilidade de ambos os eventos ocorrerem consecutivamente, é efetuado $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$.

6. Considere os eventos A e B de um mesmo espaço amostral. A probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B é dada por: Resposta: Alternativa **a**.

a) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

b) $P(A) + P(B)$

c) $P(A) \cdot P(B) - P(A \cap B)$

d) $P(A) \cdot P(B)$

8. Resposta: É usada a fórmula $P(Q|M) = \frac{n(Q \cap M)}{n(M)}$, em que Q é o evento "sortear um químico" e M é o evento "sortear uma mulher".

7. Quando dois eventos de um mesmo espaço amostral são classificados como independentes?

Resposta: Dois eventos são independentes se a ocorrência de um não afetar a ocorrência do outro.

8. Na tabela, estão apresentadas informações sobre os participantes de um Congresso de Ciências.

Considerando o experimento em que é escolhido ao acaso um desses participantes, como você faria para calcular a probabilidade de o sorteado ser químico, sabendo que ele é mulher?

Quantidade de participantes de certo Congresso de Ciências, em 2025

Participantes	Especialidades		
	Físicos	Químicos	Biólogos
Homens	35	30	45
Mulheres	20	40	40

Fonte de pesquisa: Organização do Congresso.

10. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

9. Considere uma urna com dez bolinhas idênticas, que se diferenciam apenas pela cor, das quais cinco são vermelhas e cinco, azuis. Como você faria para calcular a probabilidades de, ao sortear duas bolinhas dessa urna, sem reposição, ambas serem azuis?

10. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo-o. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

11. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

11. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo. Nela, use desenhos e dê exemplos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 3

ESTATÍSTICA



NDAB CRATIVITY/SHUTTERSTOCK

Momento descontraído de uma família durante uma videochamada com parentes.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O filósofo canadense Marshall McLuhan (1911-1980) criou em 1962 o termo **Aldeia Global**, para simbolizar que, com o avanço de tecnologias da informação e comunicação, as distâncias entre países e povos se reduziam a tal ponto que o mundo todo poderia ser analisado como uma vila, com tradições, padrões e culturas globais. McLuhan via o rádio e a televisão como um sistema nervoso de informação, bombardeando pessoas com notícias e informações sobre política e tempo. Sua análise, contudo, ia além e considerava outros dispositivos para a criação da Aldeia Global, como o desenvolvimento do automóvel, do avião, do telefone, entre outros. Ele considerava esses dispositivos extensões do corpo humano, como a televisão, que passou a levar os olhos muito além do nosso campo de visão, o rádio, que expande nossa audição a outras partes do globo, e o automóvel, que permite aos nossos pés percorrer grandes distâncias. O desenvolvimento da internet e dos *smartphones*, na última década, apenas realça esse sentimento de que os ***gadgets*** podem ser considerados extensões do ser humano.

Gadgets: dispositivo eletrônico portátil.

Observação

Quanto maior for o total de usuários, maior será o impacto que a tecnologia gera.

A internet comercial no Brasil começou de modo experimental em dezembro de 1994, com apenas cinco mil usuários. Uma implantação mais ampla teve início em maio de 1995. De acordo com pesquisas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), 87,2% da população brasileira usava a internet em 2022. Essa porcentagem corresponde a aproximadamente 177,1 milhões de pessoas, o que equivale a cerca de 35 420 vezes o total de usuários em dezembro de 1994.

Neste capítulo, você vai estudar:

- gráficos e tabelas;
- inadequações em gráficos e tabelas;
- medidas de tendência central;
- medidas separatrizes;
- medidas de dispersão;
- estatística e probabilidade.

2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes se deparem frequentemente com informações representadas em tabelas e gráficos, uma vez que essas ferramentas são constantemente utilizadas nos meios de comunicação e nas mídias.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Você considera que vive em uma Aldeia Global? Por quê?
Resposta pessoal. Orientações sobre essa questão no **Suplemento para o professor**.

2. Diante da quantidade de informações que circulam diariamente, com que frequência você se depara com dados estatísticos?

3. Em sua opinião, por que é importante ler, interpretar e saber representar dados estatísticos? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes compreendam que essas habilidades permitem uma análise eficaz das informações, apoiam a tomada de decisões conscientes e facilitam a comunicação de resultados, de maneira clara e precisa.

Introdução

Não é de agora que a estatística é uma ferramenta importante para a humanidade. Um exemplo são os registros de contagem da população desde antes da Era Cristã, como o recenseamento ocorrido no Egito por volta de 2900 a.E.C. O registro mais antigo de tal conjunto de dados, que recebe o nome "censo", data de 2238 a.E.C., na China. No Brasil, o primeiro censo foi realizado em 1872, antes mesmo de nos tornarmos república.

Os estudos estatísticos sobre a população brasileira ou sobre uma amostra representativa dela permitem realizar previsões, assim como é feito periodicamente no IBGE para estimar essa quantidade de pessoas.

Os meios de comunicação e as evoluções tecnológicas proporcionam cada vez mais informações apresentadas com tratamento estatístico, como o uso de gráficos, tabelas e medidas estatísticas, assuntos que estudaremos neste capítulo. Ao nos depararmos com essas informações, é importante ter a capacidade de interpretar, compreender, estabelecer relações e realizar previsões com base nos dados expostos.

Variáveis estatísticas

Quando o IBGE realiza os chamados "censos", busca obter informações sobre o perfil da população brasileira, tais como idade, sexo, grau de instrução, renda, tipo de moradia etc. Em estatística, esses itens são denominados **variáveis**.

Quando uma variável está relacionada a um valor numérico, como a altura de uma pessoa ou o total de espécies de animais em um ambiente, é denominada **variável quantitativa**. Já aquela que está relacionada a uma qualidade ou a um atributo, como o sexo de um indivíduo ou o grau de instrução de um trabalhador, é denominada **variável qualitativa**.

Uma variável quantitativa pode ser classificada em:

- **variável quantitativa discreta**, quando pode assumir certos valores que, em geral, são expressos por números inteiros, obtidos mediante algum modo de contagem. A quantidade de clientes de um restaurante, a quantidade de estudantes matriculados em uma escola e a quantidade de atendimentos em um hospital são exemplos desse tipo de variável;
- **variável quantitativa contínua**, quando, teoricamente, pode assumir valores dados em um intervalo real. Resulta, em geral, de uma mensuração. A massa de uma pessoa é um exemplo de variável quantitativa contínua, pois ela pode assumir como valor, por exemplo, 72 kg, 72,5 kg ou 72,58 kg.

Por sua vez, uma variável qualitativa pode ser classificada em:

- **variável qualitativa ordinal**, quando se refere a uma categoria que, mesmo não sendo numérica, pode ser ordenada. O nível de desenvolvimento de um país é um exemplo desse tipo de variável, pois pode haver alto, médio ou baixo nível de desenvolvimento;
- **variável qualitativa nominal**, quando não é numérica, tampouco passível de ordenação subjetiva. A cor dos automóveis vendidos em uma concessionária e o esporte predileto de uma pessoa são exemplos dessa variável.

Observação

A fim de simplificar a escrita, não distinguiremos grandezas de suas respectivas medidas. Desse modo, utilizaremos expressões do tipo "altura de uma pessoa" quando, na realidade, queremos nos referir à medida da altura da pessoa.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

População e amostra estatística

Quando uma pesquisa estatística é planejada, diversos elementos relacionados a ela devem ser definidos, como as variáveis que constarão no questionário. Outro fator importante no planejamento é estabelecer quem será consultado na pesquisa. Para obter a altura dos estudantes de uma turma do Ensino Médio, por exemplo, é possível consultar todos eles, que constituem a **população** ou o **universo estatístico** dessa pesquisa.

Em outros casos, é impossível ou inviável consultar todos os indivíduos da pesquisa. Durante as campanhas eleitorais para presidente da República, por exemplo, é inviável questionar todos os eleitores do país sobre a intenção de voto, pois isso demandaria muito tempo e muitos recursos financeiros. Nesses casos, seleciona-se um subconjunto da população, chamado **amostra**, que possa representá-la da melhor maneira possível. Para que a amostra seja representativa, ela deve ter as principais características da população à qual pertence. No exemplo apresentado, os eleitores selecionados para responder sobre a intenção de voto para a eleição presidencial correspondem à amostra da pesquisa.

OBJETO DIGITAL
Vídeo: Método de captura e recaptura simples

Levantamentos amostrais

Em pesquisas amostrais, a amostra é obtida por meio de certos processos, com base em uma população bem definida. As amostragens subdividem-se em dois grupos: não probabilística e probabilística.

Amostragem não probabilística: fica a cargo do pesquisador a definição de parâmetros e critérios para a escolha dos elementos da amostra.

Amostragem probabilística: a escolha de um elemento é feita de modo aleatório, por sorteio não viciado, de tal maneira que seja conhecida a probabilidade de cada elemento da população pertencer à amostra. Esse é o tipo mais usado em pesquisas científicas.

Observação

Pesquisas realizadas com toda a população são chamadas **pesquisas censitárias**. Já as pesquisas feitas com uma amostra da população são chamadas **pesquisas amostrais**.

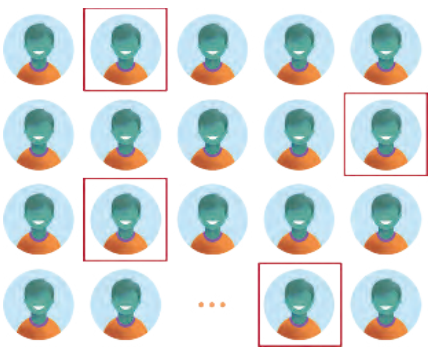
Vamos apresentar alguns exemplos de amostragem probabilística: aleatória simples, sistemática e estratificada.

Amostragem aleatória simples: nesse tipo de amostragem, todos os elementos da população têm a mesma probabilidade de pertencer à amostra. A amostragem aleatória simples é indicada apenas quando a população é homogênea.

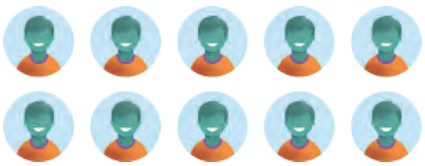
Exemplo

Uma loja deseja fazer uma pesquisa de satisfação com seus clientes. Para isso, ela solicitará a 10 clientes, de um banco de dados de 100 pessoas, que preencham um questionário.

População (100 pessoas)



Amostra (10 pessoas)



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Amostragem sistemática: nessa amostragem, os elementos da população devem ser organizados em determinada ordem ou listagem (possibilitando a identificação de cada um deles), e a escolha dos elementos é feita conforme um critério ou fator de repetição. A amostragem sistemática é indicada apenas quando a população é homogênea.

Exemplo

Em uma linha de produção, a cada lote de 150 camisetas, retiram-se 20 para análise de qualidade. Para determinar quais serão os elementos da amostra, podemos realizar os seguintes procedimentos.

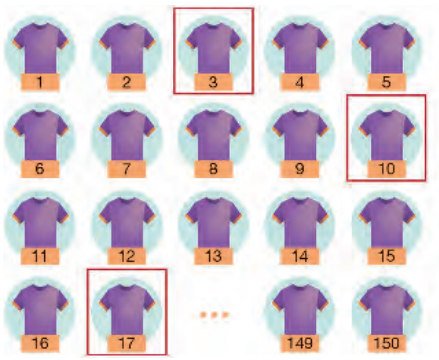
A. Calculamos a razão entre o número de elementos da população (N) e o total de elementos da amostra (n). Nessa etapa, consideramos apenas a parte inteira R da razão.

B. Sorteamos um número inteiro S no intervalo de 1 a R. Em seguida, determinamos a quantidade correspondente a cada elemento que pertencerá à amostra. Para isso, fazemos:

$$S \qquad S + R \qquad S + 2R \qquad \cdots \qquad S + (n - 1) \cdot R$$

Como $\frac{150}{20} = 7{,}5$, então $R = 7$. Assim, se o número sorteado S for 3, temos:

População (150 camisetas)



Amostra (20 camisetas)



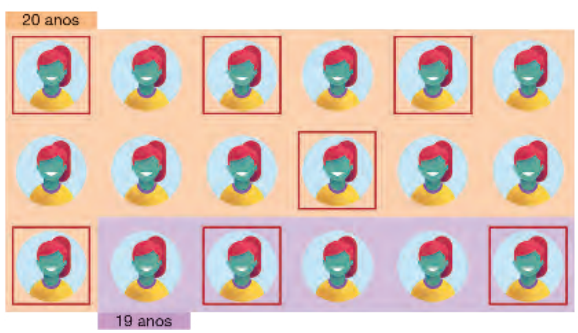
ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Amostragem estratificada: nesse tipo de amostragem, a população é dividida em subgrupos homogêneos (estratos). Em geral, a amostra é composta com base em um sorteio simples dos elementos desses estratos. Como exemplos, podemos citar sexo, faixa etária, escolaridade, entre outros.

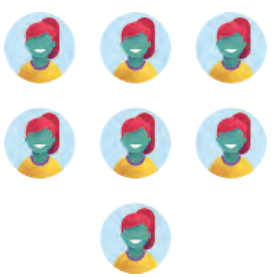
Exemplo

Certa universidade vai fazer uma pesquisa com as estudantes do 2º período do curso de Matemática. Determinou-se que, das 18 estudantes (todas com 19 ou 20 anos de idade), serão entrevistadas 5 com 20 anos de idade e 2 com 19 anos de idade.

População (18 estudantes)



Amostra (7 estudantes)



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Podemos classificar a amostragem estratificada em **uniforme** ou **proporcional**. A primeira é composta de uma quantidade igual de elementos de cada estrato. Já na amostragem estratificada proporcional, o total de elementos de cada estrato é condicional ao total de elementos dele.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1. Classifique as pesquisas apresentadas em censitárias ou amostrais.

a) Em uma pesquisa estatística cujo objetivo era determinar quem gosta de Matemática, foram entrevistados todos os estudantes de uma escola. Resposta: Pesquisa censitária.

b) Certa lanchonete, a fim de fazer uma pesquisa de satisfação, entrevistou 100 dos 1 000 clientes que compraram no mês de janeiro. Resposta: Pesquisa amostral.

2. Classifique cada variável apresentada no questionário em quantitativa discreta, quantitativa contínua, qualitativa ordinal ou qualitativa nominal.

Resposta: Quantitativa discreta: idade (em anos) e quantidade de filhos; quantitativa contínua: massa (em kg) e altura (em cm); qualitativa ordinal: grau de instrução; qualitativa nominal: gênero e estado civil.

Idade (em anos): _____

Gênero: ( ) M ( ) F

Grau de instrução:
( ) Fundamental
( ) Médio
( ) Superior

Estado civil:
( ) Solteiro
( ) Casado
( ) Divorciado
( ) Viúvo

Quantidade de filhos: _____

Massa (em kg): _____

Altura (em cm): _____

4. Resposta: Quando todo elemento da população *P* também é elemento da amostra *A*, ou seja, quando todos os elementos da população serão pesquisados.

5. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que o fabricante utilizará uma amostra, uma vez que é inviável realizar a simulação com todas as 800 unidades produzidas mensalmente desse modelo de automóvel.

6. c) Sugestão de resposta: Inicialmente, deveria organizar os elementos da população em determinada ordem ou listagem (possibilitando a identificação de cada um deles). Em seguida, escolher os elementos que compõem a amostra conforme um critério ou fator de repetição.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

3. Na Pesquisa Nacional por Amostragem de Domicílio Contínua (Pnad Contínua), o IBGE, para obter informações referentes à inserção da população no mercado de trabalho e a características como idade, gênero e nível de instrução, bem como permitir o estudo do desenvolvimento socioeconômico do país, aplica um questionário em uma amostra de domicílios. Resposta pessoal. Orientações sobre essa tarefa no **Suplemento para o professor**.

Elabore um questionário a ser aplicado à turma em que você estuda utilizando variáveis quantitativas e qualitativas. Por fim, estabeleça um tipo de amostragem: aleatória simples, sistemática ou estratificada.

4. Seja *P* o conjunto dos elementos que compõem determinada população em uma pesquisa estatística e *A* um subconjunto de *P*, correspondente à amostra que será pesquisada. Em que circunstância temos $A = P$?

5. Uma fábrica de automóveis pretende produzir mensalmente 800 unidades de um novo modelo. Porém, com o objetivo de testar os itens de segurança, a fábrica vai fazer uma pesquisa simulando acidentes com esse automóvel. Em sua opinião, nessa pesquisa, o fabricante utilizará todos os automóveis produzidos ou uma amostra dos automóveis desse novo modelo? Justifique sua resposta.

6. Certa livraria fez uma pesquisa sobre o gênero literário preferido dos clientes. Para isso, inicialmente, o banco de clientes foi dividido em dois grupos (homem ou mulher) e, em seguida, foram sorteadas 35 pessoas de cada grupo, compondo, assim, a amostra da pesquisa.

a) Qual tipo de amostragem essa livraria utilizou na pesquisa apresentada? Resposta: Amostragem estratificada.

b) A pergunta principal do questionamento era: Qual é seu gênero literário preferido?

Classifique a variável apresentada nessa pergunta em quantitativa discreta, quantitativa contínua, qualitativa ordinal ou qualitativa nominal. Resposta: Variável qualitativa nominal.

c) Caso a livraria optasse por utilizar uma amostragem sistemática, quais procedimentos ela deveria seguir?

7. Uma empresa produz diariamente 100 lotes com 500 peças cada um. Para garantir a qualidade dos produtos, são analisadas, por dia, 200 peças da produção.

a) Quantos por cento da produção são analisados diariamente? Resposta: 0,4%

b) Em sua opinião, qual tipo de amostragem essa empresa deveria utilizar para compor a amostra analisada? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes citem um entre os tipos de amostragem estudados (amostragem aleatória simples, amostragem sistemática ou amostragem estratificada).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Gráficos e tabelas

Os gráficos e as tabelas são recursos estatísticos muito úteis para apresentar os resultados obtidos em uma pesquisa. As tabelas são utilizadas para organizar as informações e apresentá-las de modo mais simples ao leitor. Já os gráficos, além de simplificar a exposição dos dados obtidos na pesquisa, possibilitam uma análise mais detalhada acerca da evolução das variáveis ou de como elas se relacionam. Há diversos tipos de gráficos, e a escolha do mais adequado à situação depende de uma série de fatores, como o objetivo do pesquisador e as características das informações a serem apresentadas.

Professor, professora: Converse com os estudantes a respeito da importância de apresentar as fontes utilizadas nas pesquisas. Na atualidade, com a popularização de meios de comunicação, como redes sociais e aplicativos de conversa, a transmissão de informações se tornou veloz, mas pouco criteriosa, favorecendo o fenômeno das chamadas *fake news* (notícias falsas). Explique por que a indicação de uma fonte de pesquisa confiável é um elemento essencial na credibilidade das informações.

Tabelas

Assim como os gráficos, as **tabelas** devem apresentar em sua estrutura **título** e **fonte de pesquisa**. O título deve conter informações suficientes para explicitar o que é apresentado. A fonte de pesquisa deve identificar a origem dos dados que aparecem nela.

Em tabelas, os dados são apresentados em linhas e colunas, contribuindo para a leitura e a interpretação das informações.

Analise a tabela a seguir.

Pontos mais elevados do Brasil, em 2023

Nome (estado)	Altitude (m)
Pico da Neblina (AM)	2 995,3
Pico 31 de Março (AM)	2 974,2
Pico da Bandeira (ES/MG)	2 891,4
Pedra da Mina (MG/SP)	2 798,2
Pico das Agulhas Negras (MG/RJ)	2 791,1
Pico do Cristal (MG)	2 769,1
Monte Roraima (RR)	2 734,9

Fonte de pesquisa: IBGE. *Anuário Estatístico do Brasil*. Disponível em: https://anuario.ibge.gov.br/images/aeb/2023/s1/2_pdf/s1t3201.pdf. Acesso em: 10 ago. 2024.

Observação

Na tabela apresentada, o título é "Pontos mais elevados do Brasil, em 2023" e a fonte de pesquisa é "IBGE".

Analisando a tabela, chegamos a algumas conclusões, como a de que o ponto de maior altitude no Brasil é o Pico da Neblina e a de que o Pico do Cristal, em Minas Gerais, tem 2 769,1 m de altitude.

Para chegarmos a essas conclusões, devemos analisar a tabela horizontalmente, ou seja, verificar suas linhas. Contudo, há tabelas em que devemos analisar, simultaneamente, as linhas e as colunas. Essas são as **tabelas de dupla entrada**.

Pessoas indígenas por localização do domicílio, segundo as regiões brasileiras, em 2022

Região	Dentro de terras indígenas	Fora de terras indígenas
Norte	316 496	436 861
Nordeste	129 934	398 866
Centro-Oeste	113 943	85 969
Sudeste	21 519	101 850
Sul	40 174	47 923

Fonte de pesquisa: IBGE. *Censo Demográfico 2022*: Indígenas: Primeiros resultados do universo. Rio de Janeiro, 2023. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv102018.pdf. Acesso em: 10 ago. 2024.



EDSON SATO/PULSAR IMAGENS

Estudantes indígenas da etnia Guarani Kaiowá desfilando em comemoração ao Sete de Setembro, na cidade de Amambai, no estado do Mato Grosso do Sul, em 2012.

Nessa tabela, para identificar a quantidade de pessoas indígenas brasileiras que viviam em terras indígenas na região Nordeste em 2022, devemos analisar o valor correspondente à coluna "Dentro de terras indígenas" e à linha "Nordeste". Em 2022, essa quantidade era de 129 934 pessoas indígenas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

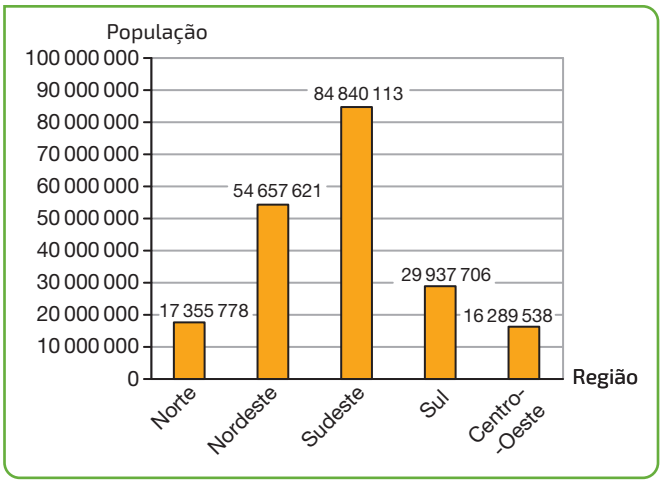
Gráfico de barras

Os **gráficos de barras** (ou de **colunas**) representam os dados pesquisados por meio de regiões retangulares que podem estar dispostas na vertical (**gráfico de barras verticais**) ou na horizontal (**gráfico de barras horizontais**). Esse tipo de gráfico é muito utilizado para comparar entre si os dados obtidos na pesquisa.

No gráfico de barras verticais, as regiões retangulares têm larguras iguais e alturas proporcionais aos valores representados. Já no gráfico de barras horizontais, as regiões retangulares têm alturas iguais e as larguras variam proporcionalmente aos valores representados. Acompanhe os exemplos.

Gráfico de barras verticais

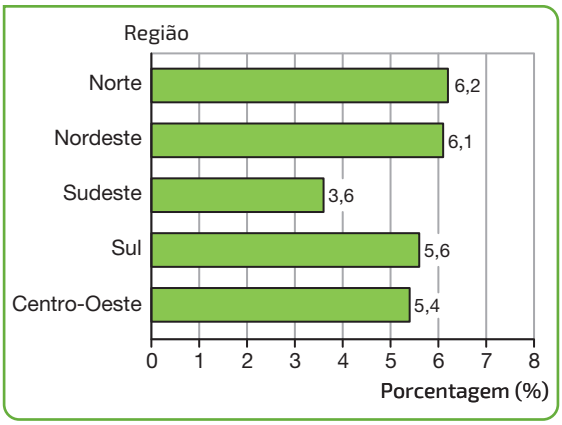
População brasileira estimada por região, em 2022



Fonte de pesquisa: IBGE. *Sidra*. Disponível em: https://sidra.ibge.gov.br/tabela/1209#resultado. Acesso em: 3 jun. 2024.

Gráfico de barras horizontais

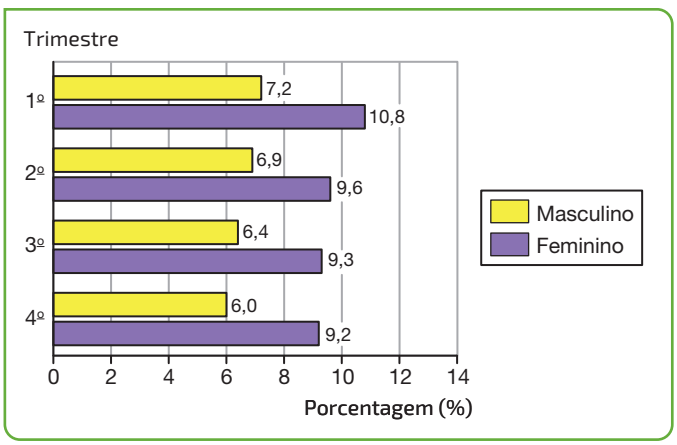
Percentual de jovens de 15 a 17 anos de idade fora da escola por região, em 2022



Fonte de pesquisa: IBGE. *Síntese de Indicadores Sociais*. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/educacao/9221-sintese-de-indicadores-sociais.html?edicao=38475&t=resultados. Acesso em: 3 jun. 2024.

Há também os **gráficos de barras múltiplas**, em que é possível representar mais de um fenômeno no mesmo gráfico de barras verticais ou horizontais, contribuindo para a comparação e a verificação de relações entre eles.

Taxa de desocupação da população brasileira, em 2023



Fonte de pesquisa: IBGE. *PNAD Contínua - Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua*. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/trabalho/9173-pesquisa-nacional-por-amostra-de-domicilios-continua-trimestral.html?=&t=resultados. Acesso em: 3 jun. 2024.

Professor, professora: Questione os estudantes a respeito da diferença entre as taxas de desocupação por gênero. Se necessário, enfatize que a desocupação representa a parcela da população que não está trabalhando. Verifique se eles identificam quais são as possíveis motivações para que haja significativa diferença entre o dado de desocupação de homens e mulheres. Incentive a reflexão sobre as tarefas de cuidado doméstico realizadas majoritariamente por mulheres e pergunte-lhes se acham que essas situações podem estar relacionadas.

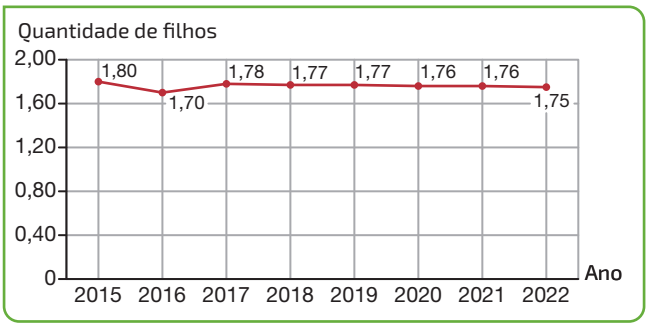
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Gráfico de linhas

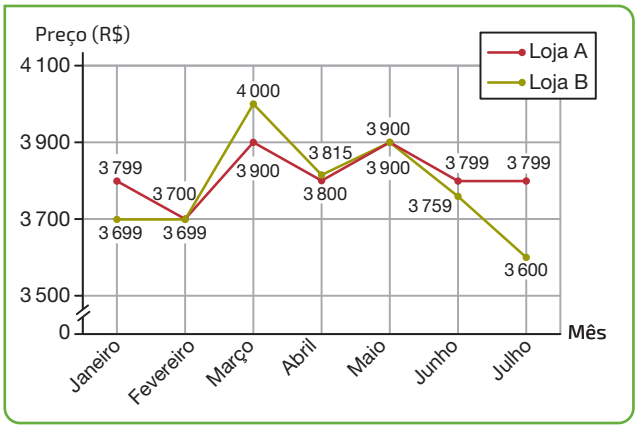
Os **gráficos de linhas** (ou **gráficos de segmentos**) são utilizados, em geral, para representar a variação contínua de um fenômeno no decorrer do tempo. Esse tipo de gráfico facilita suposições em relação a tendências do fenômeno pesquisado em períodos posteriores ao apresentado, como crescimento, decrescimento ou constância.

Taxa de fecundidade no Brasil, de 2015 a 2022



Fonte de pesquisa: IBGE. *Brasil em números*. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. v. 31. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/2/bn_2023_v31.pdf. Acesso em: 23 set. 2024.

Preço de um *notebook* nas lojas A e B, de janeiro a julho de 2024



Fonte de pesquisa: *Site* das lojas **A** e **B**.

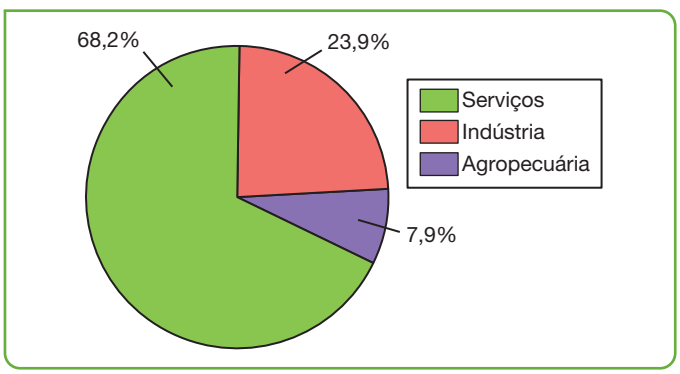
ILUSTRAÇÕES: VINÍCIUS COSTA/ARQUIVO DA EDITORA

Gráfico de setores

Professor, professora: As informações apresentadas no gráfico são fictícias.

Os **gráficos de setores**, em geral, são utilizados para comparar as partes de um conjunto de dados com o todo. Para isso, costuma-se utilizar a porcentagem correspondente a cada uma dessas partes. Esse gráfico consiste em um círculo dividido em tantas partes quantas forem as divisões dos dados, e cada setor obtido é proporcional à parte por ele representada.

Distribuição do PIB brasileiro por setor, em 2022



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: IBGE. *Indicadores IBGE*: Contas Nacionais Trimestrais, Indicadores de Volume e Valores Correntes. out.-dez. 2022. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/2121/cnt_2022_4tri.pdf. Acesso em: 3 jun. 2024.

É possível obter a medida do ângulo central correspondente a cada setor desse gráfico. Para isso, indicaremos por x_A, x_B, x_C o ângulo central correspondente aos setores agropecuária, indústria e serviços, respectivamente, e utilizaremos regra de três.

Agropecuária

$$\begin{matrix}100\% \\ \hat{1} \\ \underbrace{0{,}079}_{7{,}9\%}\end{matrix} = \frac{360^\circ}{x_A}$$

$x_A = 28{,}44^\circ$

Indústria

$$\begin{matrix}100\% \\ \hat{1} \\ \underbrace{0{,}239}_{23{,}9\%}\end{matrix} = \frac{360^\circ}{x_B}$$

$x_B = 86{,}04^\circ$

Serviços

$$\begin{matrix}100\% \\ \hat{1} \\ \underbrace{0{,}682}_{68{,}2\%}\end{matrix} = \frac{360^\circ}{x_C}$$

$x_C = 245{,}52^\circ$

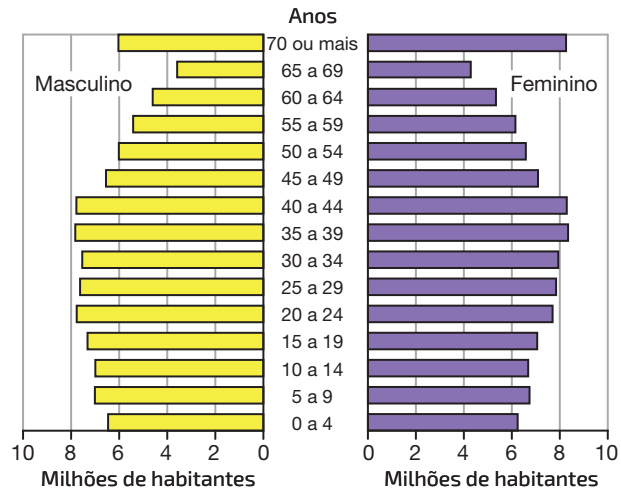
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Pirâmide etária

As **pirâmides etárias** são um tipo de gráfico utilizado para representar uma população cuja distribuição está disposta em faixas etárias. Nelas, os dados costumam ser organizados de maneira que na parte inferior (base) estejam as faixas etárias das pessoas mais jovens e, na parte superior (topo), as faixas etárias das pessoas mais idosas.

No exemplo, além das faixas etárias, a população também está organizada por gênero: masculino e feminino.

População do Brasil, classificada por gênero e faixa etária, em 2022



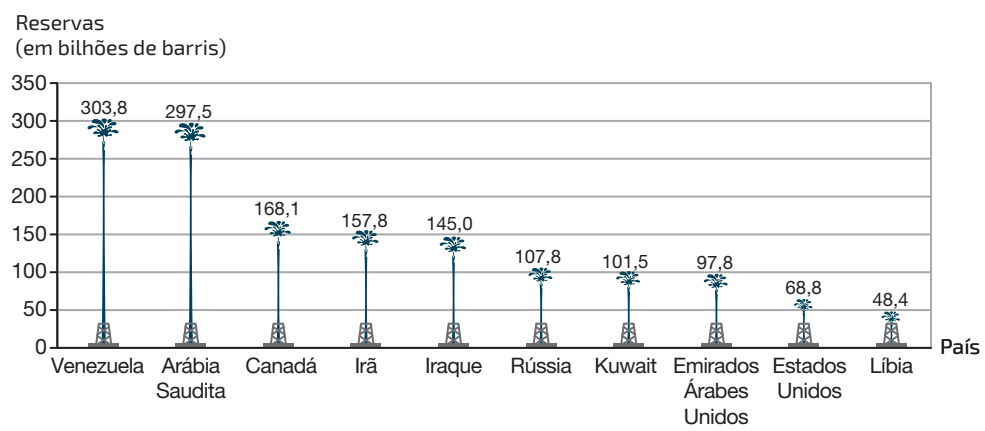
Fonte de pesquisa: IBGE. *População*. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/index.html. Acesso em: 3 jun. 2024.

Pictograma

Os **pictogramas** ou **gráficos pictóricos** são gráficos que utilizam em sua apresentação figuras, fotos ou outros recursos visuais relacionados ao contexto tratado. Essas imagens tornam o pictograma mais atrativo aoleitor, e, por isso, esse é um tipo de gráfico muito utilizado em revistas, jornais etc.

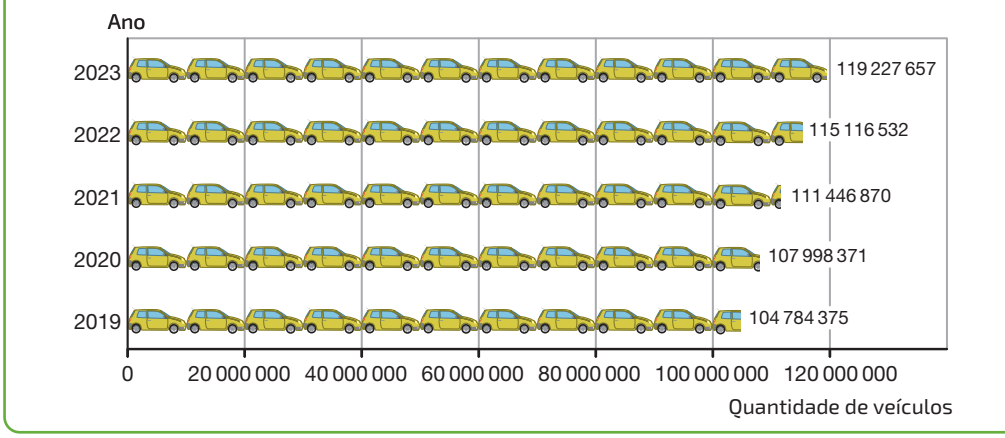
Analise a seguir algumas situações envolvendo pictogramas.

Países com as maiores reservas de petróleo, em 2023



Fonte de pesquisa: ENERGY INSTITUTE. *Statistical Review of World Energy: 2023*. Disponível em: https://www.energyinst.org/statistical-review. Acesso em: 3 jun. 2024.

Frota de veículos no Brasil, de 2019 a 2023



Fonte de pesquisa: IBGE. *Frota de veículos*. Disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pesquisa/22/28120?tipo5grafico. Acesso em: 8 fev. 2024.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Construção de gráficos

As planilhas eletrônicas são tabelas que podem ser preenchidas com diversas informações, como textos, dados numéricos e fórmulas. Além disso, elas possibilitam a organização de dados e contêm recursos para realizar cálculos, esboçar gráficos, restringir dados, fazer preenchimentos automáticos, entre outras funcionalidades. É importante destacar que uma planilha se divide em regiões retangulares, denominadas "células", representadas pelo cruzamento de uma linha (indicada por um número) com uma coluna (indicada por uma letra). As planilhas eletrônicas são úteis para abordar diversos assuntos, como aqueles relacionados à Estatística.

Apresentaremos a seguir a construção de gráficos de barras e de setores em uma planilha eletrônica.

Gráfico de barras

Neste exemplo, organizaremos os dados apresentados na tabela em um gráfico de barras verticais.

Distribuição dos cursos por área de conhecimento na Universidade Y, em 2026

Área de conhecimento	Quantidade de cursos
Exatas	13
Humanas	8
Biológicas	9
Tecnológicas	10

Fonte de pesquisa: Reitoria da Universidade.

Professor, professora: Obtenha mais informações sobre planilha eletrônica no **Suplemento para o professor**.

Professor, professora: As informações apresentadas na tabela e no gráfico são fictícias.

A. Preencha as células com os dados da tabela, conforme a figura **1**.

B. Selecione o intervalo **A1:B4**, clique em **Inserir** e selecione **Gráfico...**. No campo **Tipo de Gráfico**, na janela **Assistente de gráficos**, selecione a opção **Coluna**. Em seguida, clique em **Elementos do gráfico** e preencha o título do gráfico e o nome dos eixos. Por fim, clique em **Finalizar**.

	A	B
1	Exatas	13
2	Humanas	8
3	Biológicas	9
4	Tecnológicas	10

Figura **1**.

Observação

Nesse caso, o título do gráfico é "Distribuição dos cursos por área de conhecimento na Universidade **Y**, em 2026", e o nome dos eixos X e Y são, respectivamente, "Área de conhecimento" e "Quantidade de cursos".

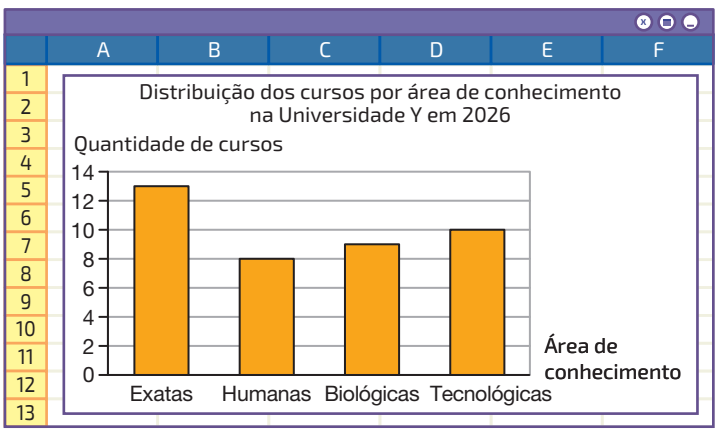


Figura **2**.

C. Para alterar algum elemento do gráfico, basta clicar sobre ele com o botão direito do *mouse* e selecionar a opção desejada. É possível ainda reposicionar e/ou redimensionar um elemento clicando sobre ele e fazendo os ajustes.

Observação

A fonte de pesquisa do gráfico deve ser adicionada, por exemplo, em uma célula da planilha ou no arquivo em que o gráfico será utilizado.

Dica

Para esboçar um gráfico de barras horizontais, basta selecionar, no campo **Tipo de Gráfico**, na janela **Assistente de gráficos**, a opção **Barra**.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Gráfico de setores

Neste exemplo, organizaremos os dados apresentados na tabela em um gráfico de setores.

Satisfação dos consumidores do produto X no Mercado A, em 2026

Satisfação	Quantidade de clientes (%)
Muito satisfeito	55
Satisfeito	33
Insatisfeito	12

Fonte de pesquisa: RH da empresa que produz o produto X.

Professor, professora: As informações apresentadas na tabela e no gráfico são fictícias.

A. Preencha as células com os dados da tabela, conforme a figura **3**.

	A	B
1	Muito satisfeito	55
2	Satisfeito	33
3	Insatisfeito	12

Figura **3**.

B. Selecione o intervalo **A1:B3**, clique em **Inserir** e selecione **Gráfico...**. No campo **Tipo de Gráfico**, na janela **Assistente de gráficos**, selecione a opção ***Pizza***. Em seguida, clique em **Elementos do gráfico** e preencha o título do gráfico. Por fim, clique em **Finalizar**.

Observação

Nesse caso, o título do gráfico é "Satisfação dos consumidores do produto **X** no Mercado **A**, em 2026".

C. Clique no gráfico de setores com o botão direito do *mouse* e selecione a opção **Inserir rótulos de dados**. Em seguida, clique novamente com o botão direito no mesmo local e selecione **Formatar rótulo de dados**. No campo **Rótulo de dados**, desmarque a opção **Valor como número** e marque a opção **Valor como porcentagem**. Por fim, clique em **OK**.

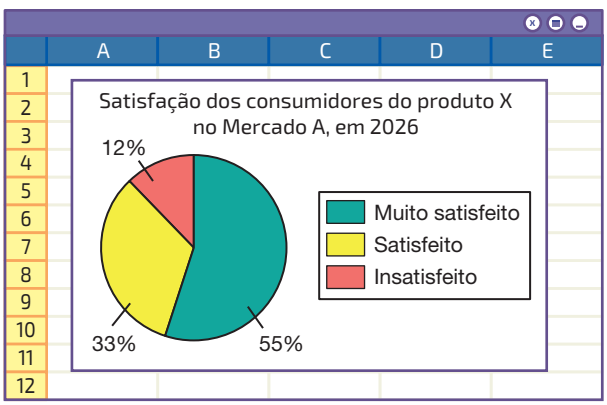


Figura **4**.

Observação

A fonte de pesquisa do gráfico deve ser adicionada, por exemplo, em uma célula da planilha ou no arquivo em que o gráfico será utilizado.

Agora é sua vez!

1. Organize os dados relativos aos pontos mais elevados do Brasil em 2023, apresentados na página **82**, em dois gráficos: um de barras verticais e outro de setores. Em sua opinião, qual gráfico é o mais adequado para representar essas informações? Por quê?

Respostas no final do **Livro do Estudante**.

2. Com o professor, faça uma pesquisa para determinar qual área de conhecimento os colegas de sala de aula desejam estudar no Ensino Superior: Exatas, Humanas, Biológicas ou Tecnológicas. Depois, construa um gráfico de setores para representar os dados obtidos.

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes realizem a pesquisa com os colegas e depois sigam os passos apresentados nesta seção para construir o gráfico.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Conservando a Floresta Amazônica

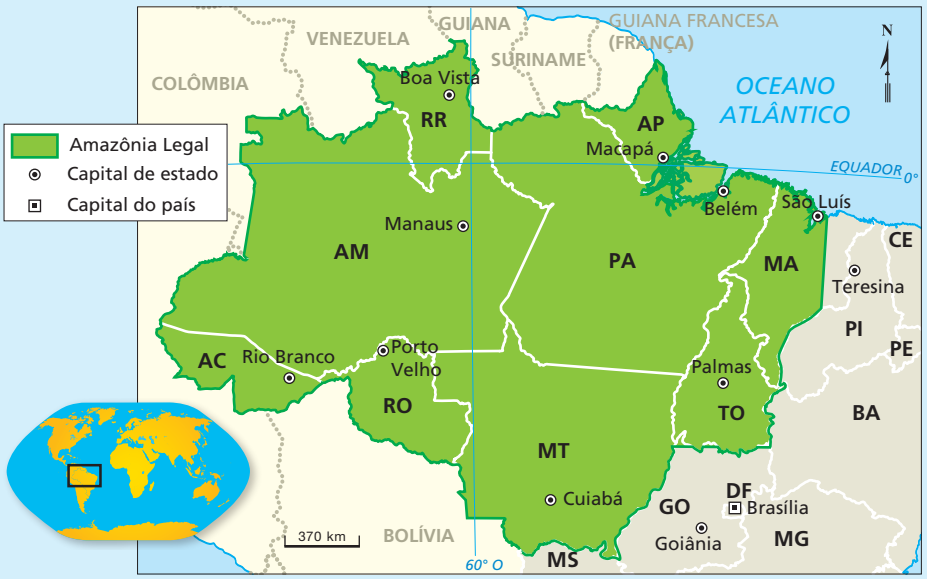
Professor, professora: Oriente os estudantes a consultar mais informações sobre os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS) no início deste volume.

ODS 15

A Floresta Amazônica, também chamada Amazônia, é reconhecida mundialmente pelas riquezas naturais. Além de abrigar a maior biodiversidade do planeta, ela contribui para o controle do aquecimento global.

Seu território se distribui em nove países, com aproximadamente 58.9% de sua área localizada em território brasileiro. No Brasil, essa região é denominada Amazônia Legal. Analise o mapa a seguir.

Amazônia Legal



KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: IBGE. *Amazônia Legal*: divisão política. Disponível em: https://geoftp.ibge.gov.br/organizacao_do_territorio/estrutura_territorial/amazonia_legal/2022/Mapa_da_Amazonia_Legal_2022_sem_sedes.pdf. Acesso em: 23 set. 2024.

Em 2011, a Amazônia foi reconhecida como uma das Sete Maravilhas Naturais do Mundo. Além de hospedar diversas espécies de animais e plantas, a região se firmou como território de origem de diversos povos indígenas. A floresta abriga também o maior rio em escoamento de água para o oceano do mundo, o Rio Amazonas.



WIRESTOCK_CREATORS/DEPOSITPHOTOS/FOTOARENA

Vista de um trecho do Rio Amazonas, no município de São Gabriel da Cachoeira, em 2022.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

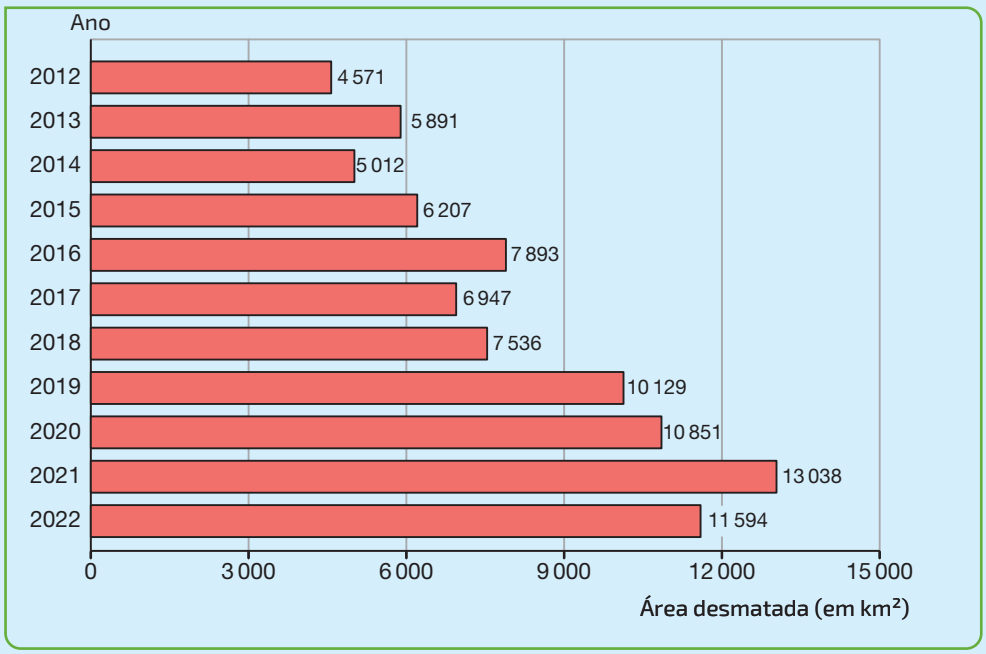
A rica biodiversidade da Amazônia tem sido ameaçada pelo desmatamento, principalmente para a expansão da pecuária, além da exploração florestal e dos garimpos ilegais.

O órgão responsável pelo controle e acompanhamento da região é o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE). Para esse trabalho, o INPE desenvolve diversos programas, entre eles o **Prodes**, que monitora as áreas amazônicas desmatadas utilizando imagens de satélite e, assim, produz relatórios anuais de desmatamento. Esses documentos são usados pelo governo como dados oficiais para o estabelecimento de políticas ambientais. As estimativas identificadas pelo Prodes são reconhecidas pela comunidade científica nacional e internacional, com indicativos de níveis de precisão que chegam a 95%. Programas como esse são fundamentais para controlar o desmatamento na região amazônica e para quantificar os impactos ambientais, sociais e econômicos causados pela devastação e, então, subsidiar o planejamento de políticas que garantam a manutenção da biodiversidade da floresta.

O gráfico a seguir traz informações sobre as áreas desmatadas da Amazônia, entre 2012 e 2022, monitoradas pelo sistema Prodes.

5. Resposta pessoal. Incentive os estudantes a recorrer a pesquisas sobre campanhas com a temática para se inspirarem e a utilizar imagens, recortes de notícias, ilustrações, gráficos e tabelas. Como solução, eles podem mencionar a atuação do poder público na promoção de políticas de desmatamento na região; a realização de campanhas para reflorestamento e de conscientização da sociedade sobre consumo sustentável, incluindo a redução do consumo de carne; a adoção de medidas sustentáveis por empresas privadas, entre outras ações. Essas medidas contribuem para conscientizar as pessoas sobre a importância do uso sustentável dos ecossistemas terrestres e do combate à degradação e ao desmatamento, cooperando assim com o alcance do ODS 15.

Área da Amazônia Legal desmatada anualmente, de 2012 a 2022



Fonte de pesquisa: INPE. *Coordenação-Geral de Observação da Terra*. Disponível em: http://www.obt.inpe.br/OBT/assuntos/programas/amazonia/prodes. Acesso em: 23 nov. 2023.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades

1. Resposta: Acre, Rondônia, Amazonas, Roraima, Mato Grosso, Pará, Amapá, Tocantins e Maranhão.

Anote as respostas no caderno.

2. Sugestão de resposta: Perda da biodiversidade, alterações nos recursos hídricos da região e mudanças climáticas causadas pelo aumento do aquecimento global, em razão da redução das árvores, acarretando acúmulo de CO_2 na atmosfera.

1. Cite os nomes dos estados brasileiros que fazem parte da Amazônia Legal.
2. Cite algumas possíveis consequências do desmatamento da Amazônia.
3. Para determinar o percentual aproximado da área da Amazônia Legal que foi desmatada de 2012 até o final de 2022, é necessário conhecer a área total dessa região. Junte-se a um colega e conversem sobre estratégias para calcular a área aproximada da Amazônia Legal usando o mapa apresentado na página anterior. Em seguida, apresentem-nas aos colegas e ao professor.

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam, por exemplo, que aproximariam a área dessa região à de um polígono cuja área eles saibam calcular.

4. Qual foi o total de área desmatada da região Amazônica no ano de 2012? E no ano de 2022?

Resposta: 2012: 4 571 km^2; 2022: 11 594 km^2.

5. Forme um grupo com três colegas e produzam cartazes sobre as consequências do desmatamento da Amazônia em relação às alterações climáticas, propondo meios de conscientização e soluções para minimizar esse problema. Incorpore a eles a importância de ações como essas para o alcance do ODS 15.

Anote as respostas no caderno.

8. A falta de água potável em diversas regiões do mundo já é uma realidade. Desde o tratamento adequado de esgotos residenciais e industriais, passando pelo uso correto da água na agricultura e na agropecuária, até o combate ao desmatamento de florestas, além do uso consciente desse líquido em situações corriqueiras, como o banho, são exemplos de atitudes que devemos tomar para garantir a todas as pessoas o direito a esse bem vital.

As tabelas a seguir apresentam algumas informações relacionadas à água.

9. a) Resposta: Norte e Nordeste. Espera-se que os estudantes respondam que a intensificação não foi bem-sucedida, pois, em 2020, houve uma redução na taxa de doação nessas regiões, quando comparado com 2019.

Tabela I

Consumo médio diário de água por pessoa no Brasil e nas regiões brasileiras, em 2022

Total e regiões	Consumo diário (litros/habitante)
Brasil	148,2
Norte	151,2
Nordeste	121,4
Sudeste	159,9
Sul	149,8
Centro-Oeste	153,5

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério das Cidades. Sistema Nacional de Informações sobre Saneamento. *Diagnóstico Temático*: Serviços de Água e Esgoto. Brasília, dez. 2023. Disponível em: https://www.gov.br/cidades/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/saneamento/snis/produtos-do-snis/diagnosticos/DIAGNOSTICO_TEMATICO_VISAO_GERAL_AE_SNIS_2023.pdf. Acesso em: 10 ago. 2024.

Tabela II

Quantidade média de água necessária para produzir alguns produtos

Produto (1 kg)	Quantidade de água (em litros)
Algodão	9 980
Carne bovina	18 415
Arroz	2 497
Carne de frango	4 325
Milho	1 222

Fonte de pesquisa: FERREIRA, Priscila. *Água invisível*. Disponível em: https://www.ebc.com.br/especiais-agua/agua-invisivel/. Acesso em: 18 set. 2024.

8. a) Resposta: Na tabela **I** é apresentado o consumo médio diário de água por pessoa no Brasil e nas regiões brasileiras, no ano de 2022. Na tabela **II** é apresentada a quantidade média de água necessária para produzir alguns produtos.

a) Quais dados são apresentados em cada tabela?

b) Qual região brasileira apresentou menor consumo médio de água por habitante em 2022? E qual apresentou maior consumo? Resposta: Nordeste; Sudeste.

c) Em 2022, o Brasil tinha cerca de 203 milhões de habitantes. Quantos litros de água, aproximadamente, foram consumidos diariamente no Brasil nesse ano? Resposta: $3 \cdot 10^{10}$ L

d) Dos produtos apresentados na tabela **II**, qual necessita de uma quantidade de água inferior a 4 000 L para que sejam produzidos 2 kg desse item? Resposta: Milho.

e) Quantos litros de água, no total, são necessários para produzir 500 g de cada um dos produtos apresentados na tabela **II**? Resposta: 18 219,5 L

f) O desperdício no uso de água na agricultura e na agropecuária pode contribuir para a escassez de água potável. Faça uma pesquisa e cite possíveis atitudes que levam a esse desperdício. Depois, apresente-a ao professor e aos colegas. Resposta pessoal. Orientações sobre essa questão no **Suplemento para o professor**.

9. Visando à doação voluntária de sangue, diversas campanhas são frequentemente promovidas pelo Ministério da Saúde em regiões com menores quantidades de doadores, para manter os estoques dos hemocentros. Elas são realizadas com base nos dados publicados pela Agência Nacional de Vigilância Sanitária, a Anvisa, e um dos principais dados avaliados é a taxa de doação de sangue, determinada pela razão entre o total de doadores e de habitantes.

Com base nos resultados, são determinadas as regiões prioritárias para as campanhas, intensificando-as nas regiões com taxa de doação menor do que a taxa nacional.

a) Se em 2019 a taxa de doação nacional foi de 1,71%, em quais regiões brasileiras as campanhas deveriam ser intensificadas em 2020? De acordo com os dados de 2020, podemos concluir que a intensificação foi bem-sucedida?

b) Sabendo que em 2020 a taxa de doação brasileira foi de 1,47%, determine em quais regiões brasileiras as campanhas deveriam ser intensificadas.

Resposta: Norte, Nordeste e Sul.

Taxa de doação de sangue por região, em 2019 e 2020

Ano	Região				
	Norte	Nordeste	Sudeste	Centro-Oeste	Sul
2019	1,58%	1,41%	1,91%	1,76%	2,08%
2020	1,27%	1,13%	1,74%	1,54%	1,45%

Fontes de pesquisa: BRASIL. *8º Boletim Anual de Produção Hemoterápica*. Agência Nacional de Vigilância Sanitária, 2019. p. 10.
BRASIL. *9º Boletim Anual de Produção Hemoterápica*. Agência Nacional de Vigilância Sanitária, 2020. p. 10.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

10. A Central de Atendimento à Mulher (Ligue 180) é um serviço de acolhimento humanizado a mulheres que sofrem violência. O principal canal de atendimento é por meio de ligações para o número 180, mas também é possível entrar em contato via mensagens de aplicativos. Criada em 2003, essa é considerada uma das principais e mais eficientes políticas públicas voltadas para o enfrentamento à violência de gênero no Brasil. Além de registrar e encaminhar denúncias aos órgãos competentes, como as delegacias especiais de atendimento à mulher, essa central orienta mulheres sobre seus direitos e suas possibilidades de acolhimento por diferentes instituições para buscar ajuda em casos de violência, principalmente aqueles que ocorrem no meio doméstico, ou seja, no convívio familiar.

ODS 5



ACERVO DO MINISTÉRIO DAS MULHERES/GOVERNO FEDERAL

Cartaz da campanha Ligue 180, divulgada em São Paulo, no ano de 2020.

A tabela a seguir apresenta a quantidade de ligações registradas no Ligue 180 nos anos de 2022 e 2023.

Quantidade de ligações registradas no Ligue 180 por região do Brasil, em 2022 e 2023

Região	Ano	
	2022	2023
Centro-Oeste	39 555	48 125
Nordeste	107 641	128 391
Norte	24 951	31 762
Sudeste	252 534	316 642
Sul	54 826	71 915
Outro*	21 828	12 709
Total	501 335	609 544

*Atendimento interrompido ou dado não informado.

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério dos Direitos Humanos e da Cidadania. *Central de Atendimento à Mulher (Ligue 180)*. Disponível em: https://www.gov.br/mdh/pt-br/acesso-a-informacao/dados-abertos/ligue180. Acesso em: 23 ago. 2024.

Resposta: O campo "Outro" é referente aos atendimentos interrompidos ou a casos em que o dado não foi informado nas ligações. Espera-se que os estudantes percebam que esses casos diminuíram de 2022 para 2023. Questione-os se isso é positivo ou negativo. Espera-se que eles respondam que é positivo, pois demonstra que mais pessoas estão conseguindo concluir seus atendimentos e informar suas localizações.

10. b) Resposta: Houve um aumento de ligações para o Ligue 180 em todas as regiões brasileiras. Leve-os a perceber que, consequentemente, esse aumento impactou na quantidade do total de ligações recebidas pela central.

10. c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que as duas regiões mais populosas do país também correspondem às regiões onde ocorreram mais ligações para o Ligue 180. Com base nisso, conduza-os a reflexões desvinculadas de qualquer tipo de preconceito ou recriminação de alguma região como a mais violenta, chamando a atenção para o fato de que esse é um problema estrutural para toda a sociedade brasileira.

10. d) Resposta pessoal. Caso os estudantes não cheguem sozinhos a essa reflexão, chame a atenção deles para o fato de que o aumento significativo de ligações de um ano para o outro pode indicar que os casos de violência têm aumentado na sociedade, assim como que mais mulheres estão conhecendo esses atendimentos ou se encorajando a acessá-los. Lembre-os de que um fator pode não excluir o outro. Com base nessa perspectiva, deixe que eles expressem suas opiniões sobre o assunto.

a) Qual é o significado do campo "Outro" na tabela? O que é possível perceber ao comparar os dados desse campo nos anos de 2022 e 2023?

b) Analise os dados da tabela de cada região brasileira comparando os anos de 2022 e 2023. O que é possível perceber em todas elas?

c) O Censo de 2022 apontou que as regiões Sudeste e Nordeste são as mais populosas do Brasil. Nas duas regiões somadas, tem-se cerca de 69% da população brasileira, da qual 42% estão localizados no Sudeste e 27% na região Nordeste. Como esses apontamentos se relacionam com os dados da tabela apresentada?

d) Com base no que você analisou até aqui, qual é a importância de políticas públicas de atendimento a vítimas de violência de gênero, como o Ligue 180?

e) Em sua opinião, como cada cidadão, independentemente de ser mulher ou homem, pode se posicionar no combate à violência de gênero? Resposta pessoal. Os estudantes podem responder que todos podemos acolher mulheres que passam por situações de vulnerabilidade, respeitando seu tempo e suas decisões e colocando-nos como um apoio e um vetor de divulgação de políticas públicas e campanhas contra esse tipo de violência. Além disso, podemos evitar a reprodução de comportamentos misóginos ou machistas, que estamos sujeitos a expressar, e dialogar, sempre que presenciarmos essas posturas vindo de algum conhecido, explicando os problemas que esse tipo de comportamento pode acarretar.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

12. a) Resposta: Não, pois os dados apresentados no gráfico são referentes à produção por pessoa. Para fazer uma comparação quantitativa, é necessário conhecer a quantidade de habitantes de cada região em questão.

11. Com base na tabela, construa, com o auxílio de uma planilha eletrônica, um gráfico de barras horizontais e elabore algumas questões. Depois, troque as questões com um colega.

Resposta pessoal. A resposta depende das questões elaboradas pelos estudantes.

Distribuição do rebanho bovino nas regiões brasileiras, em 2022

Região	Distribuição (%)
Centro-Oeste	32,9
Norte	25,8
Sudeste	16,6
Nordeste	14,1
Sul	10,3

Fonte de pesquisa: IBGE. *PPM - Pesquisa da Pecuária Municipal*. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/agricultura-e-pecuaria/9107-producao-da-pecuaria-municipal.html?=&t=resultados. Acesso em: 10 ago. 2024.

Observação

Após concluírem a resolução das questões, verifiquem se as respostas estão corretas.

12. Resíduos de serviços de saúde (RSS), considerados infectantes, tais como medicamentos vencidos, sangue, tecidos, órgãos, materiais resultantes de cirurgias, agulhas, bisturis, entre outros, são gerados na Medicina da saúde em locais de atendimento. Esse lixo tem local adequado para descarte, pois é contaminante biológico e pode causar risco à saúde das pessoas.

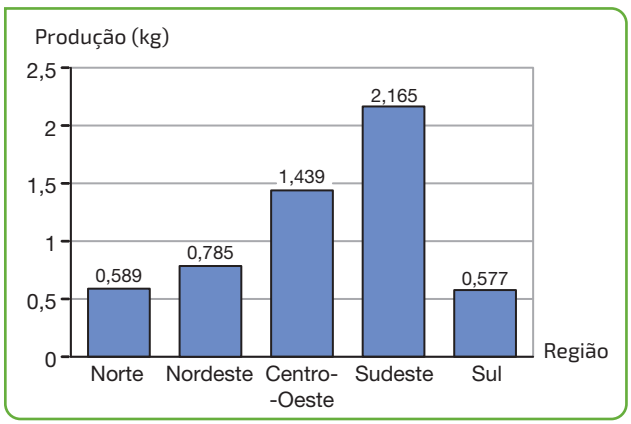
a) Analisando o gráfico, podemos afirmar que a quantidade diária de resíduos de serviços de saúde produzida na região Sul é menor do que a quantidade produzida na região Norte? Justifique sua resposta.

b) Em 2020, a população urbana da região Centro-Oeste era cerca de 16 707 336 habitantes. Calcule a quantidade aproximada, em toneladas, de resíduos de serviços de saúde produzida durante o ano nessa região.

Resposta: Aproximadamente 24 042 t.

Fonte de pesquisa: ABRELPE. *Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2021*. Disponível em: https://abespb.com.br/wp-content/uploads/2023/12/Panorama-2021-ABRELPE.pdf. Acesso em: 10 ago. 2024.

Produção de resíduos de serviços de saúde por pessoa por região brasileira, em 2020



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

13. Segundo dados do Censo divulgados pelo IBGE, em 2022 o Brasil tinha 1693 535 pessoas indígenas, que representavam 0,83% da população brasileira. Mais da metade da população indígena brasileira está concentrada na Amazônia Legal, região formada pelos estados do Acre, Amapá, Amazonas, Mato Grosso, Roraima, Pará, Rondônia, Tocantins e parte do Maranhão.

ODS 10 ODS 16

Professor, professora: A tarefa **11** propõe aos estudantes que elaborem algumas questões usando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

a) Quais eram as duas regiões com as maiores populações indígenas?

Resposta: Norte e Nordeste.

b) Em 2022, quantos por cento da população indígena brasileira vivia na região:

- Norte?
- Nordeste?
- Centro-Oeste?
- Sudeste?
- Sul?

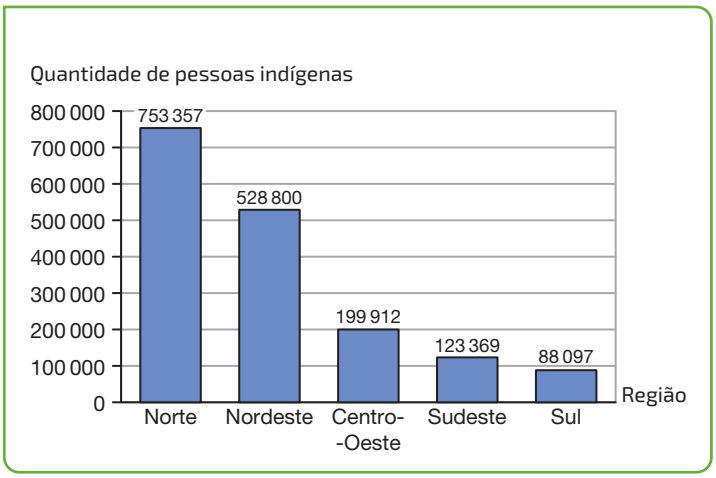
Respostas no final do **Livro do Estudante**.

c) Junte-se a um colega e pesquisem informações sobre uma das etnias indígenas que vivem no Brasil. Depois, compartilhem com a turma essas informações.

Resposta pessoal. Orientações sobre esse item no **Suplemento para o professor**.

Fonte de pesquisa: BRASIL. Secretaria de Comunicação Social. *Brasil tem 1,69 milhão de indígenas, aponta Censo 2022*. 7 ago. 2023. Disponível em: https://www.gov.br/secom/pt-br/assuntos/noticias/2023/08/brasil-tem-1-69-milhao-de-indigenas-aponta-censo-2022. Acesso em: 10 ago. 2024.

População indígena no Brasil por região, em 2022



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

14. b) Resposta: Goiás: aproximadamente 10,7% de aumento; Bahia: aproximadamente 12,6% de aumento; Pará: aproximadamente 52,7% de aumento; Paraná: aproximadamente 7,2% de aumento; São Paulo: não é possível calcular por ausência de dados no ano de 2022.

14. O dia 17 de maio é conhecido como o Dia de Enfrentamento à Violência contra as pessoas LGBTQIA+, uma data que destaca o fortalecimento da luta contra o preconceito, missão urgente no Brasil, país que ainda conta com números alarmantes de violência relacionada a essa população. Segundo a ONG Transgender Europe, o Brasil lidera o *ranking* mundial de assassinatos de pessoas transexuais. Diante disso, é fundamental que a sociedade se mobilize e promova atitudes de mudança. A educação, o respeito à diversidade e a criação de políticas públicas são ações cruciais para reverter esse cenário.

Analise, na tabela, a quantidade de registros de crimes contra a população LGBTQIA+ nos estados mais populosos de cada região brasileira.

14. d) Resposta: A falta de informações completas pode levar a uma subestimação dos números reais de registros de crimes, criando uma visão imprecisa da situação da violência contra a população LGBTQIA+.

Registros de crimes contra a população LGBTQIA+ nos estados mais populosos de cada região do Brasil, em 2022 e 2023

Estado	Registro de crimes em 2022	Registro de crimes em 2023
Goiás	28	31
Bahia	451	508
Pará	74	113
São Paulo	...*	257
Paraná	111	119

*Informação não disponível.

Fonte de pesquisa: FÓRUM BRASILEIRO DE SEGURANÇA PÚBLICA. *18º Anuário Brasileiro de Segurança Pública*. São Paulo: FBSP, 2024. Disponível em: https://apidspace.forumseguranca.org.br/server/api/core/bitstreams/1d896734-f7da-46a7-9b23-906b6df3e11b/content. Acesso em: 23 set. 2024.

a) Analise os totais de crimes registrados nos anos de 2022 e 2023 para os estados de Goiás, Bahia, Pará e Paraná. O que há em comum entre esses dados? Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Calcule qual foi a porcentagem de aumento de registros de crimes contra a população LGBTQIA+ de 2022 para 2023 em cada estado.

c) Foi possível fazer todos os cálculos solicitados no item anterior? Justifique sua resposta.

d) Os dados apresentados na tabela são baseados em informações disponibilizadas por instituições estaduais de segurança pública para diferentes tipos de crime contra a população LGBTQIA+ registrados entre os anos de 2022 e 2023. Além de São Paulo, que não informou nenhum dado referente ao ano de 2022, outros estados, como Goiás e Bahia, deixaram de disponibilizar informações sobre algum tipo de crime em um ou ambos os anos, impactando nos números gerais. Em quais problemas essa falta de informações pode resultar?

e) Pesquise sobre as atuais legislações no Brasil que protegem os direitos da população LGBTQIA+. Quais são os impactos dessas leis na prevenção da violência e na promoção dos direitos dessa comunidade? Resposta pessoal.



ACERVO DO MINISTÉRIO DOS DIREITOS HUMANOS E DA CIDADANIA/GOVERNO FEDERAL

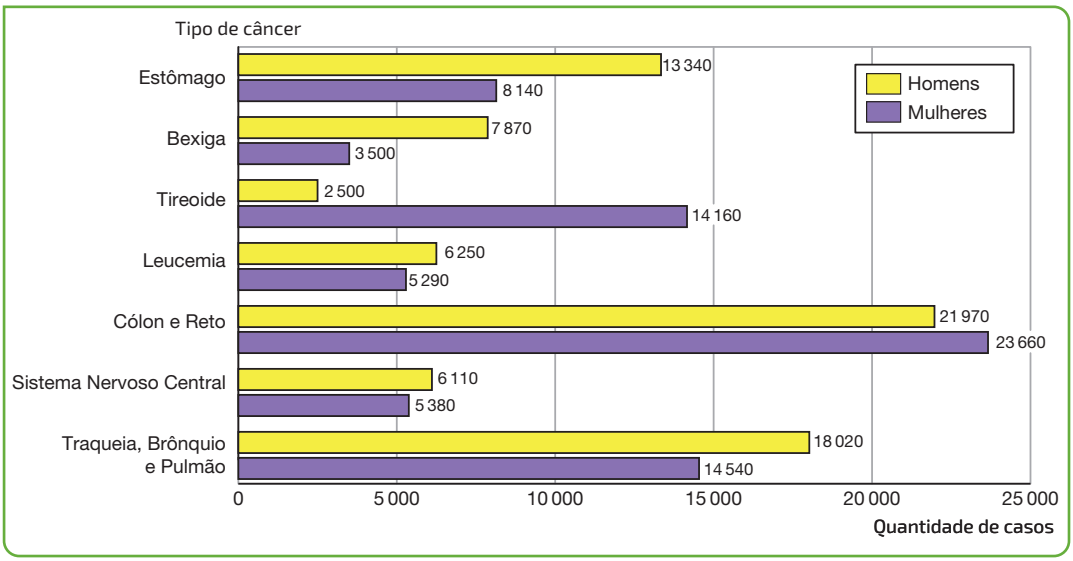
Cartaz da campanha do Ministério dos Direitos Humanos e da Cidadania sobre o Dia Internacional de Enfrentamento à Violência contra as Pessoas LGBTQIA+, em 2023.

14. c) Resposta: Espera-se que os estudantes respondam que não foi possível calcular o aumento percentual para o estado de São Paulo em razão da ausência de dados sobre os registros de crimes contra a população LGBTQIA+ em 2022, indicando uma subnotificação dos crimes nesse ano, o que impede a comparação entre os períodos solicitados.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

15. O câncer é uma patologia que pode atacar diversas partes do organismo, não apresenta sintomas específicos e pode ser detectado em vários estágios de evolução. As causas dele podem ser externas (relacionadas ao meio ambiente, aos hábitos e aos costumes) ou internas ao organismo (na maioria das vezes, geneticamente predeterminadas). De 80% a 90% dos casos de câncer são causados por fatores externos, como o uso de cigarro, que pode causar o câncer de pulmão (os fumantes têm 10 vezes mais chances de desenvolver câncer de pulmão do que os não fumantes), ou a exposição excessiva ao sol, que pode causar o câncer de pele.

Estimativa para novos casos de câncer no Brasil, de 2023 a 2025



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: SANTOS, Marceli de Oliveira *et al*. Estimativa de Incidência de Câncer no Brasil, 2023-2025. *Revista Brasileira de Cancerologia*, n. 69, v. 1, 2023. Disponível em: https://rbc.inca.gov.br/index.php/revista/article/view/3700/2644. Acesso em: 12 ago. 2024.

a) Estima-se que no triênio 2023-2025 as mulheres serão a maioria diagnosticada com qual tipo de câncer? Resposta: Cólon e reto.

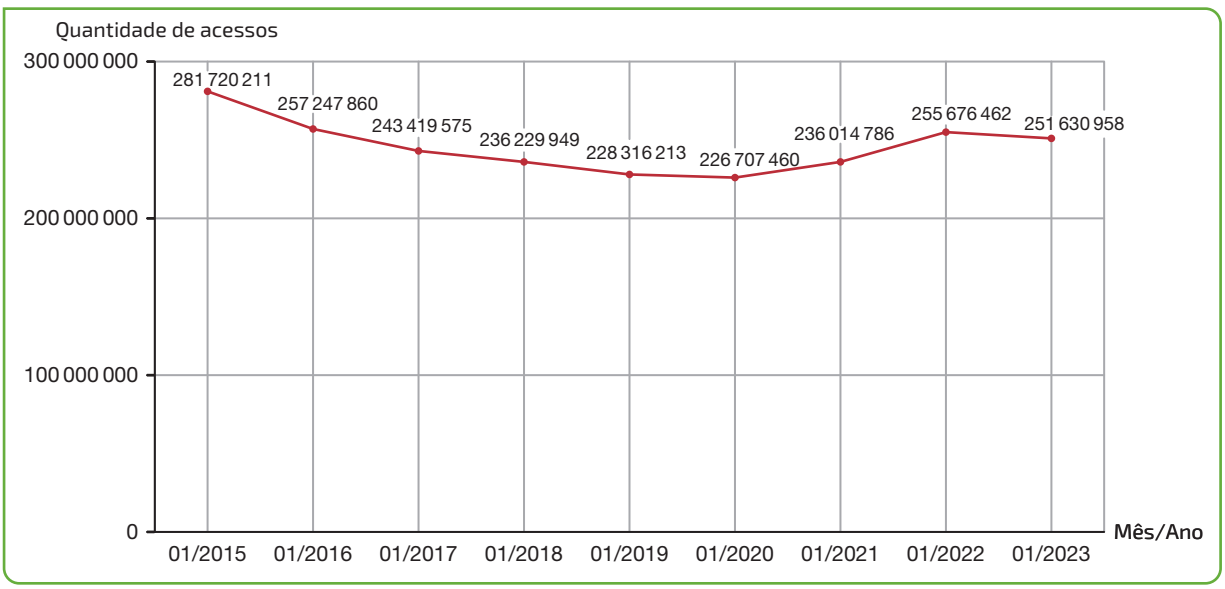
b) Qual é a estimativa de novos casos de câncer de cólon e reto que serão diagnosticados no Brasil no triênio 2023-2025? Resposta: 45 630 novos casos.

c) Da estimativa dos casos de câncer de bexiga que serão diagnosticados no Brasil no triênio 2023-2025, qual é o percentual aproximado de diagnósticos em homens? Resposta: Aproximadamente 69,2%.

16. Analise o gráfico.

ODS 9

Acessos de telefonia móvel no Brasil, de janeiro de 2015 a janeiro de 2023



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: BRASIL. Agência Nacional de Telecomunicações. Disponível em: https://informacoes.anatel.gov.br/paineis/acessos/telefonia-movel. Acesso em: 12 ago. 2024.

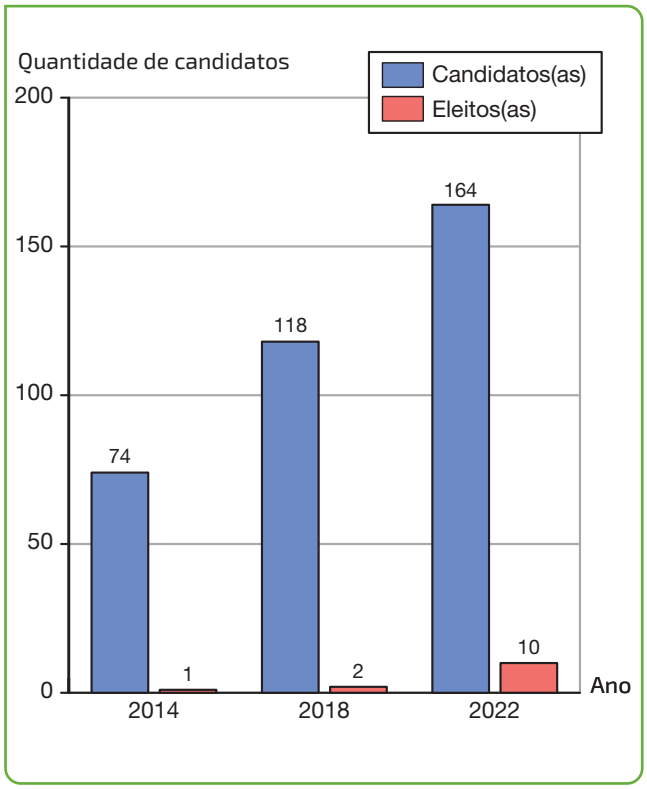
Entre quais datas consecutivas apresentadas no gráfico ocorreu a maior variação no total de acessos de telefonia móvel no Brasil? De quanto foi essa variação? Resposta: Entre 01/2015 e 01/2016; 24 472 351 acessos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

17. Desde o ano de 2014, a Justiça Eleitoral passou a coletar dados de cor e raça dos candidatos a cargos políticos. Essa iniciativa foi importante para acompanhar as disparidades e os avanços na representatividade étnico-racial dos cargos eletivos brasileiros, além de facilitar a promoção de iniciativas que visem ampliar a diversidade. 17. b) Resposta: Eleições gerais: as candidaturas cresceram aproximadamente 121,62%; eleições municipais: as candidaturas cresceram aproximadamente 33,14%.

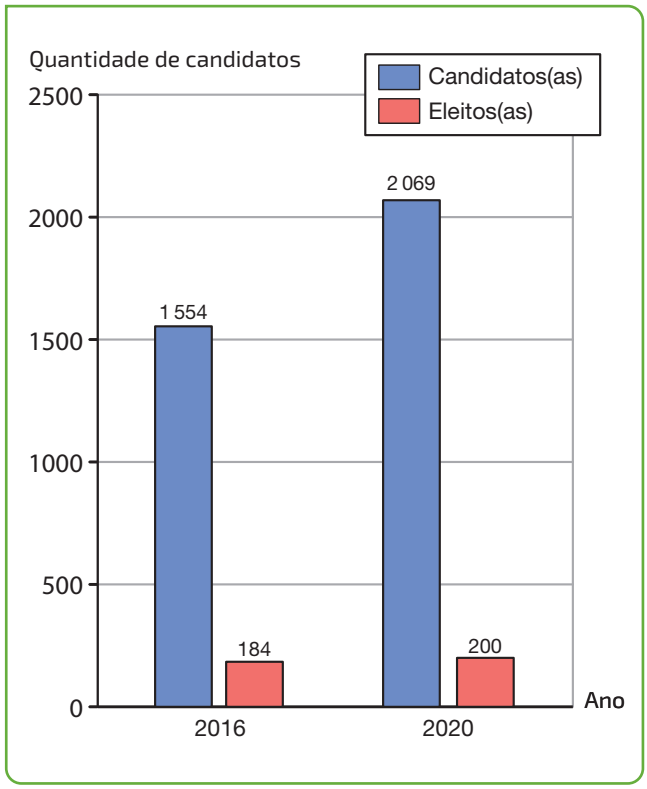
Analise a seguir dois gráficos com informações de indígenas candidatos e eleitos entre 2014 e 2022, considerando as eleições gerais, que abrangem cargos em níveis nacional e estadual, e as eleições municipais, que abrangem cargos de prefeitos, vice-prefeitos e vereadores. 17. c) Resposta pessoal. Incentive os estudantes a expressar as próprias ideias.

Candidaturas indígenas em eleições gerais, de 2014 a 2022



Fonte de pesquisa: TRIBUNAL SUPERIOR ELEITORAL. *Exposição*: Eleições e povos indígenas. Brasília: TSE, 2023. Disponível em: https://www.tse.jus.br/institucional/catalogo-de-publicacoes/arquivos/exposicao-eleicoes-e-povos-indigenas/@@download/file/exposicao-eleicoes-e-povos-indigenas.pdf. Acesso em: 3 out. 2024.

Candidaturas indígenas em eleições municipais, de 2016 e 2020



Fonte de pesquisa: TRIBUNAL SUPERIOR ELEITORAL. *Exposição*: Eleições e povos indígenas. Brasília: TSE, 2023. Disponível em: https://www.tse.jus.br/institucional/catalogo-de-publicacoes/arquivos/exposicao-eleicoes-e-povos-indigenas/@@download/file/exposicao-eleicoes-e-povos-indigenas.pdf. Acesso em: 3 out. 2024.

ILUSTRAÇÕES: TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

a) O que é possível perceber analisando os dois gráficos ao longo dos anos?
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Considerando as eleições gerais, calcule a porcentagem de crescimento de candidaturas indígenas entre 2014 e 2022. Faça esse cálculo com as eleições municipais também, considerando os anos de 2016 e 2020.

c) Em sua opinião, por que é importante ter representantes indígenas em cargos eletivos?

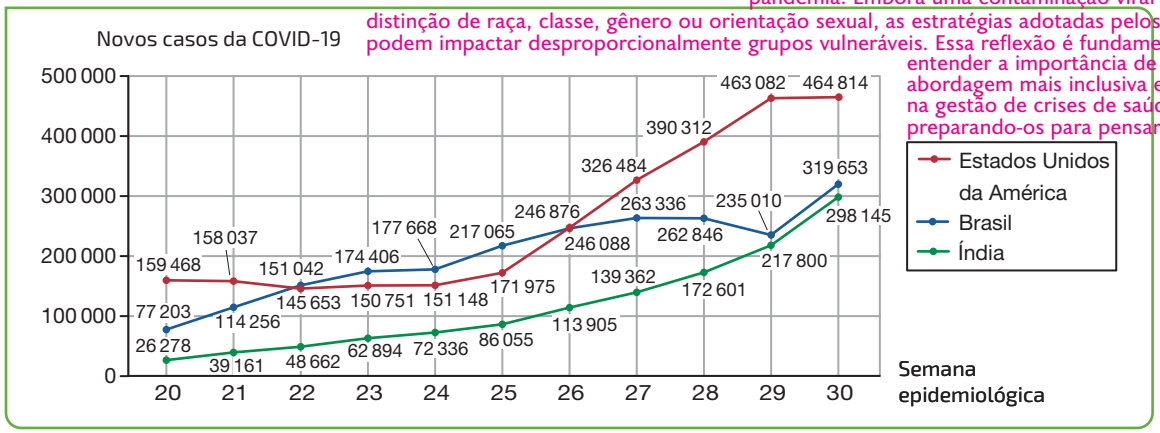
d) Segundo o Censo 2022, a população indígena no Brasil é de aproximadamente 1,7 milhão de pessoas distribuídas em todo o território. O Censo de 2010 identificou uma diversidade de 305 etnias diferentes. Em 2022, ano com maior percentual atingido, os indígenas correspondiam a 0,58% entre todos os eleitos. Considerando esses dados, você acha que a quantidade de representantes indígenas eleitos até o momento é suficiente? 17. e) Resposta pessoal. Caso não haja representantes indígenas eleitos no município em 2024, leve-os a pesquisar candidatos e eleitos da região nas últimas eleições gerais.

e) Faça uma pesquisa sobre candidatos e eleitos indígenas no município onde você mora. Nela, busque dados da última eleição municipal. Depois, elabore um texto e escreva sobre o que você pôde concluir, com base nos dados obtidos na pesquisa. 17. d) Resposta pessoal. Deixe que os estudantes se manifestem livremente. Se for considerada uma proporção matemática, espera-se que eles concluam que a quantidade de indígenas eleitos não é suficiente, visto que a porcentagem de indígenas na população brasileira, segundo o Censo 2022, é de 0,83%. No entanto, considerando a diversidade de etnias, os conhecimentos tradicionais e as contribuições dos modos de vida desses povos, espera-se que os estudantes reflitam sobre a necessidade de ainda mais representantes ocuparem cargos eletivos.

18. Verifique no gráfico a evolução da quantidade de novos casos confirmados de COVID-19 em alguns países, da 20ª à 30ª semana epidemiológica, correspondente ao período de 18 de maio de 2020 a 25 de julho de 2020.

Professor, professora: Ao trabalhar com a atividade 18, oriente os estudantes a refletir sobre a relação entre a COVID-19 e o conceito de necropolítica. Encoraje-os a conversar sobre como as decisões políticas e a falta de recursos adequados intensificaram as desigualdades sociais durante a pandemia. Embora uma contaminação viral não faça distinção de raça, classe, gênero ou orientação sexual, as estratégias adotadas pelos Estados podem impactar desproporcionalmente grupos vulneráveis. Essa reflexão é fundamental para entender a importância de uma abordagem mais inclusiva e equitativa na gestão de crises de saúde, preparando-os para pensar criticamente sobre políticas públicas e seus efeitos na sociedade.

Evolução da quantidade de novos casos confirmados de COVID-19 da 20ª à 30ª semana epidemiológica, em 2020



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Saúde. *Boletim epidemiológico especial*: doença pelo Coronavírus COVID-19. Brasília, 29 jul. 2020. p. 6. Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/boletins/epidemiologicos/covid-19. Acesso em: 13 maio 2024.

a) Em cada país, qual é a diferença entre a quantidade de novos casos confirmados na 20ª e na 30ª semana epidemiológica? Resposta: Estados Unidos da América: 305 346; Brasil: 242 450; Índia: 271 867.

b) Em sua opinião, o que ocasionou o aumento da quantidade de casos confirmados de COVID-19 no Brasil durante o período apresentado? Converse com os colegas e o professor.
Resposta pessoal. Orientações sobre essa questão no **Suplemento para o professor**.

19. Com base na tabela, construa um gráfico de linhas para representar a evolução da população brasileira nos anos indicados. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

População do Brasil, de 1940 a 2022

Ano	População (em quantidade de pessoas)
1940	41 236 315
1950	51 944 397
1960	70 992 343
1970	94 508 583
1980	121 150 573
1991	146 917 459
2000	169 872 856
2010	190 755 799
2022	203 080 756

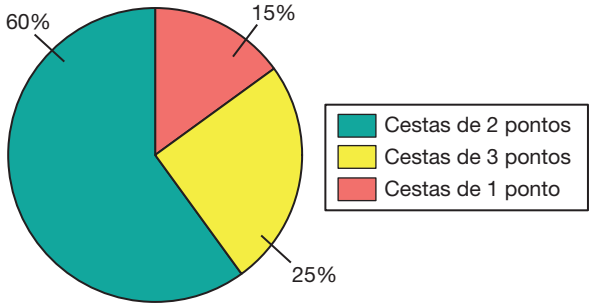
Fonte de pesquisa: IBGE. *População*. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/?utm_source=ibge&utm_medium=home&utm_campaign=portal. Acesso em: 12 ago. 2024.

20. O gráfico representa as cestas convertidas por uma equipe, em uma partida de basquete, de acordo com a pontuação correspondente.

a) De quantos pontos foi a maior parte das cestas convertidas pela equipe?
Resposta: Cestas de 2 pontos.

b) Sabendo que essa equipe converteu 40 cestas ao todo, qual foi a pontuação obtida por ela na partida? Resposta: 84 pontos.

Cestas convertidas de acordo com a pontuação, em 2027



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: Súmula da partida em 2027.

Professor, professora: Na tarefa **20**, se for necessário, explique aos estudantes que cestas convertidas são as que resultam em pontos.
Professor, professora: As informações apresentadas no gráfico são fictícias.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

21. Uma instituição de Ensino Superior oferece cursos de graduação em diferentes áreas de conhecimento.

Utilizando uma planilha eletrônica, construa um gráfico de setores para representar os dados da tabela.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Distribuição dos cursos por área de conhecimento na Universidade X, em 2026

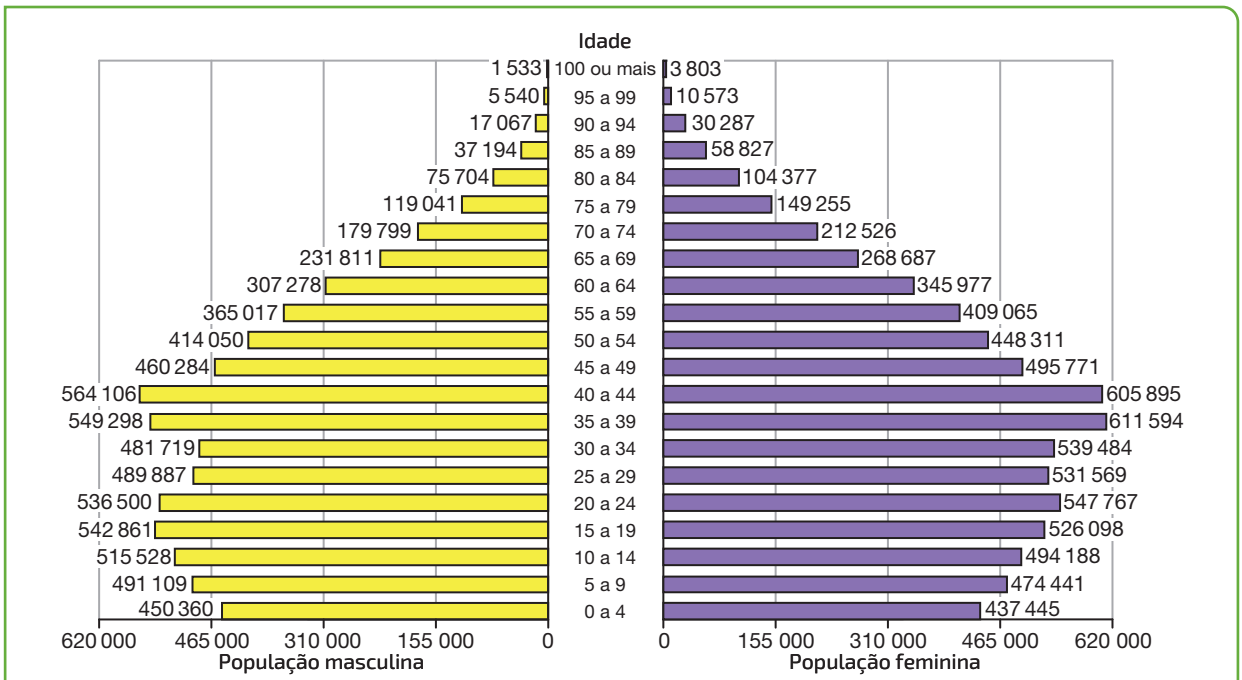
Área de conhecimento	Quantidade de cursos
Exatas	14
Humanas	11
Biológicas	10
Tecnológicas	9

Fonte de pesquisa: Catálogo da instituição.

Professor, professora: As informações apresentadas na tabela são fictícias.

22. De acordo com as informações da pirâmide etária, resolva as questões.

População residente na Bahia, por gênero e grupo de idade, em 2022



VINÍCIUS COSTA/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: IBGE. População. *Bahia*. Disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/ba/panorama. Acesso em: 12 ago. 2024.

a) Quais faixas etárias têm entre 540 mil e 550 mil indivíduos do gênero masculino?
Resposta: 15 a 19 anos e 35 a 39 anos.

b) Na faixa etária de 0 a 4 anos há mais pessoas do gênero masculino ou feminino? E na faixa etária de 60 a 64?
Resposta: Masculino; feminino.

c) Aproximadamente quantas pessoas são da mesma faixa etária que você? Resposta pessoal. A resposta depende da idade do estudante.

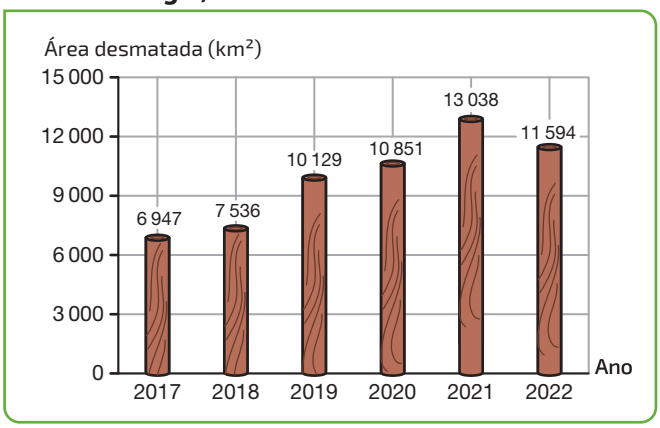
23. Analise o gráfico.

a) Dos anos apresentados no gráfico, em qual foi registrada a maior área desmatada?
Resposta: 2021

b) Podemos afirmar que a área desmatada a cada ano, no período apresentado, foi sempre decrescente em relação ao ano anterior? Por quê?

c) Determine, em porcentagem, a diminuição na área desmatada em 2022 em relação a 2021.
Resposta: Aproximadamente 11,07%.

Estimativa de desmatamento na Amazônia Legal, de 2017 a 2022



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: BRASIL. Coordenação-Geral de Observação da Terra. *Monitoramento do Desmatamento da Floresta Amazônica Brasileira por Satélite*. Disponível em: http://www.obt.inpe.br/OBT/assuntos/programas/amazonia/prodes. Acesso em: 12 ago. 2024.

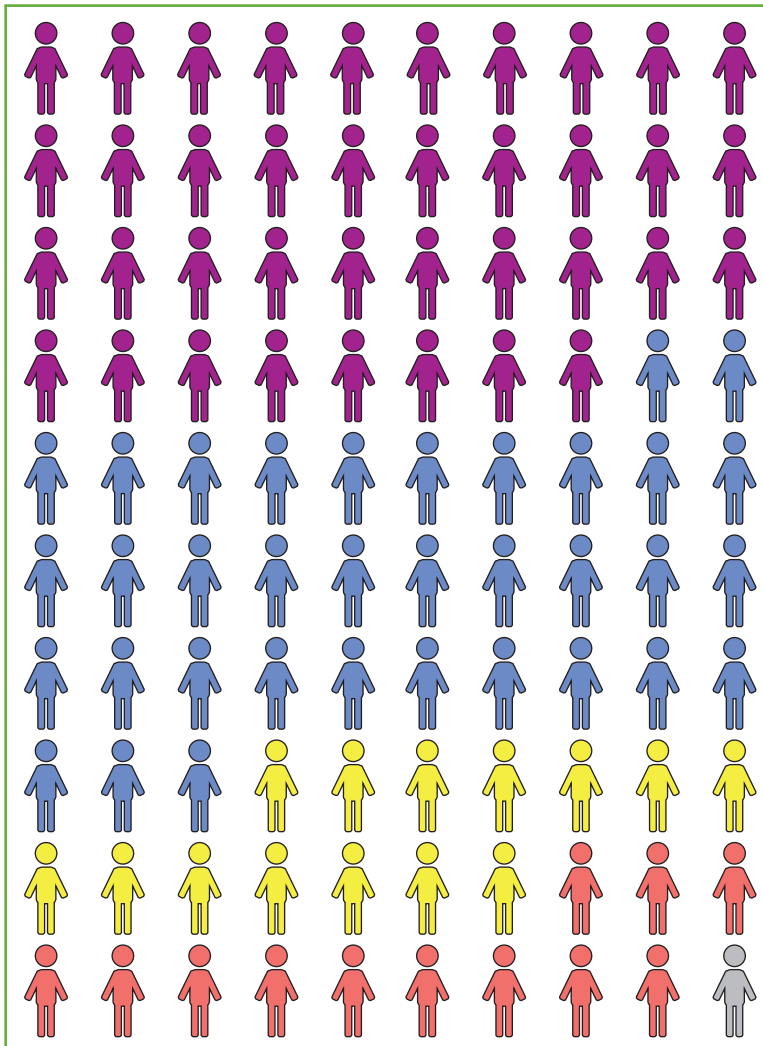
23. b) Resposta: Não; espera-se que os estudantes respondam que apenas entre os anos de 2021 e 2022 a área desmatada foi decrescente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

24. Analise o infográfico a seguir, com dados da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (Pnad) sobre pessoas em condição de extrema pobreza no Brasil em 2022.

24. b) Resposta: Mulheres pretas ou pardas: 38%; homens pretos ou pardos: 35%; mulheres brancas: 14%; homens brancos: 12%; outros: 1%. Caso os estudantes tenham dificuldades em interpretar os dados, auxilie-os a perceber que cada boneco representado na imagem simboliza 1%.

Porcentagem aproximada de pessoas em condições de extrema pobreza no Brasil por gênero e cor ou raça, em 2022



*Não são apresentados resultados para amarelos, indígenas e pessoas sem declaração de cor ou raça.

TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

24. d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reflitam sobre os dados e o histórico de violência e escravização da população negra no Brasil, que durou mais de 300 anos. Leve-os a refletir sobre o período pós-abolição da escravatura, no qual a população de ex-escravizados foi abandonada à própria sorte, sem nenhum tipo de indenização, acolhimento ou planejamento para inserção social por parte do então Império e posterior República. Esse cenário fez com que essas populações se organizassem em moradias precárias e continuassem a vida sendo discriminados pela cor e origem. Comente que essa herança escravocrata e o racismo disseminado por ela moldaram a forma como foram construídas as estruturas sociais e de poder no país, dando base ao conceito de racismo estrutural no qual está alicerçada a sociedade brasileira. Verifique se os estudantes percebem a relação desse conceito com os dados apresentados no infográfico.

Fonte de pesquisa: IBGE. *Síntese de indicadores sociais*: uma análise das condições de vida da população brasileira. Rio de Janeiro: 2023.

Observação

De acordo com o infográfico, cerca de 38% das pessoas em condição de extrema pobreza no Brasil em 2022 eram mulheres pretas ou pardas.

PARA EXPANDIR

Que tal saber mais sobre a relação entre raça e renda? Para isso, acesse o artigo **Entenda a relação entre raça e renda**, publicado no *site* do Governo do Estado de São Paulo. Disponível em: https://www.desenvolvimentosocial.sp.gov.br/racismo-no-brasil-entenda-a-relacao-entre-raca-e-renda/. Acesso em: 15 out. 2024.

24. c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que as porcentagens de pessoas pretas ou pardas em situação de extrema pobreza correspondem a mais do que o dobro da quantidade de pessoas brancas.

a) O Censo de 2022 indicou que a população brasileira naquele ano era de 203 milhões de pessoas. No mesmo ano, dados da Síntese de indicadores sociais do IBGE indicaram que 5,9% dessa população estava em situação de extrema pobreza. Calcule quantas pessoas estavam em situação de extrema pobreza no Brasil no ano de 2022. Resposta: 11 977 000 pessoas.

b) Quais são as porcentagens referentes a cada categoria representada na legenda do infográfico?

c) O que mais chamou a sua atenção ao analisar essas porcentagens?

d) De acordo com os seus conhecimentos como o racismo estrutural se relaciona com os dados apresentados no infográfico?

e) Em sua opinião, quais medidas podem ser tomadas para combater essa situação?
Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reflitam sobre políticas públicas de combate à desigualdade social e ao racismo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

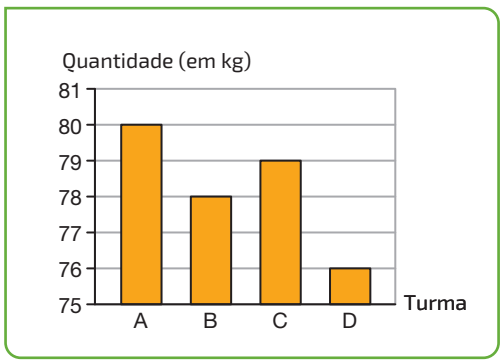
Inadequações em gráficos e tabelas

Gráficos e tabelas estão presentes em redes sociais, canais de televisão, jornais, livros, relatórios de empresas, entre outros meios que precisam apresentar uma série de dados de maneira concisa e de fácil leitura. Porém, há algumas inadequações que podem levar a erros de interpretação. A seguir, analisaremos um exemplo.

Os gráficos **I** e **II** apresentam os mesmos dados.

Gráfico I

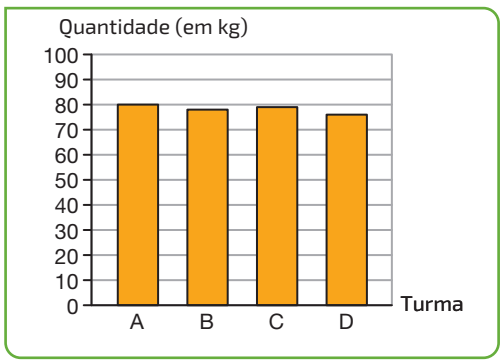
Quantidade de alimentos arrecadada pelas turmas de Ensino Médio, em 2026



Fonte de pesquisa: Coordenação da escola.

Gráfico II

Quantidade de alimentos arrecadada pelas turmas de Ensino Médio, em 2026



Fonte de pesquisa: Coordenação da escola.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: As informações apresentadas nos gráficos são fictícias.

Observação

Devemos ficar atentos ao realizar leituras de gráficos e tabelas, pois, caso contrário, podemos fazer uma interpretação equivocada das informações apresentadas.

Podemos verificar que o gráfico **I** nos induz a concluir que a quantidade de alimento arrecadada pela turma **A** é muito maior do que a arrecadada pelas outras turmas. Porém, ao analisarmos o gráfico **II**, em que o eixo vertical é iniciado em 0 kg, percebe-se que essa diferença é pequena. Assim, essa percepção pode parecer menor ou maior, dependendo da escala adotada, nesse caso, no eixo vertical.

Existem inúmeras outras maneiras de tentar manipular os dados apresentados. Analisaremos outras inadequações nos problemas propostos na seção **Exercícios e problemas**.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

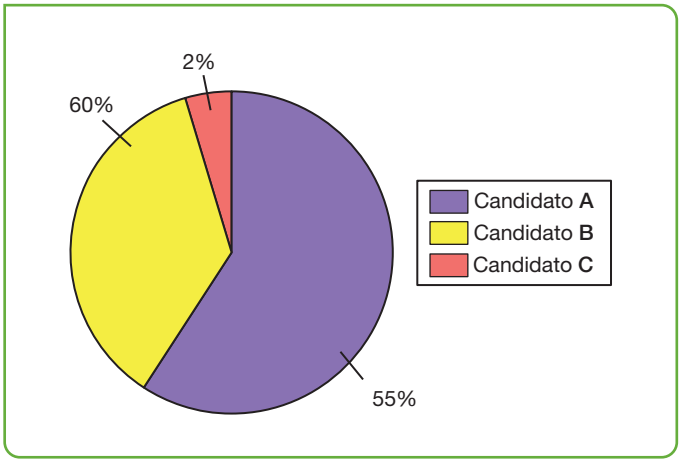
25. Para verificar as intenções de votos para prefeito de certa cidade, foram entrevistados os clientes de um supermercado **X**. Após a pesquisa, organizou-se o gráfico apresentado na imagem.

a) A amostra utilizada nessa pesquisa é representativa? Justifique sua resposta.

b) Há inadequações no gráfico apresentado nessa pesquisa? Se sim, quais?

Resposta: Sim, as porcentagens somam mais de 100%. Nesse caso, a amostra utilizada não é representativa e a área do setor correspondente a 55% é maior do que a área do setor correspondente a 60%.

Eleições municipais para prefeito: intenção de voto da população de certa cidade, em 2024



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: Clientes do supermercado X.

25. a) Resposta: Não, pois diferentes tipos de pessoas frequentam diferentes tipos de supermercados. A amostra daria unicamente indicações sobre a população constituída pelos clientes desse supermercado.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

26. A administração da loja MatSong organizou a seguinte tabela.

Professor, professora: O nome da loja apresentada nessa tarefa é fictício, assim como os dados apresentados na tabela.

Quantidade de guitarras vendidas por trimestre, em 2026

Loja	Quantidade			
	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre
MatSong	534	732*	740*	800*
Concorrente **A**	545	200	120	340
Concorrente **B**	500	160	210	250

* Valor acumulado.

Fonte de pesquisa: Administração da loja MatSong.

a) Qual loja vendeu a maior quantidade de guitarras no 1º trimestre? E no 3º trimestre?

Resposta: Concorrente **A**; Concorrente **B**.

b) Em sua opinião, a administração da loja MatSong utilizou algum recurso para manipular as informações apresentadas na tabela? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que sim, pois os valores referentes às vendas da loja MatSong no 2º, 3º e 4º trimestres são acumulados, enquanto os referentes às vendas das outras lojas são trimestrais.

c) Entre as lojas apresentadas na tabela, qual vendeu a maior quantidade de guitarras em 2026?

Resposta: Concorrente **A**.

27. A fim de conhecer a situação financeira das empresas de certo estado, foram entrevistadas as cinco empresas que tiveram o maior volume de exportação no último ano. A amostra utilizada nessa pesquisa é representativa? Justifique sua resposta.

Resposta: Não, pois foram analisadas apenas as empresas que tiveram os maiores volumes de exportação no último ano, o que, geralmente, não representa a situação financeira de todas as empresas de um estado.

28. Analise o gráfico.

ODS 9

Aparentemente, houve um aumento de residências com telefone fixo entre os anos de 2016 e 2022? Quais recursos foram utilizados para nos induzir a essa interpretação?

Resposta: Não. Espera-se que os estudantes respondam que o eixo "Quantidade (%)" está invertido.

Domicílios brasileiros com telefone fixo, de 2016 a 2022



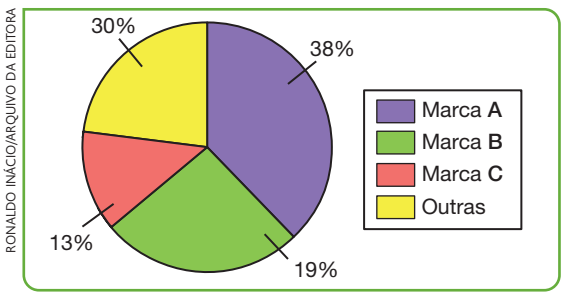
Fonte de pesquisa: TELECO – Inteligência em Telecomunicações. *Estatísticas de Domicílios Brasileiros (IBGE – PNAD)*. Disponível em: https://www.teleco.com.br/pnad.asp. Acesso em: 23 set. 2024.

TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

29. O gráfico e a tabela a seguir apresentam as vendas de *notebook* por marca durante o ano de 2025. Porém, o gráfico contém algumas incoerências. Professor, professora: As informações apresentadas na tabela e no gráfico são fictícias.

Vendas de *notebook* por marca, em 2025



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: Administração das marcas.

Vendas de *notebook* por marca, em 2025

Marca	Quantidade (%)
A	38
B	19
C	13
D	11
E	11
F	8

Fonte de pesquisa: Administração das marcas.

a) Analise, rapidamente, o gráfico de setores. Aparentemente, a marca **B** vendeu mais *notebooks* que as marcas **D**, **E** e **F** juntas. Quais recursos foram utilizados para manipular as informações?

b) Analise cuidadosamente o gráfico e a tabela. Em seguida, determine se a marca **B** vendeu mais *notebooks* que as marcas **D**, **E** e **F** juntas. Resposta: A marca **B** vendeu menor quantidade de *notebooks* do que as marcas **D**, **E** e **F** juntas.

29. a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que a área do setor correspondente à marca **B** foi ampliada e a área do setor correspondente a "Outras" foi reduzida.

O que faz um biomédico?

Durante a pandemia de COVID-19, a biomédica Jaqueline Goes de Jesus realizou, no ano de 2022, um feito científico fundamental que marcou a história brasileira no campo da Biomedicina. Trabalhando como coordenadora de uma equipe de cientistas formada majoritariamente por mulheres, ela foi responsável por sequenciar em tempo recorde o **genoma** do SARS-Cov-2. O sequenciamento foi concluído apenas 48 horas depois da detecção do primeiro caso da doença no Brasil. Em média, outros países precisaram de pelo menos 15 dias para executar o mesmo feito. Sua brilhante atuação lhe rendeu o prêmio Mulheres na Ciência Amélia Império Hamburger, concedido pela Câmara dos Deputados, além de grande visibilidade internacional e reconhecimento pela excelência da participação feminina na solução de grandes desafios mundiais, incentivando a capacitação de mais mulheres cientistas.



RAISA MESQUITA/CÂMARA DOS DEPUTADOS

Cientista baiana Jaqueline Goes de Jesus durante cerimônia de entrega do Prêmio Mulheres na Ciência Amélia Império Hamburger, concedido pela Câmara dos Deputados a cientistas que se destacaram nas áreas de Ciências Exatas, Naturais e Humanas, em 5 de julho de 2022.

Fonte de pesquisa: Jaqueline Goes: A cientista que "leu" o novo coronavírus. *Saiba mais cientistas* (*conteúdo digital*).*cdr*. Disponível em: https://museucatavento.org.br/mulheres-na-ciencia/jaqueline-goes/FOLDER.pdf. Acesso em: 17 out. 2024.

Genoma: sequência de DNA (ácido desoxirribonucleico) que contém todas as informações hereditárias de um ser vivo.

Além da atuação no sequenciamento do genoma, o trabalho dos biomédicos foi fundamental em muitos momentos durante a pandemia de COVID-19, realizando estudos clínicos que contribuíram para o entendimento, o tratamento e a prevenção da doença, além de se dedicarem ao desenvolvimento da vacina.

A Biomedicina é uma ciência que reúne saberes da Biologia e da Medicina visando capacitar o biomédico para análises laboratoriais com o objetivo de identificar as causas, os sintomas e o comportamento de doenças, assim como encontrar diagnósticos, terapias e medidas de prevenção de enfermidades que colocam em risco a saúde das pessoas. Portanto, esse profissional da saúde trabalha, entre outros objetivos, com o propósito de estudar patologias, descobrir medicamentos e aprimorar tratamentos para a cura de doenças, contribuindo para o progresso da ciência e em favor da saúde pública. Nessas tarefas, o uso do conhecimento estatístico é fundamental. Em estudos clínicos, como o desenvolvimento de vacinas, ele auxilia a estabelecer a quantidade de pessoas necessárias e os perfis de grupos que serão testados, além de analisar os resultados e sua confiabilidade.

Professor, professora: Explique aos estudantes que SARS-CoV-2 foi o nome dado à sequência do genoma viral do coronavírus.

Por apresentar um caráter multifacetado, a profissão permite ao biomédico trabalhar em diferentes ramos de atividade, como planejamento e execução de pesquisas científicas, análises físico-químicas e microbiológicas, realização de exames para perícia criminal, docência etc. Além disso, ainda pode atuar, principalmente, em hospitais, clínicas, laboratórios e instituições de ensino.

Dica

Para se tornar um biomédico, é necessário cursar uma graduação em Biomedicina ou Ciências biológicas, na modalidade médica, em instituição de Ensino Superior, que seja reconhecida pelo Ministério da Educação (MEC), e se registrar no Conselho Regional de Biomedicina (CRBM).

Atividades

Anote as respostas no caderno.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Na sua opinião, qual é a importância do trabalho desenvolvido pelos biomédicos para a saúde pública? Troque ideias com os colegas.

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes apontem que os biomédicos desempenham um papel primordial para a saúde pública, uma vez que trabalham com o propósito de estudar patologias, descobrir medicamentos e aprimorar tratamentos que promovam a cura e a prevenção de doenças que afetam a população. Com isso, a profissão busca contribuir para o progresso da ciência a favor da saúde pública e do bem-estar da população.

2. O que mais chamou a sua atenção na profissão de biomédico?

Professor, professora: Caso haja estudantes que já conheciam a profissão, pergunte a eles se conhecem algum biomédico. Incentive-os a falar sobre quais foram os motivos de determinado aspecto da profissão ter chamado a atenção deles.

Resposta pessoal. A resposta depende da perspectiva de cada estudante a respeito das informações apresentadas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

Tipos de desinformação

Professor, professora: Se julgar conveniente, informe aos estudantes que os conteúdos chegam até nós por meio de jornais, revistas, telejornais, redes sociais, aplicativos de mensagens instantâneas, conversas etc.

Início de conversa

Converse com os colegas sobre as questões a seguir.

1. Você costuma compartilhar conteúdos nas redes sociais? Com que frequência?

1. Resposta pessoal. Incentive os estudantes a comentar com os colegas quais hábitos de compartilhamento têm nas redes sociais. Como muitos deles têm contas em redes sociais, além de usarem aplicativos de mensagens instantâneas, é possível que boa parte tenha esse costume.

2. Você lembra o que o último conteúdo que você compartilhou informava? Sabe a procedência dessa informação?

Resposta pessoal. O objetivo da questão é incentivar os estudantes a refletir sobre os conteúdos que compartilham cotidianamente, de modo que percebam que, muitas vezes, as pessoas acabam compartilhando informações sem se aprofundar no tema que abordam, sem saber a origem delas e investigar se as fontes são confiáveis. Reforce que esses cuidados são necessários para evitarmos a difusão da desinformação e/ou das notícias falsas, como será tratado a seguir.

Todos os dias conteúdos são recebidos e compartilhados nas redes sociais. O vídeo fofo de um cachorrinho, a música nova de um artista, a imagem que viralizou, a notícia que causou indignação... A internet é um campo de conteúdos criativos, engraçados e informativos que o tempo todo nos convida a compartilhá-los. Essa prática é interessante, mas temos de agir com responsabilidade para não espalhar **desinformação**.

A desinformação se dá por meio da criação ou do compartilhamento de informações distorcidas ou falsas com a intenção de enganar o público ou não. Ela pode ser classificada em alguns tipos, a depender das técnicas de comunicação utilizadas.



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Sátira ou paródia
Conteúdo humorístico exagerado ou absurdo que visa entreter, sem a intenção de enganar o público.

Conteúdo enganoso
Uso tendencioso de uma informação real buscando transmitir ao público uma interpretação específica sobre uma pessoa, um grupo ou uma ideia.

Falsa conexão
Uso intencional de imagens, legendas ou manchetes que não condizem com o conteúdo ou que levam a uma interpretação equivocada dele.

Conteúdo impostor
Imitação de elementos da identidade visual de veículos de comunicação de credibilidade para disseminar conteúdos falsos com a intenção de enganar o público, levando-o a acreditar que se trata de uma fonte confiável.

Falso contexto
Manipulação de informações verdadeiras em contexto diferente do original, como abordar um assunto utilizando um comentário antigo, referente a outro tema ou recortado de uma fala mais completa.

Manipulação de conteúdo
Manipulação de conteúdo originalmente verdadeiro com o auxílio de algum *software*, gerando uma informação falsa para enganar o público. É muito usado em imagens ou vídeos.

Conteúdo fabricado
Conteúdo totalmente falso, sem vínculo com a realidade e criado com o único intuito de gerar desinformação e prejudicar uma pessoa, um grupo ou uma ideia.

KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: FERREIRA, Bruno. *Jornalismo e educação*: competências necessárias à prática educomunicativa. Curitiba: Appris, 2022.

Diferentemente da desinformação, que nem sempre é repassada de maneira intencional, as chamadas *fake news* (notícias falsas) caracterizam-se pela criação e disseminação em massa, sempre proposital, de conteúdos falsos. Muitos desses conteúdos são criados e espalhados por grupos profissionais com a intenção de promover ou prejudicar a imagem de uma pessoa, um grupo ou uma ideia.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1. Resposta pessoal. Incentive os estudantes a mencionar os mecanismos que utilizaram para entender que se tratava de uma desinformação e como se sentiram diante da situação. Caso percebam que as técnicas utilizadas por eles são duvidosas e têm surtido efeito contrário, acreditando que uma informação verdadeira fosse desinformação, procure o conteúdo em mídias tradicionais ou científicas e converse sobre essas novas percepções.

Como evitar o compartilhamento de uma desinformação?

O compartilhamento de uma desinformação pode causar grandes danos tanto para quem recebe o conteúdo distorcido ou falso quanto para a pessoa, o grupo ou a ideia que é objeto do assunto compartilhado. Em muitos casos, isso pode influenciar toda uma sociedade e prejudicar ações ou políticas públicas consolidadas, como as diversas desinformações que foram disseminadas durante a pandemia de COVID.

Afinal, como evitar o compartilhamento de uma desinformação? Antes de tudo, é necessário identificá-la. Verifique a seguir quatro perguntas que podem ajudar nesse processo.

Onde a informação foi publicada?

É fundamental saber "de onde saiu" uma informação. Ao receber uma imagem, um vídeo ou um texto com informação relevante ou se deparar com esses conteúdos nas redes sociais, perguntar a quem enviou ou ao autor qual é a fonte. Caso a pessoa não saiba, faça uma pesquisa na internet para tentar encontrar algo sobre o assunto. É importante verificar como o veículo de comunicação se posiciona, quem é responsável pelo conteúdo, se ele está comprometido com princípios democráticos etc. Isso pode ser consultado na área "Quem somos", "Sobre nós", "Linha editorial" ou algo que expresse claramente a proposta do veículo. Se um *site* não tiver essa área de transparência, possivelmente ele não é confiável.

O que outras fontes dizem sobre a informação?

Dificilmente uma notícia é publicada em apenas um meio. Mesmo que se trate de uma apuração específica de um jornalista, provavelmente o conteúdo será apurado e divulgado por outros veículos no dia seguinte. Ao ler, ouvir ou assistir a um conteúdo em alguma fonte, procure outras publicações sobre ele. Mesmo que a mídia consultada seja confiável, analisar diferentes fontes sobre o assunto é importante para perceber mais de um ponto de vista, comparar informações, entender possíveis desdobramentos e formar a própria opinião sobre a situação.

Qual é a data da publicação?

Uma das maneiras de compartilhar informações fora de contexto é divulgando falas ou fatos antigos como se fossem atuais. O contexto diz muito sobre uma informação. Pessoas mudam de opinião, e um fato ocorrido em outro momento não necessariamente tem o mesmo peso de algo ocorrido atualmente.

Se receber uma informação assim, é importante verificar a relevância atual do fato ou se a pessoa ainda pensa dessa forma.

É fato ou opinião?

Em jornais e mídias tradicionais, repórteres publicam notícias, descrevendo o fato e suas principais características, e consultam as fontes envolvidas. Em geral, esses textos são escritos com a intenção apenas de informar. Nos mesmos veículos também são publicados conteúdos de opinião, que podem ser em forma de editorial, representando a visão da empresa de mídia, ou em forma de artigos de opinião, escritos frequentemente por colunistas especialistas. Nada impede que você compartilhe esse tipo de conteúdo caso concorde com ele, mas é importante deixar claro que se trata de uma visão particular sobre um fato.

ILUSTRAÇÕES: LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2. Resposta: Conteúdo fabricado, manipulação de conteúdos e conteúdo impostor sempre serão *fake news*, pois são conteúdos criados ou manipulados com a intenção de enganar. Conteúdo enganoso, falso contexto ou falsa conexão podem ser *fake news*, mas geralmente são baseados em conteúdos reais que podem ser compartilhados de maneira enganosa não intencional ou com interesses mercadológicos, sem necessariamente a intenção de prejudicar alguém. Sátira é um conteúdo de entretenimento e humor, sem a intenção de prejudicar, portanto não é considerada *fake news*.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Você se lembra de ter recebido alguma informação ou se deparado com algum conteúdo que descobriu ser falso ou distorcido? Converse com os colegas.

2. Quais tipos de desinformação elencadas na página anterior são ou podem ser considerados *fake news*?

3. Como você se informa sobre as notícias da cidade onde mora, do país e do mundo? Compartilhe suas fontes com os colegas e façam uma pesquisa conforme as orientações desta página para descobrir se são fontes confiáveis. Ao final, listem os veículos que a turma confirmou ser confiáveis e passem a utilizá-los. Resposta pessoal. Auxilie os estudantes nesta atividade. Se necessário, a tarefa pode ser organizada em grupos e depois compartilhada com o restante da turma. Caso os estudantes não tenham muitas referências, é possível consultar os veículos associados à **Associação Nacional de Jornais**, disponível em: https://www.anj.org.br (acesso em: 17 out. 2024), ou à **Associação de Jornalismo Digital**, disponível em: https://ajor.org.br/. (acesso em: 17 out. 2024). Nesses *sites*, há diversas opções de mídias tradicionais e independentes, gerais ou segmentadas, de diferentes linhas editoriais. Mais orientações sobre essa atividade no **Suplemento para o professor**.

Medidas de tendência central

As **medidas de tendência central** são utilizadas quando é necessário representar ou caracterizar, por um único valor, um conjunto de dados.

Quando dizemos, por exemplo, que a renda habitual média dos brasileiros foi de R$ 3 137,00 nos primeiros três meses de 2024, indicamos que esse é um valor que representa o conjunto formado pela renda de todos os empregados, empregadores e trabalhadores por conta própria considerados na pesquisa.

Neste tópico, estudaremos a média aritmética, a média aritmética ponderada, a moda e a mediana, que são medidas de tendência central.

Média aritmética

A **média aritmética**, ou simplesmente **média**, é uma das medidas de tendência central mais usadas no cotidiano. Para calcular a média aritmética de dois ou mais números, adicionamos esses números e dividimos o resultado obtido pela quantidade de números adicionados.

A média aritmética $(\bar{x})$ de um conjunto de n valores $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots, x_{n-1},\ x_n)$ é:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n}$$

Exemplo

A tabela mostra o número de transplantes de fígado realizados no Brasil anualmente, de 2016 a 2023.

Transplantes de fígado no Brasil, de 2016 a 2023

Ano	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Quantidade de transplantes	1 879	2 118	2 217	2 265	2 075	2 058	2 162	2 416

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Saúde. *Relatório de Transplantes Realizados (Brasil) – Evolução 2001 – 2023*. 5 ago. 2024. Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/composicao/saes/snt/estatisticas/transplantes-serie-historica/transplantes-realizados/relatorio-de-transplantes-realizados-brasil-evolucao-2001-2023/view. Acesso em: 19 ago. 2024.

Calculando a média anual de transplantes de fígado realizados no período, temos:

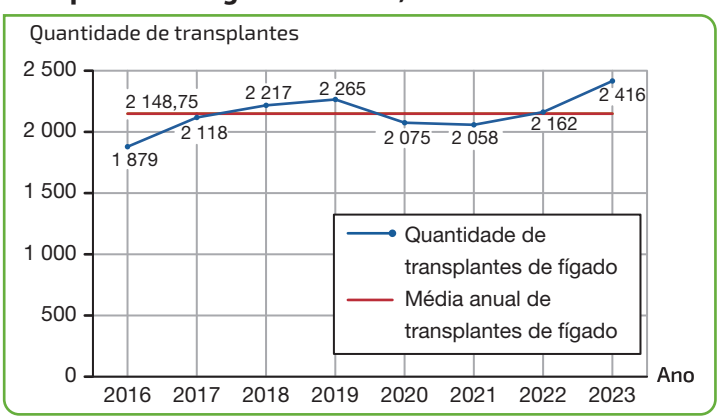
$$\bar{x} = \frac{1879 + 2118 + 2217 + 2265 + 2075 + 2058 + 2162 + 2416}{8} = 2\,148{,}75$$

Portanto, de 2016 a 2023, foram realizados, por ano, em média 2 148,75 transplantes de fígado no Brasil.

Professor, professora: Explique aos estudantes que, mesmo quando a variável é do tipo quantitativa discreta, é conveniente utilizarmos valores decimais para representar medidas estatísticas, como a média aritmética.

No gráfico apresentado, a linha em azul indica a quantidade de transplantes de fígado, e a linha em vermelho indica a média anual.

Transplantes de fígado no Brasil, de 2016 a 2023



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Saúde. *Relatório de Transplantes Realizados (Brasil) – Evolução 2001 – 2023*. 5 ago. 2024. Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/composicao/saes/snt/estatisticas/transplantes-serie-historica/transplantes-realizados/relatorio-de-transplantes-realizados-brasil-evolucao-2001-2023/view. Acesso em: 19 ago. 2024.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Média aritmética ponderada

No cálculo da média aritmética visto anteriormente, cada valor do conjunto de dados tinha a mesma "importância". Contudo, há situações nas quais há valores com "importâncias" diferentes. Acompanhe a situação a seguir.

OBJETO DIGITAL
***Podcast*: O que é TRI e como ela afeta sua nota na prova do Enem?**

No processo de seleção de certa instituição de Ensino Superior, a nota do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) obtida pelo candidato tem peso 4, e a nota obtida no vestibular, peso 6. Se um candidato obtiver nota 70 no Enem e 50 no vestibular, qual será sua nota média final?

Nessa situação, precisamos levar em consideração o peso ("importância") de cada nota obtida (Enem e vestibular). Essa característica torna necessária, para o cálculo da nota média final do candidato, a utilização da **média aritmética ponderada** $(\bar{x}_p)$, que é dada pela soma dos produtos de cada nota pelo respectivo peso, dividida pela soma dos pesos.

Na situação apresentada, temos:

$$\bar{x}_p = \frac{4 \cdot 70 + 6 \cdot 50}{4 + 6} = \frac{280 + 300}{10} = \frac{580}{10} = 58$$

Portanto, a nota média final do candidato foi 58.

A média aritmética ponderada $(\bar{x}_p)$ de um conjunto de n valores $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_n$ cujos pesos são respectivamente $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_{n-1}, p_n$, é:

$$\bar{x}_p = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4 + \ldots + x_{n-1} \cdot p_{n-1} + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \ldots + p_{n-1} + p_n}$$

Moda

Quando dizemos que algo está na moda, como uma peça de vestuário, estamos nos referindo a um modelo de roupa que é aceito e usado por muitas pessoas. Em Estatística, a **moda** (*Mo*) é uma medida de tendência central que consiste nos valores de maior frequência em um conjunto de dados.

Exemplo

Verifique a seguir a quantidade de gols marcados nos 40 primeiros jogos da série A do Campeonato Brasileiro de Futebol Masculino de 2024.

3	2	4	3	3	3	0	4	5	1
3	2	3	2	2	2	1	3	1	3
1	1	3	4	0	1	6	3	4	3
1	2	4	3	2	2	2	0	4	2

Fonte de pesquisa: CBF. *Campeonato brasileiro*. 2024. Disponível: https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/tabelas/campeonato-brasileiro/serie-a/2024. Acesso em: 11 set. 2024.



YURI MURAKAMI/FOTOARENA

Momento de disputa de bola durante uma partida entre Palmeiras e São Paulo, pela série A do Campeonato Brasileiro de Futebol Masculino, em 18 de agosto de 2024.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para auxiliar na obtenção da moda da quantidade de gols marcados por partida, podemos determinar a **frequência** (f) de cada valor, ou seja, quantas vezes esse valor se repete no conjunto de dados.

Gols marcados nos 40 primeiros jogos da série A do Campeonato Brasileiro de Futebol Masculino, em 2024

Quantidade de gols marcados por jogo	Frequência
0	3
1	7
2	10
3	12
4	6
5	1
6	1

Fonte de pesquisa: CBF. *Campeonato brasileiro*. 2024. Disponível: https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/tabelas/campeonato-brasileiro/serie-a/2024. Acesso em: 11 set. 2024.

Portanto, como a maior frequência (12) foi 3 gols, temos $Mo = 3$, ou seja, a moda desse conjunto de dados é 3 gols.

Questão A.
Como você faria para determinar o total de gols marcados nos 40 primeiros jogos do campeonato brasileiro de futebol masculino de 2024 com base nas informações apresentadas?

Sugestão de resposta: Adicionaria os produtos de cada frequência pela respectiva quantidade de gols, cujo total é de 47 gols.

Há conjuntos de dados que não têm moda, denominados **amodais**. Contudo, existem também aqueles que têm mais de uma moda. Denominamos **bimodais** aqueles que têm duas modas, **trimodais** os que têm três modas, e assim por diante.

Exemplos

a) Preço, em reais, de certo produto em diversos supermercados.

1,85 2,07 2,11 2,45 2,49 2,79 2,99

Nesse caso, o conjunto dos preços é amodal, pois nenhum preço se repetiu mais vezes que outro.

b) Idade, em anos, dos funcionários de certa empresa.

18 21 21 21 23 27 31 31 31 38 42

Nesse caso, há duas idades empatadas com maior frequência (21 anos e 31 anos), ou seja, o conjunto das idades é bimodal.

c) Quantidade de gols marcados por Jéssica nos últimos 7 jogos do campeonato municipal.

1 3 0 3 0 1 4

Nesse caso, há três quantidades de gols marcados empatadas com maior frequência (1 gol, 3 gols e 0 gol), ou seja, o conjunto das quantidades de gols marcados é trimodal.

Mediana

Outra medida de tendência central muito utilizada é a **mediana** (*Md*).

Podemos considerar dois casos para a obtenção da mediana.

a) Conjunto de dados com quantidade **ímpar** de valores.

Nesse caso, inicialmente dispomos esses valores em **rol**, ou seja, em ordem crescente ou decrescente. A mediana corresponderá ao termo central do rol.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplo

A seguir, está indicado em ordem crescente o comprimento, em centímetros, de 11 peixes criados por um piscicultor.

13	15	15	16	17	18	19	19	21	22	22

Portanto, a mediana dos comprimentos dos peixes é 18 cm.

Observação

Quando a quantidade n de valores de um conjunto de dados for ímpar, a posição do valor correspondente à mediana, com os valores dispostos em rol, é dada por $\frac{n+1}{2}$.

b) Conjunto de dados com quantidade **par** de valores.

Com os valores dispostos em rol, obtemos a mediana calculando a média aritmética entre os dois termos centrais do rol.

Exemplo

A seguir, está indicada em rol a medida, em megabaites, de 12 arquivos gravados em um *pen drive*.

76	82,4	103	142,5	167,2	173,1	181,5	207,4	248,2	262,3	281	313,3

$$Md = \frac{173{,}1 + 181{,}5}{2} = \frac{354{,}6}{2} = 177{,}3$$

Portanto, a mediana da medida dos arquivos é 177,3 megabaites.

Observação

Quando a quantidade n de valores de um conjunto de dados for par, a posição dos valores cuja média aritmética corresponde à mediana, com os valores dispostos em rol, é dada por $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$.

Exercícios e problemas resolvidos

R1. A seguir estão apresentados os resultados de 212 candidatos aprovados em um concurso e que resolveram uma prova com 30 questões. Professor, professora: As informações apresentadas na tabela são fictícias.

Resultados de 212 candidatos aprovados em um concurso

Total de acertos	Quantidade de candidatos
23	64
24	54
25	39
26	29
27	15
28	7
29	3
30	1

Fonte de pesquisa: Banca organizadora do concurso.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Com base nas informações apresentadas na página anterior, calcule a média aritmética, a moda e a mediana para a variável "total de acertos" e dê o significado de cada uma delas.

Resolução

Inicialmente, calculamos a média aritmética $(\bar{x})$ do total de acertos por candidato.

$$\bar{x} = \frac{64 \cdot 23 + 54 \cdot 24 + 39 \cdot 25 + 29 \cdot 26 + 15 \cdot 27 + 7 \cdot 28 + 3 \cdot 29 + 1 \cdot 30}{64 + 54 + 39 + 29 + 15 + 7 + 3 + 1}$$

$$\bar{x} = \frac{5\,215}{212} \simeq 24{,}6$$

Sendo assim, os candidatos acertaram, em média, aproximadamente 24,6 questões.

Já a moda corresponde ao total de acertos com maior frequência, ou seja, $Mo = 23$.

Logo, a quantidade de questões que mais estudantes acertaram foi 23.

Por fim, calculamos a mediana. Como o total de candidatos é par (212), as posições centrais são 106º e 107º, pois:

$$\frac{n}{2} = \frac{212}{2} = 106 \qquad \frac{n}{2} + 1 = \frac{212}{2} + 1 = 107$$

Se organizássemos todos os candidatos em ordem crescente, de acordo com o total de acertos, obteríamos que do 1º ao 64º acertaram 23 questões e do 65º ao 118º acertaram 24 questões (54 candidatos).

Logo, os candidatos de posições 106º e 107º acertaram 24 questões. Assim:

$$Md = \frac{24 + 24}{2} = 24$$

Portanto, a quantidade mediana de acertos dos 212 candidatos é 24.

R2. Um instituto de pesquisa entrevistou alguns consumidores em relação à qualidade de três marcas de televisores. Verifique a nota média dada pelos entrevistados em três critérios e os pesos atribuídos pelo instituto para o cálculo da média final.

Avaliação de qualidade de três marcas de televisores, em 2025

Marca do televisor	Critério		
	Qualidade de imagem	Qualidade de som	Preço
A	8	7	6
B	7	8	6
C	9	6	4
Peso	5	3	2

Fonte de pesquisa: Instituto de pesquisa.

Qual marca de televisor obteve a maior média final?

Resolução

Indicando por $\bar{x}_{P_A}$, $\bar{x}_{P_B}$ e $\bar{x}_{P_C}$ as médias finais dos televisores das marcas **A**, **B** e **C**, respectivamente, temos:

$$\bar{x}_{P_A} = \frac{8 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 6 \cdot 2}{5 + 3 + 2} = \frac{73}{10} = 7{,}3$$

$$\bar{x}_{P_B} = \frac{7 \cdot 5 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 2}{5 + 3 + 2} = \frac{71}{10} = 7{,}1$$

$$\bar{x}_{P_C} = \frac{9 \cdot 5 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{5 + 3 + 2} = \frac{71}{10} = 7{,}1$$

Portanto, a marca **A** obteve a maior média final.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

30. Calcule a média aritmética, a moda e a mediana de cada conjunto de valores.

a) 3 8 15 5 3 12 7 11

Resposta: Média: 8; moda: 3; mediana: 7,5.

b) −6 −4 −7 −11 −3 −1 −6 −7 −10 −19 0 −25 −22 −2 −15

Resposta: Média: −9,2; moda: −6 e −7; mediana: −7.

c) −20 5 8 −1 12 −24 6 10 −3 16 −1 −8 0

Resposta: Média: 0; moda: −1; mediana: 0.

31. Os avanços tecnológicos na construção civil permitem a edificação de prédios cada vez mais altos. Verifique a altura de alguns dos prédios mais altos do mundo em 2024.

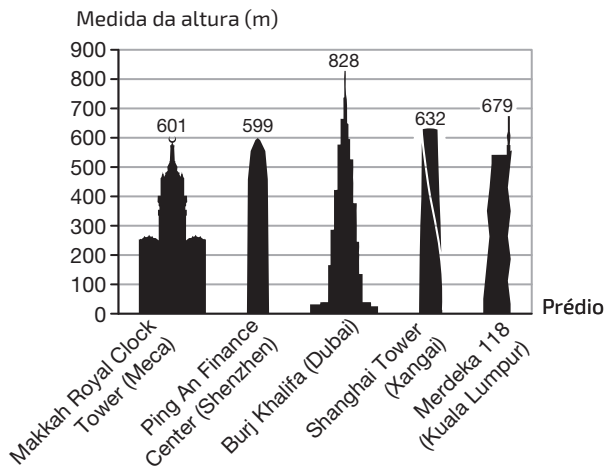
a) Calcule a média aritmética, a moda e a mediana das alturas desses prédios.

Resposta: Média: 667,8 m; amodal; mediana: 632 m.

b) Qual prédio deve ser desconsiderado para que a média das alturas diminua? Nesse caso, qual seria essa média?

Resposta: Burj Khalifa; 627,75 m.

Altura de alguns dos prédios mais altos do mundo, em 2024



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: COUNCIL ON TALL BUILDINGS AND URBAN HABITAT. *Tallest Buildings*. Disponível em: https://www.skyscrapercenter.com/buildings. Acesso em: 11 set. 2024.

32. Felipe tem o dobro da idade do filho e metade da idade do pai. Sabendo que a média da idade dos três é 49 anos, qual é a idade de cada um deles?

Resposta: Felipe: 42 anos; filho: 21 anos; pai: 84 anos.

33. Após ter realizado uma prova **A** com peso 7 e obtido nota 6,5, Carlos realizará uma prova **B**, com peso 5. Sabendo que para ser aprovado ele deve obter a média ponderada das notas das provas **A** e **B** igual ou superior a 7, qual é a nota mínima que Carlos deve obter na prova **B**? Resposta: 7,7

34. Certo concurso público era composto de três etapas: prova de conhecimentos gerais, prova de conhecimentos específicos e prova prática. Para ser aprovado no concurso, o candidato não poderia obter em nenhuma das etapas nota inferior a 5 pontos, e a média aritmética final das três notas tinha de ser igual ou superior a 7 pontos. Verifique a seguir as notas obtidas por três candidatos nas duas primeiras etapas desse concurso.

Notas dos candidatos nas duas primeiras etapas

Candidato	Prova	
	Conhecimentos gerais	Conhecimentos específicos
Antônia	5,2	6,3
Pedro	6,5	7,2
Fátima	7,8	8,3

Fonte de pesquisa: Banca organizadora do concurso.

Resposta: Não, pois sua média aritmética final será de, aproximadamente, 6,8, que é inferior à nota média mínima necessária.

a) Caso Antônia obtenha nota 9 na prova prática, ela será aprovada? Por quê?

b) Qual é a nota mínima que Pedro deve obter na prova prática para que seja aprovado?

Resposta: 7,3

c) É possível afirmar que se Fátima não for eliminada na prova prática ela será aprovada? Justifique sua resposta. Resposta: Sim, pois, para não ser eliminada na prova prática, a nota de Fátima deve ser igual ou superior a 5, nota com a qual sua média final ficará maior do que 7.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Professor, professora: A tarefa **39** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo, assim, para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

35. A seguir é apresentada a quantidade de estudantes de cada uma das três turmas do Ensino Médio de um colégio e as notas médias em Matemática de cada uma delas, no 2º bimestre de 2025. Qual foi a média geral em Matemática nessas três turmas nesse bimestre? Resposta: 67

Média das notas em Matemática por turma do Ensino Médio, no 2º bimestre de 2025

Turma	Quantidade de estudantes	Nota média em Matemática
A	24	77
B	30	59
C	26	67

Professor, professora: Os dados apresentados na tabela são fictícios. Fonte de pesquisa: Professora de Matemática.

36. Nos Jogos Olímpicos de Paris em 2024, Rebeca Andrade conquistou a medalha de ouro na final do solo na ginástica artística. Ela se tornou a maior medalhista olímpica da história do Brasil. A seguir são apresentadas as pontuações obtidas pelas atletas que participaram dessa final.

14,166	14,133	13,766	13,700	13,666
13,600	13,166	13,000	12,133	



A.RICARDO/SHUTTERSTOCK

Ginasta Rebeca Andrade com a medalha de ouro, nos Jogos Olímpicos de Paris, em 2024.

A mediana das pontuações apresentadas é: Resposta: Alternativa **b.**

a) 13,700 **b)** 13,666 **c)** 13,473

37. As redes sociais são espaços virtuais que possibilitam o relacionamento entre pessoas ou empresas por meio de mensagens, compartilhamento de conteúdos etc. Para divulgar seu trabalho, Carla publica vídeos em suas redes sociais. Professor, professora: Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Na tabela, são apresentadas algumas informações sobre os vídeos publicados por Carla em janeiro de 2025.

Quantidade de vídeos publicados semanalmente por Carla nas redes sociais, em janeiro de 2025

Semana	Quantidade de vídeos publicados	Tempo total dos vídeos postados (em minutos)
1	13	31
2	8	35
3	17	52
4	14	38

Fonte de pesquisa: Registros de Carla.

a) Determine o tempo médio de cada vídeo postado por Carla no último mês. Resposta: 3 minutos.

b) De acordo com as informações apresentadas, é possível determinar a mediana e a moda do intervalo de tempo dos vídeos publicados por Carla nesse mês? Justifique sua resposta. Resposta: Espera-se que os estudantes respondam que não, pois não é dado o tempo de cada vídeo para organizá-los em um rol e analisar esses dados.

38. O professor de Matemática apresentou na lousa, sem divulgar nomes, as notas obtidas pelos estudantes de uma turma do Ensino Médio na última prova, cuja nota máxima era 10.

3,4	8	10	9	10
8	7,5	5	10	8
9	8	6,8	10	8
9	9	10	8,5	3
9,5	10	7,8	8	7

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

a) Calcule a média, a moda e a mediana dessas notas e dê o significado de cada uma delas.

b) Conforme as medidas calculadas no item **a**, escreva um pequeno texto com algumas conclusões sobre as notas dessa turma na última prova de Matemática. Resposta pessoal.

39. Realize uma pesquisa sobre um assunto de seu interesse. Com os dados coletados, elabore um problema em que seja necessário calcular algumas medidas de tendência central do conjunto de dados obtidos. Em seguida, peça a um colega que o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

40. Considere um conjunto de dados composto de 7 números naturais, dos quais:

- 102 é o menor número;
- 107 é a única moda do conjunto de dados;
- 104 é a mediana do conjunto de dados.

De acordo com essas informações, podemos afirmar com certeza que: Resposta: Alternativa **a.**

a) o maior número desse conjunto de dados é o 107.

b) o 105 faz parte do conjunto de dados.

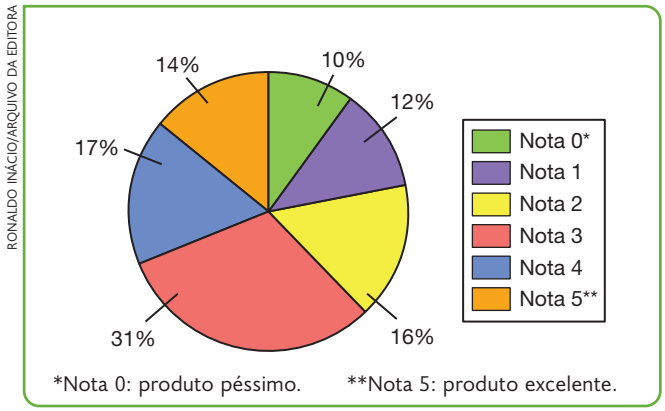
c) 108 é o maior número do conjunto de dados.

d) 103 é o segundo maior elemento desse conjunto de dados.

e) a mediana é igual à média do conjunto de dados.

41. Uma empresa fez uma pesquisa com 3 000 consumidores de um de seus produtos. Na pesquisa, cada consumidor atribuía uma nota de 0 até 5. Os resultados estão apresentados no gráfico a seguir.
Professor, professora: As informações apresentadas no gráfico são fictícias.

Avaliação dos consumidores do produto, em 2025



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: Registros da empresa.

a) Calcule a média, a moda e a mediana das notas atribuídas ao produto na pesquisa e dê o significado de cada uma delas. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Conforme as medidas calculadas no item **a**, escreva um pequeno texto com algumas conclusões sobre as notas atribuídas ao produto na pesquisa. Resposta pessoal. Espera-se que, nesse texto, os estudantes digam, por exemplo, que 62% dos entrevistados deram notas superiores à nota média.

42. Analise o quadro a seguir.

Valores e respectivos pesos de uma variável

Pesos	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Valores	20	22	25	26	28	30	34	48	55

Com o auxílio de uma calculadora, atribua valores distintos para os pesos a fim de que a média ponderada desse conjunto de valores seja menor do que 26. Sugestão de resposta: $a = 15$, $b = 8$, $c = 7$, $d = 6$, $e = 5$, $f = 4$, $g = 3$, $h = 2$, $i = 1$

43. (Enem, 2020) O técnico de um time de basquete pretende aumentar a estatura média de sua equipe de 1,93 m para, no mínimo, 1,99 m. Para tanto, dentre os 15 jogadores que fazem parte de sua equipe, vai substituir os quatro mais baixos, de estaturas: 1,78 m, 1,82 m, 1,84 m e 1,86 m. Para isso, o técnico contratou um novo jogador de 2,02 m. Os outros três jogadores que ele ainda precisa contratar devem satisfazer à necessidade de aumentar a média das estaturas da equipe. Ele fixará a média das estaturas para os três jogadores que ainda precisa contratar de acordo com o critério inicialmente estabelecido.

Qual deverá ser a média mínima das estaturas, em metro, que ele deverá fixar para o grupo de três novos jogadores que ainda vai contratar? Resposta: Alternativa **d.**

a) 1,96 **c)** 2,05 **e)** 2,08

b) 1,98 **d)** 2,06

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Medidas separatrizes

Existem situações em que desejamos dividir um conjunto de valores ordenado em partes iguais (ou aproximadamente iguais). Para isso, podemos empregar as chamadas **medidas separatrizes**. Por meio delas, podemos identificar valores que ocupam posições específicas no conjunto de dados organizados em ordem crescente.

As principais medidas separatrizes podem ser classificadas em:

- **mediana**: divide o conjunto de valores em duas partes iguais. Existe uma mediana (Md).
- **quartis**: dividem o conjunto de valores em 4 partes iguais. Existem três quartis $(Q_1, Q_2 \text{ e } Q_3)$.
- **decis**: dividem o conjunto de valores em 10 partes iguais. Existem nove decis $(D_1, \ldots, D_8 \text{ e } D_9)$.
- **percentis**: dividem o conjunto de valores em 100 partes iguais. Existem 99 percentis $(P_1, \ldots, P_{98} \text{ e } P_{99})$.

Dica

Fique atento! Para que seja possível identificar as medidas separatrizes, é necessário que o conjunto de dados esteja organizado em ordem crescente.

Observação

Neste tópico estudaremos os quartis, os decis e os percentis, pois a mediana, por ser também uma medida de tendência central, foi estudada no tópico anterior.

Quartis

Os quartis $(Q_1, Q_2 \text{ e } Q_3)$ dividem o conjunto de valores, organizado em ordem crescente, em quatro partes iguais. Nesse caso:

- aproximadamente 25% dos valores do conjunto são menores ou iguais ao primeiro quartil (Q_1), e aproximadamente 75% são maiores ou iguais ao primeiro quartil (Q_1);
- aproximadamente 50% dos valores do conjunto são menores ou iguais ao segundo quartil (Q_2), e aproximadamente 50% são maiores ou iguais ao segundo quartil (Q_2);
- aproximadamente 75% dos valores do conjunto são menores ou iguais ao terceiro quartil (Q_3), e aproximadamente 25% são maiores ou iguais ao terceiro quartil (Q_3).

Para determinar cada quartil, podemos utilizar a definição de mediana.

- Q_2: mediana do conjunto de dados.
- Q_1: mediana da primeira metade dos elementos do conjunto de dados (excluindo a mediana).
- Q_3: mediana da segunda metade dos elementos do conjunto de dados (excluindo a mediana).

Exemplo

Verifique os salários em reais dos funcionários de uma empresa organizados em rol.

1615	1700	1700	1830	1850	1935	2 000	2 000	2 050	3 180	3 180	4 200

O segundo quartil (Q_2) é mediana do conjunto de dados. Assim:

$$Q_2 = \frac{1935 + 2\,000}{2} = 1967{,}5$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O primeiro quartil (Q_1) é mediana da primeira metade dos elementos do conjunto de dados.

1615	1700	1700	1830	1850	1935

Assim:

$$Q_1 = \frac{1700 + 1830}{2} = 1765$$

O terceiro quartil (Q_3) é mediana da segunda metade dos elementos do conjunto de dados.

2 000	2 000	2 050	3 180	3 180	4 200

Assim:

$$Q_3 = \frac{2\,050 + 3\,180}{2} = 2\,615$$

Nesse exemplo, após calcular os quartis, podemos concluir, por exemplo, que 25% dos funcionários dessa empresa recebem R$ 1765,00 ou menos; metade dos funcionários recebe R$ 1967,50 ou menos; e 75% dos funcionários recebem R$ 2 615,00 ou menos.

Decis

Os decis $(D_1, \ldots, D_8$ e $D_9)$ dividem o conjunto de valores, organizado em ordem crescente, em dez partes iguais. Nesse caso, por exemplo:

- aproximadamente 30% dos valores do conjunto são menores ou iguais ao terceiro decil (D_3) e aproximadamente 70% são maiores ou iguais ao terceiro decil;
- aproximadamente 50% dos valores do conjunto são menores ou iguais ao quinto decil (D_5) e aproximadamente 50% são maiores ou iguais ao quinto decil;
- aproximadamente 80% dos valores do conjunto são menores ou iguais ao oitavo decil (D_8) e aproximadamente 20% são maiores ou iguais ao oitavo decil.

Para determinar os decis, geralmente é necessário algum procedimento de arredondamento.

Dica

- Indicamos o n-ésimo decil por D_n, com $1 \leq n \leq 9$.
- Note que o quinto decil é igual à mediana do conjunto de valores.

Exemplo

Considerando o conjunto de valores apresentado no exemplo anterior, segue que:

- o terceiro decil ocupa a 4ª posição, pois $3 \cdot \frac{12}{10} = 3{,}6 \simeq 4$. Nesse caso, $D_3 = 1830$.
- o oitavo decil ocupa a 10ª posição, pois $8 \cdot \frac{12}{10} = 9{,}6 \simeq 10$. Nesse caso, $D_8 = 3\,180$.

Nesse exemplo, após calcular esses decis, podemos concluir, por exemplo, que aproximadamente 30% dos funcionários da empresa recebem R$ 1830,00 ou menos e aproximadamente 80% dos funcionários recebem R$ 3 180,00 ou menos.

Exercícios e problemas resolvidos

R3. Um instituto de pesquisas aferiu a massa de 21 barras de cereal, de diferentes marcas, cuja embalagem indica que a massa é 90 g. Acompanhe o resultado.

78,5	86,3	87,3	88,5	88,9	90,1	90,8
81,2	87,1	88,1	88,5	89,3	90,2	91
81,3	87,1	88,5	88,6	89,9	90,5	91

a) Aproximadamente 20% das marcas apresentaram massa igual ou inferior a quantos gramas?

b) Aproximadamente 50% das marcas apresentaram massa igual ou superior a quantos gramas?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolução

a) Para resolver esse item, precisamos calcular o segundo decil do conjunto de valores. Note que:

$$2 \cdot \frac{21}{10} = 4{,}2 \simeq 4$$

Nesse caso, o segundo decil ocupa a 4ª posição. Como os dados estão organizados em rol, temos $D_2 = 86{,}3$.

Portanto, aproximadamente 20% das marcas apresentaram massa igual ou inferior a 86,3 g.

b) Para resolver esse item, precisamos calcular o quinto decil ou a mediana do conjunto de valores. Assim:

$$Md = D_5 = 88{,}5$$

Portanto, aproximadamente 50% das marcas apresentaram massa igual ou superior a 88,5 g.

Percentis

Os percentis $(P_1, \ldots, P_{98}$ e $P_{99})$ dividem o conjunto de valores, organizado em ordem crescente, em cem partes iguais. Nesse caso, por exemplo:

- aproximadamente 5% dos valores do conjunto são menores ou iguais ao quinto percentil (P_5) e aproximadamente 95% são maiores ou iguais ao quinto percentil;
- aproximadamente 50% dos valores do conjunto são menores ou iguais ao quinquagésimo percentil (P_{50}) e aproximadamente 50% são maiores ou iguais ao quinquagésimo percentil;
- aproximadamente 75% dos valores do conjunto são menores ou iguais ao septuagésimo quinto percentil (P_{75}) e aproximadamente 25% são maiores ou iguais ao septuagésimo quinto percentil.

Para determinar os percentis, geralmente é necessário algum procedimento de arredondamento.

Observação

- Indicamos o n-ésimo percentil por P_n, com $1 \leq n \leq 99$.
- Note que $P_{25} = Q_1$, $P_{50} = Q_2$ e $P_{75} = Q_3$.

Observação

É importante perceber o significado de percentil. Por exemplo, se a altura de uma pessoa está no 88º percentil, ela tem altura igual ou maior do que, aproximadamente, 88% das outras pessoas entrevistadas. Isso não significa que a pessoa tem 88% de alguma altura ideal.

Exercícios e problemas resolvidos

R4. Na tabela, está apresentada a nota final em Matemática dos estudantes do Ensino Médio de certa escola. Nela, estão indicadas a frequência e a **frequência acumulada**, que é a soma das frequências até determinado dado.

Qual nota representa o 78º percentil? Como devemos interpretar essa medida?

Professor, professora: Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Observação

Ainda neste capítulo, estudaremos com mais detalhes as tabelas de frequência.

Nota final em Matemática dos estudantes do Ensino Médio de certa escola, em 2025

Nota	Frequência	Frequência acumulada
5,8	2	2
6,2	18	20
6,5	9	29
7,2	46	75
7,8	25	100
8,0	12	112
8,7	20	132
9,3	10	142
9,5	24	166
9,8	10	176
10	28	204

Fonte de pesquisa: Registros do professor de Matemática.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolução

Inicialmente, determinaremos a posição do 78º percentil. Para isso, fazemos $78 \cdot \frac{204}{100} = 159{,}12 \simeq 159$.

De acordo com as informações apresentadas na tabela, temos $P_{78} = 9{,}5$.

Portanto, podemos concluir, por exemplo, que aproximadamente 78% dos estudantes do Ensino Médio dessa escola obtiveram uma nota igual ou menor do que 9,5.

Professor, professora: A tarefa **48** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo, assim, para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

44. Considere o conjunto de valores apresentado a seguir.

2	5	3	1	0	5	6	3	10	3	4	7
1	5	9	10	9	8	8	9	0	6	5	1

Dica

Para determinar as medidas separatrizes, organize o conjunto de dados em ordem crescente.

Determine:

a) Q_2. Resposta: 5

b) D_8. Resposta: 8

c) Q_1. Resposta: 2,5

d) D_5. Resposta: 5

e) D_2. Resposta: 1

f) Q_3. Resposta: 8

45. Em uma prova de *kart*, são realizados diversos registros de tempo.

A seguir, são apresentados os tempos, em segundos, da volta mais rápida de cada um dos pilotos em determinada prova.

99,21	99,79	100,18	100,42	101,13	101,23	101,30	102,25	102,36	102,47
102,69	103,09	103,19	103,15	103,31	103,33	103,44	103,67	103,85	104,50

a) Qual é o terceiro decil desse conjunto de valores? Resposta: 101,23

b) Como devemos interpretar a medida obtida no item **a**?
Sugestão de resposta: 30% dos pilotos fizeram sua volta mais rápida em 101,23 s ou menos.

46. A seguir, estão apresentadas as notas obtidas pelos estudantes de certa turma em um simulado envolvendo todas as áreas do conhecimento. 46. a) Resposta: Falsa. Aproximadamente 40% dos estudantes obtiveram uma nota igual ou menor do que 6,5.

9,5	7,3	5,2	8,8	6,3	6,2	5,0	3,2	1,7	4,3	6,7	3,2	6,0	6,5	7,1
7,3	5,9	6,6	8,2	9,8	10,0	8,3	7,8	7,8	8,2	1,5	7,5	8,0	6,5	8,0

Classifique cada afirmativa em verdadeira ou falsa, reescrevendo as afirmativas falsas para torná-las verdadeiras.

a) Aproximadamente 40% dos estudantes obtiveram uma nota igual ou menor do que 5.

b) Dos estudantes que realizaram esse simulado, 30% obtiveram notas entre 1,49 e 6,1. Resposta: Verdadeira.

c) Um estudante que obteve nota 8 está no 9º decil. Resposta: Falsa. Sugestão de correção: Um estudante que obteve nota 8 está no 8º decil.

d) Escolhendo aleatoriamente, têm-se 50% de probabilidade de a nota do estudante ser menor ou igual a 6,7. Resposta: Verdadeira.

47. O presidente de uma seção eleitoral registrou em uma tabela a idade dos eleitores de sua seção em 2024.

Idade dos eleitores de certa seção eleitoral, em 2024

Idade (em anos)	18	20	21	22	25	31	33	35	39	42	45	48
Quantidade de eleitores	25	43	28	37	26	40	37	18	37	5	19	37

Professor, professora: Os dados apresentados na tabela são fictícios. Fonte de pesquisa: Presidente da seção eleitoral.

a) Aproximadamente 78% das pessoas que votaram nessa seção têm menos de quantos anos? Resposta: 39 anos.

b) Calcule Q_1, Q_2 e Q_3. Como devemos interpretar cada uma dessas medidas?
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

48. Realize uma pesquisa sobre algum assunto de sua preferência. Em seguida, elabore um problema que envolva a determinação de separatrizes associadas ao conjunto de valores obtidos. Na sequência, peça a um colega que o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.
Resposta pessoal. A resposta depende do resultado das pesquisas realizadas pelos estudantes.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Medidas de dispersão

Vimos anteriormente que as medidas de tendência central buscam representar ou caracterizar um conjunto de dados por meio de um único valor. Contudo, em diversas situações, são necessárias, para melhor representar o conjunto de dados, algumas medidas que indiquem a distribuição desses valores em torno da média. Elas são denominadas **medidas de dispersão**.

Para representar o salário dos 5 funcionários de certo setor de uma empresa, por exemplo, podemos utilizar seu valor médio. Acompanhe dois exemplos.

Exemplo 1

Salários: R$ 2 660,00, R$ 2 700,00, R$ 3 040,00, R$ 3 200,00 e R$ 3 400,00.

Média: $\bar{x} = \frac{2\,660 + 2\,700 + 3\,040 + 3\,200 + 3\,400}{5} = 3\,000$

A média salarial dos funcionários nesse setor é R$ 3 000,00.

Exemplo 2

Salários: R$ 1 680,00, R$ 1 680,00, R$ 1 900,00, R$ 3 800,00 e R$ 5 940,00.

Média: $\bar{x} = \frac{1680 + 1680 + 1900 + 3\,800 + 5\,940}{5} = 3\,000$

A média salarial dos funcionários nesse setor é R$ 3 000,00.

Em ambos os exemplos apresentados, a média é igual a R$ 3 000,00. Contudo, no exemplo **1** os valores estão mais próximos da média e, no exemplo **2**, mais distantes dela. Dizemos que no exemplo **1** os valores estão menos dispersos em relação à média do que no exemplo **2**.

A seguir, estudaremos as medidas de dispersão amplitude (A), desvio médio (Dm), variância (V) e desvio padrão (Dp).

Amplitude

A amplitude é a medida de dispersão mais simples.

A **amplitude** A de um conjunto de valores é a diferença entre o maior (x_M) e o menor valor (x_m), ou seja:

$$A = x_M - x_m$$

Exemplo

A seguir são apresentadas as quantidades de livros lidos no último ano pelos estudantes dos grupos de leitura de certa escola.

Quantidade de livros lidos pelo grupo **A**

15	12	18	22	17	15	18	23	13

Quantidade de livros lidos pelo grupo **B**

10	28	15	9	22	8	20	23	18

Vamos calcular a amplitude A_A do grupo **A** e a amplitude A_B do grupo **B**.

$A_A = x_M - x_m = 23 - 12 = 11$ $\qquad$ $A_B = x_M - x_m = 28 - 8 = 20$

Portanto, a amplitude das quantidades de livros lidos no último ano pelos estudantes do grupo **A** é 11 livros e do grupo **B**, 20 livros.

Observação

Ambos os conjuntos de valores apresentados no exemplo têm média igual a 17, porém os elementos do conjunto correspondente ao grupo **B** apresentam uma maior variação.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Desvio médio

Acompanhe a seguir a quantidade de veículos vendidos por uma concessionária em certa semana de setembro de 2025. Professor, professora: Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Quantidade de veículos vendidos por uma concessionária, em certa semana de setembro de 2025

Dia	Domingo	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira	Sábado
Quantidade	26	12	18	16	33	17	25

Fonte de pesquisa: Departamento de vendas da concessionária.

Vamos calcular inicialmente a média diária de veículos vendidos.

$$\bar{x} = \frac{26 + 12 + 18 + 16 + 33 + 17 + 25}{7} = \frac{147}{7} = 21$$

Em seguida, calculamos os **desvios** de cada valor, ou seja, a diferença entre cada valor e a média do conjunto de valores.

- $x_1 - \bar{x} = 26 - 21 = 5$
- $x_2 - \bar{x} = 12 - 21 = -9$
- $x_3 - \bar{x} = 18 - 21 = -3$
- $x_4 - \bar{x} = 16 - 21 = -5$
- $x_5 - \bar{x} = 33 - 21 = 12$
- $x_6 - \bar{x} = 17 - 21 = -4$
- $x_7 - \bar{x} = 25 - 21 = 4$

Podemos verificar que a soma dos desvios é igual a zero $(5 - 9 - 3 - 5 + 12 - 4 + 4 = 0)$. A fim de não ser afetado por essa propriedade, o desvio médio (Dm) é dado pela média dos valores absolutos dos desvios. Nesse caso, temos:

$$Dm = \frac{|5| + |-9| + |-3| + |-5| + |12| + |-4| + |4|}{7} = \frac{42}{7} = 6$$

Portanto, o desvio médio diário foi de 6 veículos vendidos.

O **desvio médio** (Dm) de um conjunto de n valores é dado pela média aritmética dos valores absolutos dos desvios de cada valor em relação à média.

$$Dm = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Observação

O valor absoluto ou módulo de um número real a, indicado por $|a|$, é definido como o próprio número a, se $a \geq 0$, ou como $-a$, se $a < 0$.

Exemplos:

- $|2| = 2$
- $|-5| = -(-5) = 5$

Variância

Outra medida de dispersão muito utilizada é a variância (V).

A **variância** (V) de um conjunto de n valores é dada pela média aritmética dos quadrados dos desvios de cada valor em relação à média.

$$V = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Exemplo

Após as 5 primeiras partidas de um campeonato de basquete, os dois principais cestinhas, jogadores que mais pontuaram, obtiveram médias iguais de pontos por partida. Acompanhe a seguir a pontuação obtida por esses jogadores em cada partida.

Pontuação dos dois primeiros cestinhas do campeonato de basquete, em 2026

Jogador	Pontuação				
	1ª partida	2ª partida	3ª partida	4ª partida	5ª partida
A	8	12	9	17	5
B	10	9	11	10	11

Fonte de pesquisa: Organização do campeonato.

Professor, professora: As informações apresentadas na tabela são fictícias.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Vamos determinar a média de pontos por partida desses jogadores.

- Jogador **A**: $\bar{x}_A = \frac{8 + 12 + 9 + 17 + 5}{5} = \frac{51}{5} = 10{,}2$
- Jogador **B**: $\bar{x}_B = \frac{10 + 9 + 11 + 10 + 11}{5} = \frac{51}{5} = 10{,}2$

Calculando a variância, podemos verificar qual dos jogadores obteve maior regularidade na pontuação por partida.

Variância do jogador A (V_A)

Desvios:

- $x_1 - \bar{x} = 8 - 10{,}2 = -2{,}2$
- $x_2 - \bar{x} = 12 - 10{,}2 = 1{,}8$
- $x_3 - \bar{x} = 9 - 10{,}2 = -1{,}2$
- $x_4 - \bar{x} = 17 - 10{,}2 = 6{,}8$
- $x_5 - \bar{x} = 5 - 10{,}2 = -5{,}2$

$$V_A = \frac{(-2{,}2)^2 + 1{,}8^2 + (-1{,}2)^2 + 6{,}8^2 + (-5{,}2)^2}{5}$$

$$V_A = \frac{4{,}84 + 3{,}24 + 1{,}44 + 46{,}24 + 27{,}04}{5} = \frac{82{,}8}{5} = 16{,}56$$

Variância do jogador B (V_B)

Desvios:

- $x_1 - \bar{x} = 10 - 10{,}2 = -0{,}2$
- $x_2 - \bar{x} = 9 - 10{,}2 = -1{,}2$
- $x_3 - \bar{x} = 11 - 10{,}2 = 0{,}8$
- $x_4 - \bar{x} = 10 - 10{,}2 = -0{,}2$
- $x_5 - \bar{x} = 11 - 10{,}2 = 0{,}8$

$$V_B = \frac{(-0{,}2)^2 + (-1{,}2)^2 + 0{,}8^2 + (-0{,}2)^2 + 0{,}8^2}{5}$$

$$V_B = \frac{0{,}04 + 1{,}44 + 0{,}64 + 0{,}04 + 0{,}64}{5} = \frac{2{,}8}{5} = 0{,}56$$

Nesse caso, verificamos que a variância de pontos por partida do jogador **A** (16,56) é maior do que a do jogador **B** (0,56). Portanto, o jogador **B** foi mais regular que o jogador **A**.

Desvio padrão

Vimos que, no cálculo da variância, os desvios de cada valor em relação à média são elevados ao quadrado e que o resultado é obtido em uma unidade diferente da variável. A medida de dispersão **desvio padrão** consiste na raiz quadrada da variância, o que resulta em um valor na mesma unidade da variável.

Em relação ao exemplo apresentado no estudo da variância, vamos calcular o desvio padrão da quantidade de pontos por partida obtido pelos jogadores **A** e **B**.

- Desvio padrão do jogador **A**: $Dp_A = \sqrt{V_A} = \sqrt{16{,}56} \simeq 4{,}07$
- Desvio padrão do jogador **B**: $Dp_B = \sqrt{V_B} = \sqrt{0{,}56} \simeq 0{,}75$

Portanto, o jogador **A** teve um desvio padrão de aproximadamente 4,07 pontos por partida, e o jogador **B**, de cerca de 0,75 ponto por partida.

O **desvio padrão** (Dp) de um conjunto de n valores é dado pela raiz quadrada da variância: $Dp = \sqrt{V}$.

Quanto mais próximo de zero estiver o desvio padrão, mais regular será o conjunto de valores, ou seja, mais próximo da média estarão esses valores.

Questão B.

Qual é o desvio padrão de um conjunto de n valores iguais?

Resposta: Zero.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R5. Acompanhe na tabela a seguir as idades dos estudantes de uma das turmas do período noturno do Ensino Médio de certa escola. Professor, professora: Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Idades dos estudantes de uma turma do período noturno do Ensino Médio de certa escola, em 3 de outubro de 2025

Idade (em anos)	Frequência (*f*)
16	16
17	9
18	4
19	2
20	1
22	1

Fonte de pesquisa: Turma do período noturno do Ensino Médio.

Com relação às idades dos estudantes, determine o:

a) desvio médio. **b)** desvio padrão.

Resolução

Inicialmente calculamos a média aritmética das idades.

$$\bar{x} = \frac{16 \cdot 16 + 17 \cdot 9 + 18 \cdot 4 + 19 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 22 \cdot 1}{16 + 9 + 4 + 2 + 1 + 1} = \frac{561}{33} = 17$$

Em seguida, calculamos o desvio de cada valor em relação à média.

- $x_1 - \bar{x} = 16 - 17 = -1$
- $x_2 - \bar{x} = 17 - 17 = 0$
- $x_3 - \bar{x} = 18 - 17 = 1$
- $x_4 - \bar{x} = 19 - 17 = 2$
- $x_5 - \bar{x} = 20 - 17 = 3$
- $x_6 - \bar{x} = 22 - 17 = 5$

a) $Dm = \dfrac{16 \cdot |-1| + 9 \cdot |0| + 4 \cdot |1| + 2 \cdot |2| + 1 \cdot |3| + 1 \cdot |5|}{33} = \dfrac{32}{33} = 0,\overline{96}$

Portanto, o desvio médio das idades dos estudantes é de $0,\overline{96}$ ano.

b) Como o desvio padrão é dado pela raiz quadrada da variância, segue que:

$$V = \frac{16 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot 0^2 + 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 5^2}{33} = \frac{62}{33} = 1,\overline{87}$$

$$Dp = \sqrt{1,\overline{87}} \simeq 1,37$$

Portanto, o desvio padrão é de, aproximadamente, 1,37 ano.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

49. Para cada conjunto de valores, calcule a média aritmética, a moda, a mediana, a amplitude, o desvio médio, a variância e o desvio padrão.

a) 62 58 72 66 53 70 51 64

Resposta: $\bar{x} = 62$; amodal; $Md = 63$; $A = 21$; $Dm = 6$; $V = 50,25$; $Dp \simeq 7,09$.

b) 14 18 25 14 39 27 31

Resposta: $\bar{x} = 24$; $Mo = 14$; $Md = 25$; $A = 25$; $Dm \simeq 7,43$; $V \simeq 74,29$; $Dp \simeq 8,62$.

c) 12 4,5 1,2 12 2,7 4,5

Resposta: $\bar{x} = 6,15$; $Mo = 4,5$ e $Mo = 12$; $Md = 4,5$; $A = 10,8$; $Dm = 3,9$; $V \simeq 18,38$; $Dp \simeq 4,29$.

d) 13 −18 3 8 −1 11 1 3

Resposta: $\bar{x} = 2,5$; $Mo = 3$; $Md = 3$, $A = 31$; $Dm = 6,375$; $V = 81$; $Dp = 9$.

Dica

Nas tarefas desta seção, sempre que julgar conveniente, utilize uma calculadora.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

50. Uma Organização Não Governamental (ONG) realiza semanalmente uma pesquisa de preços de combustíveis em 6 postos. A seguir, estão apresentados os preços da gasolina nesses postos em duas semanas consecutivas.

Professor, professora: Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Preço, em reais, do litro da gasolina por posto de combustível em janeiro de 2025

Posto	Semana	
	1ª	2ª
A	6,67	6,70
B	6,68	6,73
C	6,71	6,74
D	6,69	6,71
E	6,70	6,73
F	6,69	6,71

Fonte de pesquisa: Postos de combustíveis.

50. c) Resposta: 1ª semana: $Dm = 0{,}01$; $V \simeq 0{,}00016$; $Dp \simeq 0{,}013$.
2ª semana: $Dm \simeq 0{,}013$; $V = 0{,}0002$; $Dp \simeq 0{,}014$.

51. d) Resposta pessoal. A resposta depende de cada problema elaborado pelos estudantes.

Professor, professora: O item **d** da tarefa **51** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

a) De quantos por cento, aproximadamente, foi a diferença entre o menor e o maior preço pesquisado em cada semana? Resposta: 1ª semana: 0,60%; 2ª semana: 0,60%.

b) Qual é o preço médio da gasolina na 1ª semana? E na 2ª semana? Resposta: R$ 6,69; R$ 6,72.

c) Para cada semana, calcule o desvio médio, a variância e o desvio padrão em relação ao preço do litro da gasolina.

51. A seguir estão apresentadas as idades, em anos, dos membros de uma **guilda** de certo jogo *on-line*.

15	16	16	15	25	19	28	15	16	16
14	14	14	28	25	20	29	18	18	18
16	16	14	15	18	28	30	19	20	21

Guilda: grupo *on-line* formado pelos *gamers*.

51. c) Resposta: A alteração do valor máximo do conjunto de valores altera em muito a amplitude.

a) Determine a amplitude do conjunto dos valores apresentados. Resposta: 16 anos.

b) Se um jogador com 30 anos sair dessa guilda e um novo jogador, com 42 anos, se tornar membro dela, qual será a amplitude do novo conjunto de valores? Resposta: 28 anos.

c) Ao compararmos os resultados obtidos nos itens **a** e **b**, o que podemos concluir?

d) Elabore um problema envolvendo amplitude com as informações apresentadas nessa tarefa. Em seguida, peça a um colega que o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

52. Em certo concurso, foram aprovados os candidatos que obtiveram, no conjunto de 3 provas, nota média superior a 60 pontos e desvio padrão inferior a 5 pontos. Uma candidata que obteve 54, 68 e 61 pontos nas provas foi aprovada nesse concurso? Justifique sua resposta.

Resposta: Não, pois, apesar de a média obtida por ela ser superior a 60 pontos, o desvio padrão foi superior a 5 pontos.

53. Em uma corrida de automóveis, 3 pilotos estão disputando o primeiro lugar. A seguir está apresentado o tempo em segundos para as cinco primeiras voltas da corrida.

Professor, professora: Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Tempo em segundos para as cinco primeiras voltas da corrida, em 16/11/2025

Piloto	Tempo				
	1ª volta	2ª volta	3ª volta	4ª volta	5ª volta
A	870	848	855	845	852
B	866	850	847	845	847
C	867	851	843	849	855

Fonte de pesquisa: Organizadora da corrida.

Considerando as cinco primeiras voltas, determine qual piloto obteve:

a) o pior tempo médio. Resposta: Piloto **A**.

b) a maior regularidade no tempo para cada volta. Resposta: Piloto **B**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

54. Realize uma pesquisa a respeito de um assunto de seu interesse. Em seguida, de acordo com os dados obtidos, elabore um problema envolvendo medidas de dispersão e peça a um colega que o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

55. Analise a pontuação obtida por duas equipes de basquete feminino nas 8 primeiras partidas da liga.

Equipe **A**

115	98	100	88	112	98	105	93

Equipe **B**

123	90	104	92	90	118	109	100

54. Resposta pessoal. A resposta depende do assunto escolhido e da pesquisa realizada pelos estudantes.

Professor, professora: A tarefa **54** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

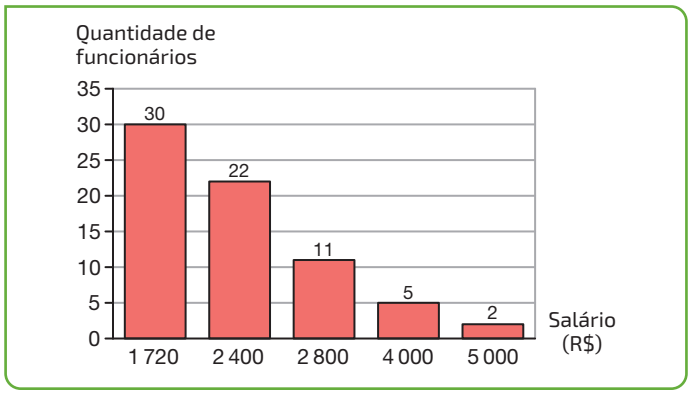
a) Com o auxílio de uma calculadora, determine a amplitude, a variância e o desvio padrão de cada um dos conjuntos de valores. Resposta: Equipe **A**: $A = 27$; $V \simeq 73{,}1$; $Dp \simeq 8{,}6$; Equipe **B**: $A = 33$; $V \simeq 141{,}2$; $Dp \simeq 11{,}9$.

b) O que podemos concluir ao analisar os resultados obtidos no item **a**?
Resposta: As pontuações obtidas nas 8 primeiras partidas pela equipe **A** são menos variáveis do que as obtidas pela equipe **B**.

56. Os salários dos funcionários de uma fábrica estão representados no gráfico.

Salário dos funcionários de uma fábrica em janeiro de 2025

Professor, professora: Os dados apresentados no gráfico são fictícios.



Fonte de pesquisa: Departamento administrativo.

a) Qual é o salário médio dos funcionários dessa fábrica? Resposta: R$ 2 360,00

b) Calcule o desvio padrão dos salários dos funcionários. Resposta: Aproximadamente R$ 773,12

c) Qual é a interpretação do resultado obtido no item **b**? Resposta: Espera-se que os estudantes respondam que, como o desvio padrão não está próximo de 0, os valores estão afastados da média, ou seja, não há uma regularidade na distribuição salarial dessa empresa.

57. Estudamos pesquisas amostrais e também tipos de amostras. Agora, vamos realizar uma pesquisa amostral e divulgar os resultados obtidos. Para isso, junte-se a um colega, escolham um tema relevante para a sociedade e sigam as etapas: **planejamento**, **coleta de dados**, **organização**, **análise** e **interpretação**. Em seguida, escrevam um relatório com o objetivo de divulgar os resultados obtidos por meio de tabelas e gráficos, destacando as medidas de tendência central e de dispersão.
Resposta pessoal. Orientações sobre essa tarefa no **Suplemento para o professor**.

Observação

Nessa pesquisa, os dados podem ser coletados diretamente (por meio de entrevistas) ou em diferentes fontes. Além disso, se julgarem conveniente, os gráficos podem ser construídos com o auxílio de uma planilha eletrônica.

58. (IBFC, 2023) Em relação às medidas de dispersão, assinale a alternativa correta.

a) As medidas de dispersão são utilizadas como um resumo dos dados coletados.

b) A amplitude de uma variável considera todos os valores observados da variável.

c) O desvio padrão de uma variável é calculado extraindo-se a raiz quadrada da variância da variável.

d) O desvio médio absoluto considera o sinal positivo ou negativo dos desvios entre os valores observados e a média de uma variável.

Resposta: Alternativa **c.**

59. Em uma turma com 25 estudantes, a média das notas obtidas em uma avaliação foi 4, e o desvio padrão, 3. Diante disso, o professor decidiu adicionar um ponto à nota de cada estudante.

Considerando o ponto adicional, determine:

a) a média aritmética. Resposta: 5 **b)** a variância. Resposta: 9 **c)** o desvio padrão. Resposta: 3

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Distribuição de frequência

Analise o nível de conhecimento em informática de 20 estudantes que se candidataram a estagiários em uma empresa do setor de tecnologia.

Professor, professora: Os dados apresentados nas tabelas são fictícios.

Candidatos a estagiários em uma empresa, em 2026

Nome	Nível de conhecimento
Agnaldo	Avançado
Altair	Básico
Amanda	Intermediário
Ana Maria	Avançado
Carlos	Intermediário
Fabiane	Avançado
Fábio	Avançado
Gabriel	Intermediário
João	Intermediário
Marcos	Avançado

Fonte de pesquisa: Departamento de tecnologia.

Candidatos a estagiários em uma empresa, em 2026

Nome	Nível de conhecimento
Marta	Intermediário
Natália	Intermediário
Osvaldo	Básico
Rafael	Avançado
Ricardo	Intermediário
Tainá	Avançado
Tiago	Avançado
Vagner	Intermediário
Válter	Intermediário
Vanessa	Intermediário

Fonte de pesquisa: Departamento de tecnologia.

Questão C.

Nesse caso, como pode ser classificada a variável "nível de conhecimento"?

Resposta: Qualitativa ordinal.

Podemos, por exemplo, resumir os valores atribuídos à variável "nível de conhecimento" utilizando a **frequência absoluta** (f), ou simplesmente frequência, que corresponde à quantidade de vezes em que cada valor foi citado. Nesse caso, temos as seguintes frequências absolutas:

- frequência do nível de conhecimento "básico": 2;
- frequência do nível de conhecimento "intermediário": 10;
- frequência do nível de conhecimento "avançado": 8.

Para comparar a participação de cada um desses valores em relação ao todo, podemos utilizar a **frequência relativa** (fr), que equivale à razão entre a frequência absoluta correspondente e a quantidade total de observações. Em geral, a frequência relativa é apresentada em porcentagem. Em relação à variável "nível de conhecimento", temos:

- frequência relativa do conhecimento básico: $\frac{2}{20} = 0{,}1$ ou 10%;
- frequência relativa do conhecimento intermediário: $\frac{10}{20} = 0{,}5$ ou 50%;
- frequência relativa do conhecimento avançado: $\frac{8}{20} = 0{,}4$ ou 40%.

Podemos organizar as frequências absoluta e relativa em uma **tabela de frequências**.

Candidatos a estagiários em uma empresa, em 2026

Nível de conhecimento	Frequência (f)	Frequência relativa (fr)
Básico	2	10%
Intermediário	10	50%
Avançado	8	40%
Total	20	100%

Fonte de pesquisa: Departamento de tecnologia.

Outros tipos de frequência muito utilizados são a **frequência acumulada** (fa) e a **frequência acumulada relativa** (far), que correspondem, respectivamente, às somas das frequências absolutas e às somas das frequências relativas até determinado dado.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Complementando a tabela de frequências vista anteriormente, temos:

Candidatos a estagiários em uma empresa, em 2026

Nível de conhecimento	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
Básico	2	2	10%	10%
Intermediário	10	$\underbrace{12}_{2+10}$	50%	$\underbrace{60\%}_{10\%+50\%}$
Avançado	8	$\underbrace{20}_{2+10+8}$	40%	$\underbrace{100\%}_{10\%+50\%+40\%}$
Total	20		100%	

Professor, professora: Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Fonte de pesquisa: Departamento de tecnologia.

Nessa tabela de frequências, analisando a frequência acumulada, podemos notar, por exemplo, que 12 estudantes têm nível de conhecimento em informática até o intermediário (básico e intermediário), o que corresponde a 60% dos candidatos, informação que pode ser observada na frequência acumulada relativa.

Exercícios e problemas

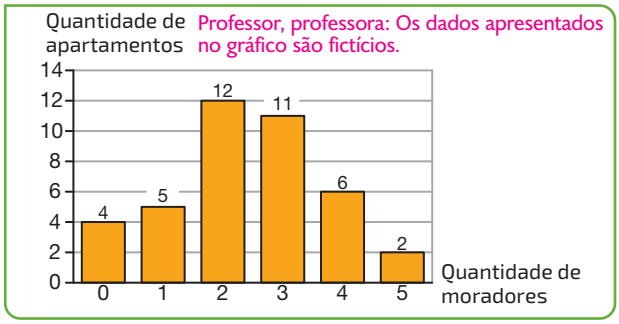
Anote as respostas no caderno.

60. Verifique a seguir o número de nascimentos diários em uma maternidade, em setembro de 2025. Com base nele, construa uma tabela de frequências contendo f, fa, fr e far. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

5	2	3	1	4	4	3	2	2	2
2	4	3	2	1	3	4	5	3	4
2	3	1	4	5	4	2	4	2	2

61. Analise o gráfico a seguir.

Quantidade de moradores por apartamento em um condomínio residencial, em janeiro de 2025



Fonte de pesquisa: Administração do condomínio.

61. a) Resposta: 40 apartamentos; 6 apartamentos.

a) Quantos apartamentos tem esse condomínio? Desses, quantos têm exatamente 4 moradores?

b) Com base nas informações do gráfico, construa uma tabela de frequências para a variável "quantidade de moradores" contendo f, fa, fr e far.

c) Quantos apartamentos têm 2 moradores ou menos? Que porcentagem dos apartamentos essa quantidade representa?

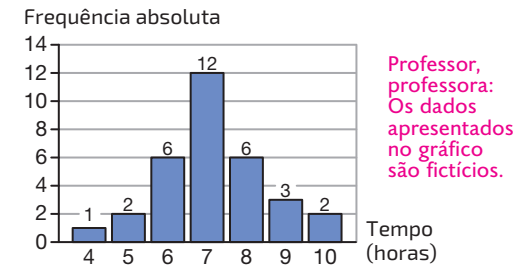
Resposta: 21 apartamentos; 52,5%.

62. O uso de aparelhos eletrônicos durante a noite prejudica o sono, pois a luz emitida por eles afeta diretamente a produção de melatonina, hormônio responsável pela indução do sono.

De acordo com especialistas, para manter a saúde em dia, é indicada para cada faixa etária uma quantidade de horas de sono diária. Aconselha-se que jovens de 14 a 17 anos, por exemplo, durmam em torno de 10 horas por dia.

Por meio de um questionário foram obtidas as informações indicadas no gráfico a seguir.

Quantidade média de horas de sono diário dos estudantes de 14 a 17 anos de um grupo de estudos, em fevereiro de 2025



Professor, professora: Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Fonte de pesquisa: Resultado do questionário.

a) Construa uma tabela de frequências, contendo f, fa, fr e far, para a variável "quantidade de horas de sono". Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Qual é a porcentagem de estudantes de 14 a 17 anos que dormem a quantidade de horas recomendadas para a idade? Resposta: 6,25%

61. b) Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Intervalo de classe

O excesso de triglicérides, um tipo de gordura, pode ser um forte indicador de possíveis doenças cardíacas. Embora não haja consenso sobre qual nível de triglicérides já exige maior cuidado médico, é certo que quando o valor é maior do que 150 mg por decilitro de sangue é recomendável a realização de tratamento.

ODS 3



DIOGO PPR/SHUTTERSTOCK

Prato com arroz, feijão, salada e filés de frango.

Observação

A ingestão em excesso de açúcares, gorduras e massas pode potencializar o aumento de triglicérides no organismo, deixando-o maior do que o nível recomendado. Sendo assim, evitar o consumo habitual de refrigerantes, frituras etc. e associar uma rotina alimentar saudável a atividades físicas com acompanhamento médico são medidas essenciais para controlar o nível dessa gordura.

PARA EXPANDIR

Que tal conhecer um pouco mais sobre sugestões de diferentes tipos de alimentos para compor uma rotina de alimentação mais saudável no seu dia a dia? Para isso, você pode consultar o Guia Alimentar publicado no *site* do Ministério da Saúde. Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-brasil/publicacoes-para-promocao-a-saude/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf/view. Acesso em: 23 set. 2024.

A seguir, estão apresentadas as medições de triglicérides, em miligramas por decilitro de sangue, de 60 pessoas que realizaram exame em um laboratório no mês de março de 2025.

70	122	140	155	174	206	238	258	279	299
76	125	146	160	178	214	241	267	285	306
82	130	146	162	183	217	243	268	287	308
89	132	149	162	194	220	245	271	291	311
98	135	150	162	199	226	247	273	294	314
105	138	155	166	201	234	257	277	297	318

Podemos representar essas medidas por meio de uma tabela de frequência. Contudo, verificamos que a maioria das medidas não se repete, tornando necessárias muitas linhas na tabela. A fim de resumir esses dados, podemos agrupá-los em **intervalos de classes**.

Há diversas maneiras de definir o total de intervalos de classes que vão compor uma tabela de frequência. Porém, o mais importante é constatar que, de maneira geral, uma grande quantidade de intervalos de classes tende a prejudicar o resumo das informações. Em contrapartida, uma quantidade muito pequena pode interferir na qualidade das informações.

Em relação às medições de triglicérides, podemos definir os intervalos de classes da seguinte maneira.

a) Calculamos a amplitude do conjunto de valores, ou seja, fazemos:

$$318 - 70 = 248$$

b) Escolhemos um valor conveniente, maior do que a amplitude, que, nesse caso, pode ser 250. Considerando o total de intervalos igual a 5, por exemplo, determinamos a amplitude de cada intervalo.

$$\frac{250}{5} = 50$$

c) Construímos os intervalos de classes com amplitude 50, com base no menor valor obtido (70 mg/dL).

$70 \vdash \underbrace{120}_{70+50}$ $\quad 120 \vdash \underbrace{170}_{120+50}$ $\quad 170 \vdash \underbrace{220}_{170+50}$ $\quad 220 \vdash \underbrace{270}_{220+50}$ $\quad 270 \vdash \underbrace{320}_{270+50}$

d) A notação "$\vdash$" indica, por exemplo, que no intervalo $70 \vdash 120$ serão consideradas as medidas maiores do que ou iguais a 70 e menores do que 120 (inclui 70 e exclui 120).

Dica

Outras notações utilizadas para designar intervalos de classes são:

- $10 \dashv 20$: números maiores do que 10 e iguais ou menores do que 20.
- $10 \dashv\vdash 20$: números maiores ou iguais a 10 e iguais ou menores do que 20.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Com base nas 60 medições obtidas, quantificamos as frequências de cada intervalo, obtendo, assim, a frequência absoluta (f) e, consequentemente, as frequências acumulada (fa), relativa (fr) e acumulada relativa (far).

Exames de triglicérides realizados em março de 2025

Nível (mg/dL)	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
70 ⊢ 120	6	6	10%	10%
120 ⊢ 170	18	24	30%	40%
170 ⊢ 220	9	33	15%	55%
220 ⊢ 270	12	45	20%	75%
270 ⊢ 320	15	60	25%	100%
Total	60		100%	

Fonte de pesquisa: Laboratório.

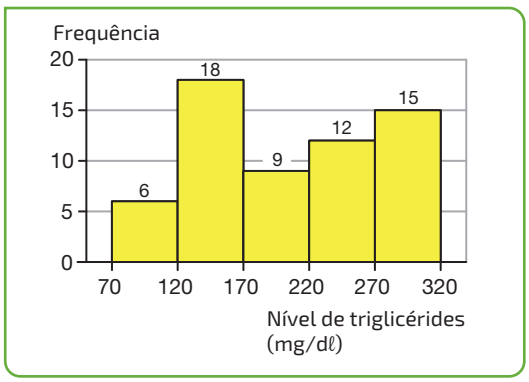
Professor, professora: Os dados apresentados na tabela e nos gráficos são fictícios.

As frequências absoluta e relativa podem ser representadas por um tipo de gráfico denominado **histograma**, que consiste em regiões retangulares justapostas, as quais representam cada intervalo de classe, cujas alturas são proporcionais às frequências.

Em relação aos exames de nível de triglicérides, temos os seguintes histogramas.

Histograma relacionado à frequência absoluta

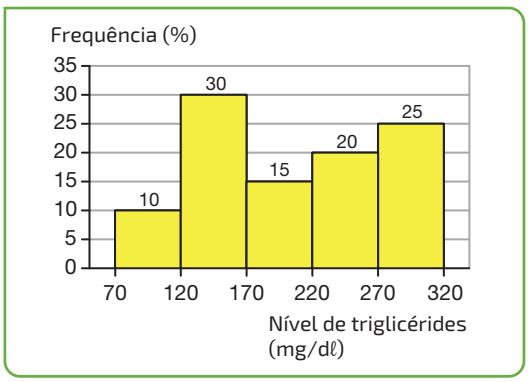
Exames de triglicérides realizados em março de 2025



Fonte de pesquisa: Laboratório.

Histograma relacionado à frequência relativa

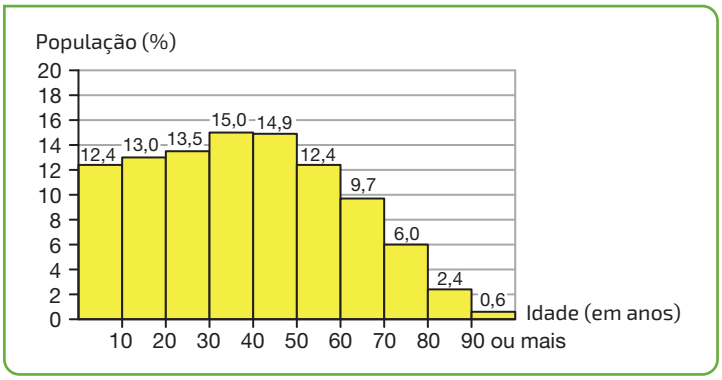
Exames de triglicérides realizados em março de 2025



Fonte de pesquisa: Laboratório.

Acompanhe outro exemplo de histograma.

Projeção da população do Brasil por faixa etária, em 2030



Fonte de pesquisa: IBGE. *Projeções da População*. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9109-projecao-da-populacao.html?5&t5resultados. Acesso em: 14 maio 2024.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Anote as respostas no caderno.

65. b) Resposta: 45%

63. Em relação aos 60 exames de triglicérides apresentados anteriormente, responda às questões.

a) Quantos pacientes apresentaram níveis de triglicérides iguais ou superiores a 70 mg/dL e inferiores a 170 mg/dL? Resposta: 24 pacientes.

b) Quantos por cento dos pacientes apresentaram níveis de triglicérides iguais ou superiores a 220 mg/dL?

c) Para quantos pacientes pode-se recomendar a realização de tratamento médico? Resposta: 43 pacientes.

64. Analise as informações da tabela e responda às questões.
Professor, professora: Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Altura dos atletas da equipe de basquetebol juvenil, em março de 2025

Altura (m)	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
1,7 ⊢ 1,8	4	4	20%	20%
1,8 ⊢ 1,9	7	11	35%	55%
1,9 ⊢ 2,0	6	17	30%	85%
2,0 ⊢ 2,1	2	19	10%	95%
2,1 ⊢ 2,2	1	20	5%	100%

Fonte de pesquisa: Ficha técnica do Departamento.

a) Quantos atletas treinam nessa equipe de basquetebol? Resposta: 20 atletas.

b) Em qual intervalo está concentrada a maior quantidade de atletas dessa equipe? Resposta: 1,8 ⊢ 1,9

c) Quantos atletas têm altura superior ou igual a 2 m? Resposta: 3 atletas.

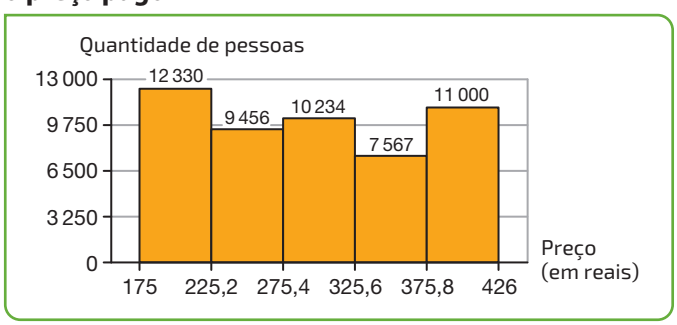
d) Que porcentagem dos atletas tem altura inferior a 1,9 m? Resposta: 55%

e) Podemos afirmar que existem 2 atletas com 1,85 m de altura? Por quê?
Resposta: Não, pois não conhecemos a altura de nenhum deles; sabemos apenas que existem 7 atletas com alturas entre 1,8 m e 1,9 m.

f) De acordo com os dados apresentados na tabela, construa um histograma referente à frequência da variável "altura". Resposta no final do **Livro do Estudante**.

65. Os preços dos ingressos antecipados de certo *show* musical eram modificados semanalmente. O histograma apresenta o número de pessoas que compraram ingressos antecipados de acordo com o preço pago.
Professor, professora: Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Quantidade de pessoas que compraram ingressos antecipados para o *show*, em 2026, de acordo com o preço pago



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: Registros da organização do *show*.

Dentre as pessoas que compraram os ingressos antecipados, quantas pagaram menos de R$ 325,60?
Resposta: 32 020 pessoas.

66. Junte-se a um colega, realizem uma pesquisa amostral e divulguem os resultados obtidos. Para isso, escolham um tema relevante para a sociedade e sigam as etapas: **planejamento**, **coleta de dados**, **organização**, **análise** e **interpretação**. Em seguida, escrevam um relatório com o objetivo de divulgar os resultados obtidos por meio de tabelas e gráfico (incluindo tabelas de frequência e histogramas), destacando as medidas de tendência central e de dispersão.
Resposta pessoal. Orientações sobre a tarefa no **Suplemento para o professor**.

Observação

Nessa pesquisa, os dados podem ser coletados diretamente (por meio de entrevistas) ou em diferentes fontes.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos de classes

Estudamos anteriormente como calcular medidas de tendência central para dados discretos. Agora veremos como calcular a média aritmética, a moda e a mediana para dados agrupados em intervalos de classes. Para isso, considere a tabela de frequência a seguir, que apresenta as massas dos 30 estudantes de uma turma do Ensino Médio.

Massa dos estudantes de uma turma do Ensino Médio, em março de 2025

Massa (kg)	40 ⊢ 50	50 ⊢ 60	60 ⊢ 70	70 ⊢ 80	80 ⊢ 90	Total
Frequência (f)	4	10	9	5	2	30

Fonte de pesquisa: Turma do Ensino Médio.

Professor, professora: Os dados apresentados nas tabelas são fictícios.

Observação

Na prática, geralmente, estão disponíveis os dados brutos para o cálculo da média aritmética, da moda e da mediana; entretanto, é possível que esteja disponível apenas a distribuição de frequências da variável de interesse dividida em intervalos de números reais. O problema é: como calcular as medidas de tendência central nesse caso? Exceto sob algumas condições, não é possível calcular exatamente tais medidas, mas sim obter valores aproximados.

Para calcularmos as medidas de tendência central para a variável "massa dos estudantes", inicialmente obtemos o **valor médio** (vm) de cada intervalo de classe.

Massa dos estudantes de uma turma do Ensino Médio, em março de 2025

Massa (kg)	40 ⊢ 50	50 ⊢ 60	60 ⊢ 70	70 ⊢ 80	80 ⊢ 90	Total
Frequência (f)	4	10	9	5	2	30
Valor médio (vm)	45	55	65	75	85	

Fonte de pesquisa: Turma do Ensino Médio.

Observação

O valor médio de um intervalo de classe corresponde à média dos extremos desse intervalo. No exemplo apresentado, o valor médio do intervalo $40 \vdash 50$ é 45, pois $\frac{40 + 50}{2} = 45$.

Para calcularmos a **média aritmética** $(\bar{x})$, adicionamos o produto de cada frequência ao valor médio correspondente e dividimos o resultado obtido pela quantidade total de valores.

Em relação à massa dos estudantes, a média é:

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot 45 + 10 \cdot 55 + 9 \cdot 65 + 5 \cdot 75 + 2 \cdot 85}{30} = \frac{1860}{30} = 62$$

Portanto, a massa média dos estudantes dessa turma é 62 kg.

A **moda** (Mo) é o valor médio do intervalo de classe de maior frequência.

Em relação à massa dos estudantes, como o intervalo de classe de maior frequência é $50 \vdash 60$ (10 valores), a moda equivale ao valor médio correspondente, que nesse caso é 55 kg, ou seja, $Mo = 55$.

Já a **mediana** (Md) é o valor médio do intervalo de classe que contém o termo central se a quantidade de termos for ímpar; se a quantidade de termos for par, a mediana é a média aritmética dos valores médios correspondentes aos intervalos de classes que contêm os dois termos centrais.

Em relação às massas dos estudantes, a quantidade de termos é par e igual a 30. Como o 15º e o 16º termos (termos centrais) pertencem ao intervalo $60 \vdash 70$, a mediana é:

$$Md = \frac{65 + 65}{2} = 65$$

Portanto, a mediana das massas desses estudantes é 65 kg.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

Professor, professora: Os dados apresentados na tabela são fictícios.

67. Ao acompanhar o desenvolvimento de uma plantação de trigo, um engenheiro agrônomo mediu o comprimento de algumas plantas (amostra). Os dados obtidos estão apresentados na tabela.

Comprimento das plantas da amostra, em abril de 2025

Comprimento (cm)	Quantidade de plantas
$3 \vdash 5$	6
$5 \vdash 7$	18
$7 \vdash 9$	47
$9 \vdash 11$	21
$11 \vdash 13$	8

Fonte de pesquisa: Anotações do engenheiro agrônomo.

a) Quantas plantas compõem a amostra analisada pelo engenheiro agrônomo? Resposta: 100 plantas.

b) Calcule a média, a moda e a mediana do comprimento das plantas da amostra. Resposta: $\bar{x} = 8{,}14$ cm; $Mo = 8$ cm; $Md = 8$ cm.

c) O que se pode afirmar em relação à porcentagem das plantas da amostra que têm o comprimento maior ou igual à média? Resposta: Não se pode afirmar uma quantidade exata, mas sabemos que é entre 29% e 76%.

68. A associação de moradores de um bairro observou que os acidentes de trânsito eram frequentes em certo trecho de uma avenida, onde a velocidade máxima permitida era de 80 km/h, e que isso era causado pelo excesso de velocidade dos veículos que transitam no local. Para mostrar a necessidade da instalação de redutores de velocidade e cobrar providências do poder público, foi feita a medição da velocidade dos veículos que passaram pelo local em certo período do dia, cujos resultados estão organizados na tabela a seguir.

Velocidade dos veículos que passaram pelo local, em certo período do dia 15 de abril de 2025

Velocidade (km/h)	Frequência (f)
$50 \vdash 60$	3
$60 \vdash 70$	5
$70 \vdash 80$	11
$80 \vdash 90$	19
$90 \vdash 100$	9
$100 \vdash 110$	3
Total	50

Fonte de pesquisa: Associação de moradores.

Professor, professora: Os dados apresentados na tabela são fictícios.

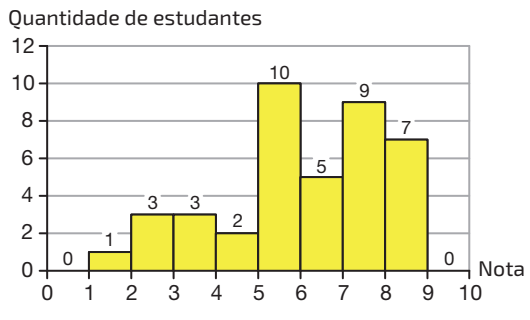
a) Calcule a média, em quilômetros por hora (km/h), das velocidades registradas. Resposta: 82 km/h

b) A média da velocidade dos veículos ficou maior ou menor do que o limite nesse trecho da avenida? Resposta: Maior.

69. O histograma a seguir apresenta o resultado da prova de Matemática aplicada para uma turma do Ensino Médio. Calcule a média das notas obtidas por essa turma. Resposta: Aproximadamente 6,08.

Professor, professora: Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Nota dos estudantes de uma turma do Ensino Médio, em abril de 2025



Fonte de pesquisa: Anotações da professora.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Outros gráficos e outras representações

OBJETO DIGITAL ***Vídeo:*** Outros gráficos

Vamos conhecer outras maneiras de representar dados graficamente.

Diagrama de ramo-e-folhas

O **diagrama de ramo-e-folhas** (ou **gráfico de ramo-e-folhas**), criado por John Tukey, possibilita a organização de dados quantitativos. Os valores apresentados a seguir representam as idades, em anos, dos estudantes que cursavam Matemática em certa instituição de ensino no mês de fevereiro de 2025.

18	18	19	20	20	20	20	20	20	20	21
21	22	23	24	25	25	26	29	35	37	

Organizando esses dados em um diagrama de ramo-e-folhas, temos:

Idade dos estudantes que cursavam Matemática em certa instituição de ensino, em fevereiro de 2025

1	8 8 9
2	0 0 0 0 0 0 0 1 1 2 3 4 5 5 6 9
3	5 7

Legenda:
1 | 8 é igual a 18 anos.

Fonte de pesquisa: Reitoria da instituição de ensino.

Professor, professora: Os dados apresentados nos diagramas são fictícios.

Nesse gráfico, colocamos as dezenas em "evidência", separando-as das unidades por um traço. O "lado" com as dezenas é chamado **ramo**, e o com as unidades, **folhas**. O diagrama de ramo-e-folhas deve ter sempre uma legenda, indicando o que significam os ramos e as folhas.

Vamos analisar outro exemplo.

Notas obtidas pelos estudantes na última prova de História, em agosto de 2025

0	9
1	0 0
2	5 7
3	5 6 8 9
4	1 3
5	
6	2 2 4 4 9
7	0 8 9
8	1 4 5 8 9
9	7 7 7 9
10	0 0 0 0 0 0

Legenda:
2 | 5 é igual a 25 pontos.
10 | 0 é igual a 100 pontos.

Fonte de pesquisa: Professor de História.

Analisando o gráfico, podemos concluir, por exemplo, que:

- 6 estudantes obtiveram 100 pontos;
- nenhum estudante obteve uma nota maior ou igual a 50 pontos ou menor do que 60 pontos;
- mais de 50% dos estudantes obtiveram uma nota igual ou superior a 70 pontos.

Observação

O diagrama de ramo-e-folhas é similar ao histograma, porém tem a vantagem de apresentar os dados originais do conjunto.

Questão D.

De acordo com o diagrama de ramo-e-folhas, determine quantos estudantes obtiveram uma nota igual ou superior a 43 pontos. Essa quantidade representa quantos por cento do total de estudantes que fizeram a prova?

Resposta: 24 estudantes; aproximadamente 70,6%.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O diagrama de ramo-e-folhas também pode ser utilizado para comparar dois conjuntos de dados. Nesse caso, representamos as folhas para o primeiro conjunto de dados de um lado e as folhas para o segundo conjunto de dados do outro lado. Acompanhe, por exemplo, o diagrama de ramo-e-folhas que apresenta os salários anuais, em milhares de reais, de todos os funcionários de duas empresas.

Salários anuais dos funcionários das empresas A e B, em março de 2025

Empresa A		Empresa B
	2	1 3 5 5 7 7 7
	3	0 0 1
9 9 9 8 4 1	4	5 7
	5	5 6 8 9
	6	1 2 2 2 2 2 3
9 7 5 5 5 5 5 5 3 3	7	
	8	
3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	9	
9 9 9 9 9	10	
	11	2 2 6
4 2	12	1 4
	13	3
1	14	
5 2	15	0

Fonte de pesquisa: RH das empresas.

Professor, professora: Os dados apresentados nos diagramas são fictícios.

Legenda:
4 2| 12 |1 4 significa R$ 121 000,00 e R$ 124 000,00, respectivamente, para a empresa **B**, e R$ 122 000,00 e R$ 124 000,00, respectivamente, para a empresa **A**.

Dica

Para comparar dois conjuntos de dados com quantidades de elementos muito diferentes, não é recomendado o uso do diagrama de ramo-e-folhas.

Analisando o gráfico, podemos notar, por exemplo, que o salário anual mais alto na empresa **A** é R$ 155 000,00 e, na empresa **B**, R$ 150 000,00.

Questão E. Resposta: Empresa **A**: 37 funcionários; empresa **B**: 31 funcionários.

Questão E.

Quantos funcionários há em cada uma dessas empresas?

Questão F.

Qual é a média dos salários anuais em cada empresa?

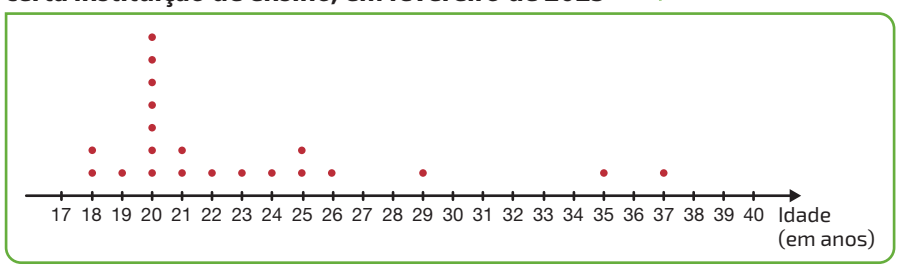
Resposta: Empresa **A**: aproximadamente R$ 88 216,22; empresa **B**: aproximadamente R$ 62 903,23.

Diagrama de pontos

Outra maneira de representar dados quantitativos é por meio do **diagrama de pontos**. Nesse tipo de gráfico, cada ponto representa um dado do conjunto. Caso um dado se repita, ele será representado com pontos "empilhados".

Verifique, por exemplo, as idades em anos dos estudantes que cursavam Matemática, apresentadas na página anterior, agora organizadas em um diagrama de pontos.

Idade dos estudantes que cursavam Matemática em certa instituição de ensino, em fevereiro de 2025



Fonte de pesquisa: Reitoria da instituição de ensino.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Analisando diagrama, podemos concluir, por exemplo, que a maioria dos estudantes que cursavam Matemática nessa instituição em 2025:

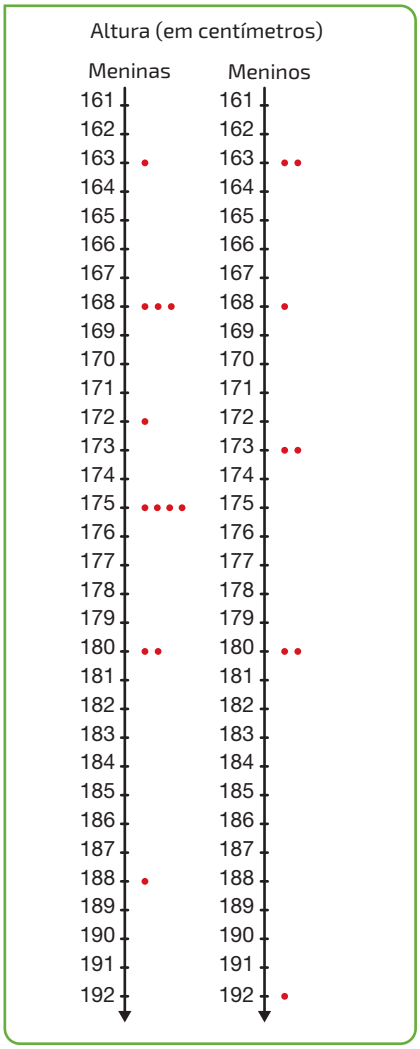
- tinha 20 anos de idade;
- tinha idade entre 18 e 26 anos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Também é possível organizar dois conjuntos de valores em um diagrama de pontos. Analise, por exemplo, o diagrama de pontos que apresenta a altura, em centímetros, dos estudantes do curso de Música.

Analisando esse gráfico, podemos concluir, por exemplo, que o estudante mais alto tem 192 cm de altura e é um menino.

Altura dos estudantes do curso de Música, em fevereiro de 2025



Professor, professora: Os dados apresentados no diagrama são fictícios.

Fonte de pesquisa: Registros do curso de Música.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Quando temos uma quantidade muito grande de dados, vimos que, a fim de facilitar a interpretação, é desejável agrupar os dados em intervalos de classe. Porém, quando a quantidade de dados não é muito grande, o uso do histograma não é recomendável, e, nesses casos, podemos utilizar os diagramas de ramo-e-folhas e de pontos.

Box-plot

Vamos estudar, agora, o ***box-plot*** (ou **gráfico de caixa**), que é uma importante aplicação dos quartis, medidas separatrizes estudadas anteriormente.

Para construir um *box-plot* é necessário conhecer o menor valor (x_m), o primeiro quartil (Q_1), o segundo quartil (Q_2), o terceiro quartil (Q_3) e o maior valor (x_M) do conjunto de dados. A seguir, estão apresentadas as etapas de construção desse tipo de gráfico.

Dica

O *box-plot* auxilia na análise da distribuição dos dados do conjunto.

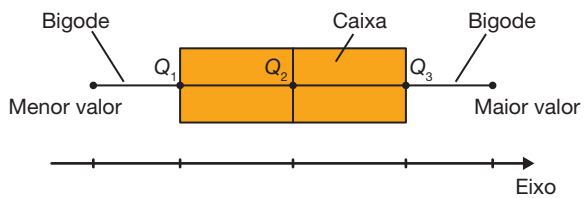
I. Determine o menor e o maior valor, o primeiro quartil, o segundo quartil e o terceiro quartil do conjunto de dados.

II. Construa um eixo de escalas (vertical ou horizontal) que contenha o maior e o menor valor.

III. Represente, no eixo, os cinco números calculados no passo **I**.

IV. Construa uma caixa (região retangular) partindo de Q_1 estendendo-se para Q_3 e, em Q_2, desenhe uma linha vertical.

V. Desenhe os bigodes partindo da caixa até o maior e o menor valor.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplo

A seguir, são apresentadas as notas obtidas pelos estudantes do curso de Inglês em um simulado de 2026.

27	37	45	57	58	68	76	79	81	82	83	84	85	90

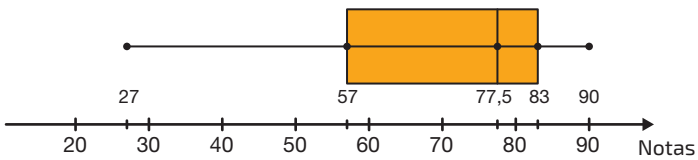
Para esse conjunto de dados, temos:

• $x_m = 27$ • $Q_1 = 57$ • $Q_2 = Md = 77{,}5$ • $Q_3 = 83$ • $x_M = 90$

Assim, construímos o seguinte *box-plot*.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Notas obtidas pelos estudantes no simulado, em 2026



Professor, professora: Os dados apresentados nos gráficos são fictícios.

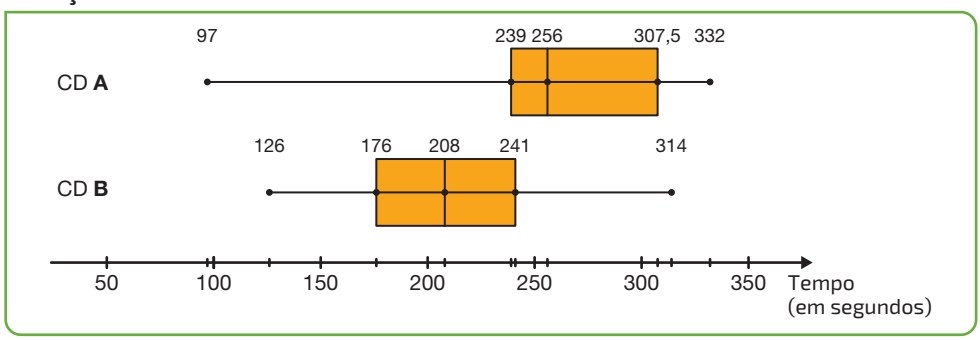
Fonte de pesquisa: Coordenação do curso de Inglês.

Analisando esse gráfico, podemos concluir, por exemplo, que aproximadamente 25% das notas foram iguais ou inferiores a 57; aproximadamente 25% das notas foram iguais ou superiores a 83; e aproximadamente metade das notas está entre 57 e 83.

Também é possível comparar dois ou mais conjuntos de dados usando o *box-plot*. Vamos analisar um exemplo.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Duração das músicas dos CDs A e B



Fonte de pesquisa: Registros de Marta em 2020.

Analisando o gráfico, podemos concluir, por exemplo, que cerca de metade das músicas do CD **A** tem duração maior do que aproximadamente metade das músicas do CD **B**. Além disso, é possível concluir que a variação de tempo das músicas do CD **B** é menor do que a do CD **A**.

Observação

Quanto maior o comprimento (ou a altura) da caixa, maior a variabilidade dos dados do conjunto.

O *box-plot* não deve ser usado quando os dados tiverem mais de uma moda. Quando isso ocorrer, o diagrama de ramo-e-folhas ou o de pontos são recomendados.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

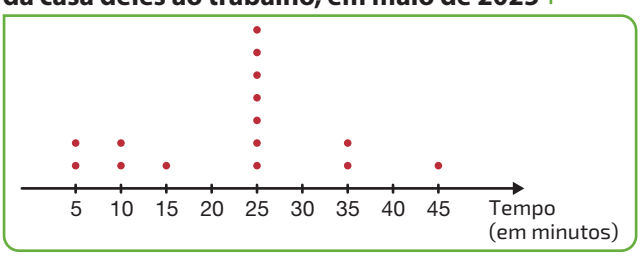
Anote as respostas no caderno.

70. O que podemos concluir ao analisar o gráfico apresentado?

Sugestões de resposta: Dois funcionários levam 5 minutos para ir da casa deles ao trabalho; aproximadamente 40% dos funcionários levam 25 minutos para ir da casa deles ao trabalho; o funcionário que leva mais tempo demora 45 minutos.

Professor, professora: Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Tempo gasto pelos funcionários para irem da casa deles ao trabalho, em maio de 2025



Fonte de pesquisa: RH da empresa.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

71. O diagrama de ramo-e-folhas apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, vendida pelos produtores de alimentos orgânicos de certo município.

Arroz vendido pelos produtores de alimentos orgânicos de certo município, em toneladas, no 1º semestre de 2024 e de 2025

1º sem./2024		1º sem./2025
8 3 3	0	
	1	
9 1 1 1 1	2	
	3	7 7 7 7 7 9
	4	
7 7 2 2 0	5	
	6	
	7	0 0 0 0 0 0
	8	
1 1	9	
	10	
	11	2 2 5

Legenda:
| 11 | 2 significa 112 toneladas para o 1º sem./2025.
0 | 5 | significa 50 toneladas para o 1º sem./2024.

Fonte de pesquisa: Dados da associação de produtores locais do município.

a) Quantos produtores de arroz orgânico há nesse município? Resposta: 15 produtores.

b) No 1º semestre de qual ano esses produtores venderam a maior quantidade de arroz? Resposta: 2025

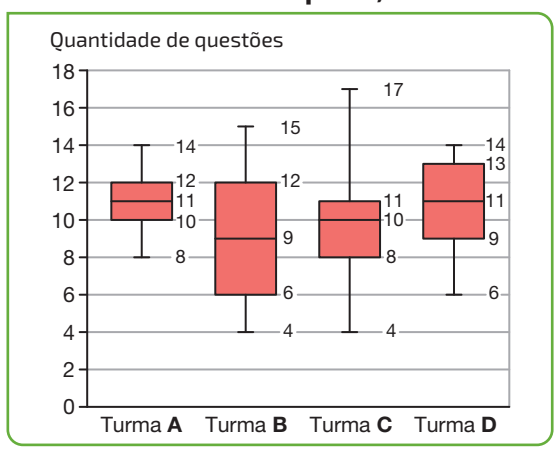
c) Qual foi a quantidade média, em toneladas, vendida por esses produtores no 1º semestre de 2024? E no 1º semestre de 2025? Resposta: Aproximadamente 38,5 toneladas; aproximadamente 65,5 toneladas.

72. Após corrigir as provas das quatro turmas do Ensino Médio de uma escola, o professor de Matemática organizou a quantidade de questões resolvidas corretamente pelos estudantes em um *box-plot*.

Qual foi a quantidade mediana de acertos em cada uma das turmas?

Resposta: Turma **A**: 11; Turma **B**: 9; Turma **C**: 10; Turma **D**: 11.
Professor, professora: Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Quantidade de questões resolvidas corretamente na última prova, em 2025



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: Registros do professor de Matemática.

73. A seguir está apresentado o tempo, em minutos, que os estudantes de uma sala dedicaram diariamente aos estudos em 2025.

180	180	195	195	210	210	215	215	240	240	245	260	265	265
265	280	280	280	280	280	300	300	300	300	305	305	305	305

a) Em sua opinião, qual tipo de gráfico deve ser usado para organizar os dados: diagrama de ramo-e-folhas, diagrama de pontos, histograma ou *box-plot*? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam diagrama de ramo-e-folhas ou diagrama de pontos.

b) Esboce o gráfico indicado por você no item **a**. Resposta pessoal. A resposta depende do gráfico indicado no item **a**.

c) Podemos afirmar que mais da metade dos estudantes estuda mais de 4 horas e 30 minutos por dia? Justifique sua resposta. Resposta: Não, pois, dos 28 estudantes, apenas 13 estudam mais de 4 horas e 30 minutos, ou 270 minutos, ou seja, menos da metade.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

74. Foi feita uma pesquisa sobre a quilometragem média por litro de óleo *diesel* dos ônibus de certo município, em março de 2025.

Quilometragem média por litro de óleo *diesel* dos ônibus de certo município, em março de 2025

Quilometragem	Frequência
1,02	20
1,67	100
2,04	97
2,70	87
3,23	150
3,94	125
4,05	315

Fonte de pesquisa: Registros da prefeitura do município.

74. a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam histograma, pois a quantidade de valores apresentados é alta.

a) A organizadora da pesquisa pretende esboçar um gráfico para apresentar os dados obtidos. Em sua opinião, ela deveria utilizar um histograma ou um diagrama de ramo-e-folhas? Justifique sua resposta.

b) Esboce o gráfico indicado por você no item **a**.
Resposta depende do gráfico indicado no item **a**.

75. Certa empresa produz peças com 75 cm de diâmetro. Após realizar a verificação de alguns lotes da produção, a diretoria da empresa decidiu organizar os funcionários em 2 grupos (**A** e **B**) e enviar um deles (**A**) para um treinamento. Para verificar a validade do treinamento (ou seja, constatar se a variação no diâmetro das peças produzidas diminuiu), no dia 10 de agosto de 2025 foram selecionadas 10 peças produzidas pelo grupo **A** e 10 peças produzidas pelo grupo **B**, cujos funcionários não participaram do treinamento. Verifique os resultados obtidos. Professor, professora: Os dados apresentados nos quadros são fictícios.

Diâmetro, em centímetros, das peças produzidas pelo grupo **A**.

75,27	75	74,98	75,01	75,41	74,93	74,72	74,53	75,22	74,75

Diâmetro, em centímetros, das peças produzidas pelo grupo **B**.

75,98	75,61	75	74,2	76,84	76,75	76,75	74,74	72,58	74,86

a) A fim de possibilitar uma comparação rápida dos dados, será esboçado um gráfico. Em sua opinião, qual seria o mais indicado para essa comparação? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam *box-plot*.

b) Esboce o gráfico indicado por você no item **a**. Em seguida, analisando-o, determine se o treinamento foi válido. Resposta depende do gráfico indicado no item **a**.

Estatística e probabilidade

OBJETO DIGITAL ***Infográfico clicável*:** Como saber se o consumidor é um bom pagador?

Estudamos anteriormente que a probabilidade P de um evento ocorrer em um espaço amostral equiprovável pode ser calculada teoricamente por meio da seguinte razão:

$$P = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Porém, existem situações em que não é possível realizar o cálculo da probabilidade teoricamente e, assim, é necessário considerar várias repetições de um experimento e obter a probabilidade por meio da frequência relativa da ocorrência do evento. Assim, a probabilidade de um evento ocorrer pode ser estimada com base em cálculos estatísticos.

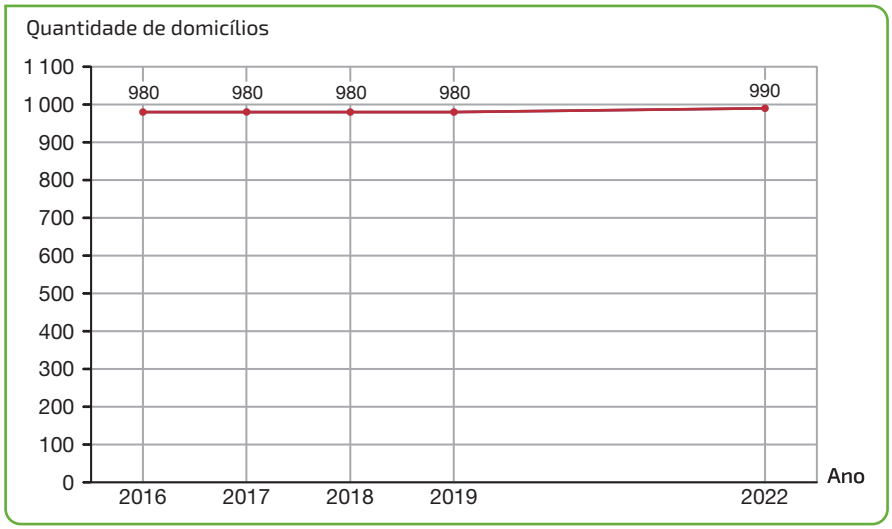
À medida que aumentamos a quantidade de repetições do experimento, mais precisa é a probabilidade estimada. Por exemplo, mesmo que cinco peças produzidas por uma máquina e escolhidas ao acaso não apresentem defeitos, não podemos afirmar que a probabilidade de sortear uma peça sem defeito seja de 100%, pois essa quantidade analisada ainda é pequena. Para obter um valor que represente melhor a ocorrência do evento "a peça não apresentar defeito", devemos analisar uma quantidade maior de peças.

Nem sempre é necessária a realização de um experimento para obter os dados amostrais; esses dados também podem ser obtidos em registros históricos fornecidos por órgãos públicos e privados.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O gráfico a seguir, por exemplo, apresenta informações registradas pelo IBGE.

Quantidade aproximada de domicílios com geladeira por mil domicílios, de 2016 a 2022



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Os valores apresentados no gráfico foram obtidos pelo cálculo da frequência relativa da ocorrência do evento "o domicílio ter geladeira".

Fonte de pesquisa: IBGE. *Síntese de Indicadores Sociais*. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9221-sintese-de-indicadores-sociais.html. Acesso em: 14 maio 2024.

Por meio dos dados apresentados no gráfico, podemos verificar que, em 2019, sorteando um domicílio brasileiro, a probabilidade de ele ter uma geladeira era de aproximadamente $\frac{980}{1\,000}$ ou 98%. Entretanto, note que em 2022 essa probabilidade aumentou. Nesse ano, a probabilidade era de aproximadamente 99%.

Exercícios e problemas resolvidos

R6. O Programa Brasileiro de Etiquetagem (PBE) é um programa de conservação de energia do Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (Inmetro), que atua por meio de etiquetas informativas cujo objetivo é alertar o consumidor sobre a eficiência energética de eletrodomésticos. Entre os produtos etiquetados pelo PBE, as lâmpadas fluorescentes são avaliadas em relação à durabilidade e intensidade luminosa. Elas permanecem ligadas durante meses para que se verifique se sua vida útil mínima corresponde a 5 000 horas. Além disso, são ligadas e desligadas várias vezes ao dia.

Na tabela, estão apresentados os resultados obtidos por um laboratório de controle de qualidade para uma amostra de 320 lâmpadas da marca **A** em relação à durabilidade.

Tempo de vida útil, em milhares de horas, de lâmpadas da marca A, em 2026

Tempo de vida útil (milhares de horas)	Quantidade de lâmpadas
3	10
4	17
5	25
6	35
7	44
8	49
9	46
10	38
11	28
12	18
13	10
Total	320

Fonte de pesquisa: Laboratório de controle de qualidade.

Considerando que essa amostra representa significativamente todas as lâmpadas da marca **A** vendidas ao consumidor, resolva os itens a seguir.

a) Construa um gráfico de barras representando a probabilidade de durabilidade das lâmpadas da marca **A** em função do tempo de vida.

b) Na etiqueta das lâmpadas da marca **A** vem indicada durabilidade média de 8 000 horas. Qual é a probabilidade de que, ao sortear uma lâmpada, ela tenha tempo de vida útil menor do que as 8 000 horas indicadas na etiqueta?

Professor, professora: As informações apresentadas na tabela são fictícias.



REPRODUÇÃO/PROCEL

O selo Procel indica melhor eficiência energética em eletrodomésticos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

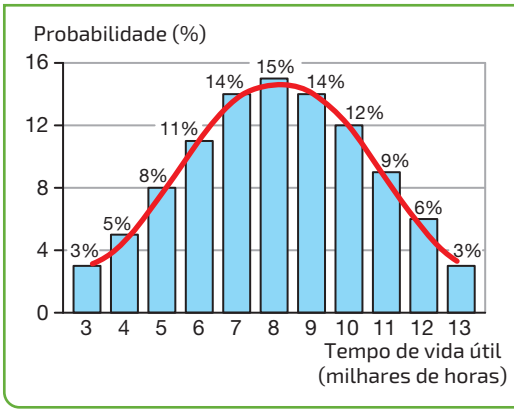
Resolução

a) Para construir o gráfico de barras, calculamos a probabilidade aproximada para cada tempo de vida útil das lâmpadas.

- 3 000 horas: $\frac{\text{quantidade de lâmpadas com tempo de vida útil de 3 000 horas}}{\text{total de lâmpadas da amostra}} = \frac{10}{320} \simeq 0{,}03 = 3\%$
- 4 000 horas: $\frac{\text{quantidade de lâmpadas com tempo de vida útil de 4 000 horas}}{\text{total de lâmpadas da amostra}} = \frac{17}{320} \simeq 0{,}05 = 5\%$
- 5 000 horas: $\frac{\text{quantidade de lâmpadas com tempo de vida útil de 5 000 horas}}{\text{total de lâmpadas da amostra}} = \frac{25}{320} \simeq 0{,}08 = 8\%$
- 6 000 horas: $\frac{\text{quantidade de lâmpadas com tempo de vida útil de 6 000 horas}}{\text{total de lâmpadas da amostra}} = \frac{35}{320} \simeq 0{,}11 = 11\%$
- 7 000 horas: $\frac{\text{quantidade de lâmpadas com tempo de vida útil de 7 000 horas}}{\text{total de lâmpadas da amostra}} = \frac{44}{320} \simeq 0{,}14 = 14\%$
- 8 000 horas: $\frac{\text{quantidade de lâmpadas com tempo de vida útil de 8 000 horas}}{\text{total de lâmpadas da amostra}} = \frac{49}{320} \simeq 0{,}15 = 15\%$
- 9 000 horas: $\frac{\text{quantidade de lâmpadas com tempo de vida útil de 9 000 horas}}{\text{total de lâmpadas da amostra}} = \frac{46}{320} \simeq 0{,}14 = 14\%$
- 10 000 horas: $\frac{\text{quantidade de lâmpadas com tempo de vida útil de 10 000 horas}}{\text{total de lâmpadas da amostra}} = \frac{38}{320} \simeq 0{,}12 = 12\%$
- 11 000 horas: $\frac{\text{quantidade de lâmpadas com tempo de vida útil de 11 000 horas}}{\text{total de lâmpadas da amostra}} = \frac{28}{320} \simeq 0{,}09 = 9\%$
- 12 000 horas: $\frac{\text{quantidade de lâmpadas com tempo de vida útil de 12 000 horas}}{\text{total de lâmpadas da amostra}} = \frac{18}{320} \simeq 0{,}06 = 6\%$
- 13 000 horas: $\frac{\text{quantidade de lâmpadas com tempo de vida útil de 13 000 horas}}{\text{total de lâmpadas da amostra}} = \frac{10}{320} \simeq 0{,}03 = 3\%$

Com esses dados, organizamos as informações no gráfico.

Probabilidade em função do tempo de vida útil da lâmpada da marca A, em 2026



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: Laboratório de controle de qualidade.

Professor, professora: As informações apresentadas no gráfico são fictícias.

Professor, professora: Explique aos estudantes que a notação $P(X < 8)$ e $P(X = 7)$ é utilizada, por exemplo, para indicar a probabilidade de que o tempo de vida útil da lâmpada seja menor do que 8 000 horas e igual a 7 000 horas, respectivamente. Além disso, leve-os a compreender que o item **b** desta tarefa também pode ser resolvido dividindo a quantidade de lâmpadas com vida útil menor do que 8 mil horas pelo total de lâmpadas da amostra: $P(X < 8) = \frac{131}{320} \simeq 0{,}41 = 41\%$.

b) Representando por X o tempo de vida útil da lâmpada, em milhares de horas, a probabilidade de que uma lâmpada da marca **A** tenha duração menor do que 8 000 horas é:

$$P(X < 8) = P(X = 7) + P(X = 6) + P(X = 5) + P(X = 4) + P(X = 3)$$
$$P(X < 8) \simeq 0{,}14 + 0{,}11 + 0{,}08 + 0{,}05 + 0{,}03$$
$$P(X < 8) \simeq 0{,}41 = 41\%$$

Portanto, a probabilidade de que, ao sortear uma lâmpada, ela tenha o tempo de vida útil menor do que as 8 000 horas indicadas na etiqueta é de aproximadamente 41%.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R7. O Índice de Massa Corporal (IMC) é uma medida internacional muito utilizada para avaliar a massa corporal de um adulto. Sua fórmula é dada por:

$$\text{IMC} = \frac{\text{massa em quilograma}}{(\text{altura em metro})^2}$$

Os dados obtidos no IMC podem ser empregados para identificar características relacionadas à obesidade, com base na relação a seguir.

Classificação do estado nutricional de pessoas adultas de acordo com o IMC

Classificação	IMC
Baixo peso	Menor do que 18,5 kg/m^2
Peso adequado	Igual ou maior do que 18,5 kg/m^2 e menor do que 25 kg/m^2
Sobrepeso	Igual ou maior do que 25 kg/m^2 e menor do que 30 kg/m^2
Obesidade grau 1	Igual ou maior do que 30 kg/m^2 e menor do que 35 kg/m^2
Obesidade grau 2	Igual ou maior do que 35 kg/m^2 e menor do que 40 kg/m^2
Obesidade grau 3 (mórbida)	Igual ou maior do que 40 kg/m^2

Fonte de pesquisa: ABESO. *Calculadora de IMC*. Disponível em: https://abeso.org.br/obesidade-e-sindrome-metabolica/calculadora-imc/. Acesso em: 21 ago. 2024.

Observação

O IMC não é a única ferramenta utilizada pelos profissionais da saúde para avaliar as condições físicas de um paciente. Assim, ele não deve ser tomado como único parâmetro para classificar uma pessoa em relação à obesidade.

Em uma clínica de endocrinologia e nutrição foi realizado um levantamento a respeito dos valores de IMC de uma amostra de pacientes, cujos dados foram organizados na tabela indicada a seguir.

IMC de um grupo de pacientes de uma clínica de endocrinologia e nutrição, em 25/09/2025

IMC	Quantidade de pacientes
Menor do que 18,5 kg/m^2	7
Igual ou maior do que 18,5 kg/m^2 e menor do que 25 kg/m^2	36
Igual ou maior do que 25 kg/m^2 e menor do que 30 kg/m^2	54
Igual ou maior do que 30 kg/m^2 e menor do que 35 kg/m^2	18
Igual ou maior do que 35 kg/m^2 e menor do que 40 kg/m^2	9
Igual ou maior do que 40 kg/m^2	6

Professor, professora: Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Fonte de pesquisa: Clínica de endocrinologia.

Considerando que essa amostra representa significativamente todos os pacientes da clínica, determine a probabilidade de, selecionando um paciente ao acaso, a pessoa escolhida ser classificada como obesa, conforme os parâmetros de avaliação do IMC.

Resolução

Para que um indivíduo seja classificado como obeso, ele precisa apresentar IMC Igual ou maior do que 30 kg/m^2. Assim, representando por X o IMC de um paciente, a probabilidade de que, conforme os parâmetros de avaliação do IMC, ele seja classificado como obeso é:

$$P(X \geq 30) = P(30 \leq X < 35) + P(35 \leq X < 40) + P(X \geq 40)$$

$$P(X \geq 30) = \frac{18}{130} + \frac{9}{130} + \frac{6}{130}$$

$$P(X \geq 30) \simeq 0{,}14 + 0{,}07 + 0{,}05$$

$$P(X \geq 30) \simeq 0{,}26$$

Portanto, a probabilidade de um paciente escolhido ao acaso ser classificado, de acordo com o IMC, como obeso é aproximadamente 26%.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Métodos contraceptivos e sua eficácia

ODS 3

A tomada de decisões é uma ação indispensável à vida em sociedade e recorrente em diversos aspectos da vida de um indivíduo. Porém, para que essa ação seja exercida de modo adequado, é necessário ter conhecimentos que permitam avaliar as diferentes possibilidades e escolher a melhor opção para cada caso.

Todos os seres humanos passam, desde o nascimento, por um processo de desenvolvimento que inclui diversas mudanças morfológicas, emocionais e atitudinais, por exemplo, que refletirão na vida adulta. Uma parte importante desse desenvolvimento envolve os cuidados com a saúde e a sexualidade. Nesse contexto, merece atenção o uso adequado dos métodos contraceptivos, com o objetivo de evitar gravidez não planejada ou contaminação por infecções sexualmente transmissíveis. Nesse caso, a combinação entre ciência e Matemática pode contribuir para a análise da eficácia de alguns métodos contraceptivos não definitivos e, por consequência, auxiliar no processo de tomada de decisão. Conheça a seguir alguns deles.

Eficácia dos principais métodos contraceptivos

As porcentagens de eficácia contra gravidez apresentadas a seguir referem-se ao uso correto de cada método.

Preservativo externo

É um dos métodos contraceptivos mais acessíveis e eficazes. Inserido no órgão sexual masculino, atua como barreira, impedindo o contato do sêmen com o sistema genital feminino. Não exige receita médica e é distribuído gratuitamente no Sistema Único de Saúde (SUS). Previne também as IST (Infecções Sexualmente Transmissíveis). Eficácia contra gravidez: de 88% a 97%.



Preservativo externo, de uso masculino.

EVSTIGNEEVA NATALIA/SHUTTERSTOCK

Preservativo interno

Segue o mesmo princípio do preservativo externo, mas é inserido no órgão sexual feminino e pode ser colocado com até 8 horas de antecedência. Não exige receita médica e é distribuído gratuitamente no SUS. Também previne as IST. Eficácia contra gravidez: de 88% a 97%.



Preservativo interno, de uso feminino.

NITO/SHUTTERSTOCK

Diafragma

É uma cúpula flexível composta de uma membrana de látex, parecida com um minúsculo chapéu, que forma uma barreira no colo do útero, impedindo que os espermatozoides fecundem o óvulo. Pode ser colocado algumas horas antes da relação e retirado depois, pelo menos 8 horas após o fim da relação sexual, visando garantir que os espermatozoides estejam mortos. Precisa de receita médica. O diafragma é reutilizável, após a correta higienização. Eficácia contra gravidez: de 82% a 97%.



Diafragma, de uso feminino.

ANDREY_POPOV/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Injeção anticoncepcional

Injeção de hormônios, que agem impedindo a ovulação. Precisa ser aplicada uma vez por mês ou uma vez a cada três meses, dependendo da composição indicada pelo médico especializado em ginecologia. Não requer controle diário ou semanal. Eficácia contra gravidez: 99%.

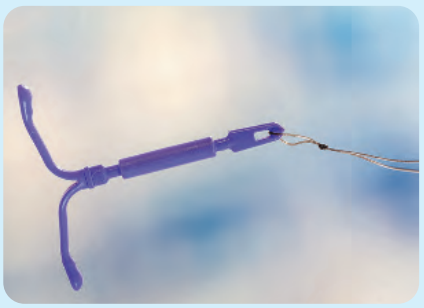


RABANY SEBASTIEN/SHUTTERSTOCK

Seringa para injeção anticoncepcional.

Dispositivo Intrauterino (DIU)

É um dispositivo pequeno em formato de T que é colocado dentro do útero. Na versão de cobre, libera íons de cobre que imobilizam o esperma e dificultam bastante a sua mobilidade no útero, mas não impedem a ovulação. Já na versão hormonal, impede a ovulação pela liberação contínua de hormônios. Precisa ser inserido por um médico. Pode permanecer no útero por até 5 anos (hormonal) ou até 10 anos (de cobre), mas pode ser retirado a qualquer momento. Eficácia contra gravidez: de 97% a 99%.



JPC-PROD/SHUTTERSTOCK

Dispositivo intrauterino.

Pílula

É um comprimido que a mulher toma uma vez ao dia, tendo ou não relação sexual. Ele contém hormônios que impedem a ovulação. Deve ser avaliado e indicado por um médico. Pode ajudar a combater sintomas de tensão pré-menstrual (TPM) e proteger contra câncer de ovário. Eficácia contra gravidez: de 97 a 99%.



AFRICA STUDIO/SHUTTERSTOCK

Cartela de pílula anticoncepcional.

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Saúde. *Saúde sexual e saúde reprodutiva*. Cadernos de atenção básica, nº 26. Brasília-DF: 2013. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/saude_sexual_saude_reprodutiva.pdf. Acesso em: 11 set. 2024.

Observação

Um fato que precisamos considerar sobre os diferentes métodos contraceptivos é que nenhum deles é 100% garantido, mas as chances de proteção são maiores mediante o uso correto. Mesmo optando por outro método de prevenção à gravidez, é sempre importante o uso de preservativos nas relações sexuais para a prevenção de IST. O acompanhamento médico também é importante para auxiliar no uso de métodos contraceptivos mais adequados à saúde e ao organismo de cada pessoa.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que, para tomar a decisão adequada em relação ao uso dos métodos contraceptivos, no que diz respeito aos cuidados com a saúde e a sexualidade, é importante considerar a prevenção às ISTs, as consequências que o uso do método pode trazer à saúde da pessoa que o utilizar, a eficácia na prevenção à gravidez, entre outros fatores.

1. Em sua opinião, quais fatores devem ser considerados ao definir a utilização de um método contraceptivo? Converse com os colegas sobre esse assunto.

2. Uma das estratégias indicadas por especialistas para evitar gravidez não planejada e a transmissão das ISTs é a combinação de dois métodos contraceptivos de categorias diferentes, como um método hormonal com o preservativo.

Foi feita uma pesquisa com um grupo de 1000 casais. Todos usaram a pílula anticoncepcional, e apenas metade deles usou também o preservativo masculino como segundo método contraceptivo. Considerando que no segundo grupo o preservativo apresentou sua eficácia máxima para os casais cuja pílula anticoncepcional apresentou falha, determine uma estimativa, em porcentagem, com relação à diferença entre os casos de gravidez não planejada entre os dois grupos participantes da pesquisa.

Resposta: 97%

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

79. Resposta: Sim; espera-se que os estudantes digam que a probabilidade de obter cada face deveria ser próxima da probabilidade teórica $(16,6\%)$. Existe uma tendência maior de saírem as faces de números 2 (25%) e 5 $(22,\overline{4}\%)$.

Anote as respostas no caderno.

76. A água canalizada desempenha um papel essencial no cotidiano das pessoas, fornecendo-a para atividades fundamentais, como cozinhar e tomar banho. No entanto, ainda existem pessoas no Brasil que enfrentam dificuldades de acesso a esse recurso vital, recorrendo ao armazenamento de água em baldes, copos, caixas no chão, garrafas, entre outros. De acordo com dados do IBGE, 12 unidades federativas apresentam índices de acesso à água canalizada menor do que a média nacional. A seguir é apresentado o total de domicílios no Brasil, além da quantidade de domicílios com água canalizada nos anos de 2017 a 2022.

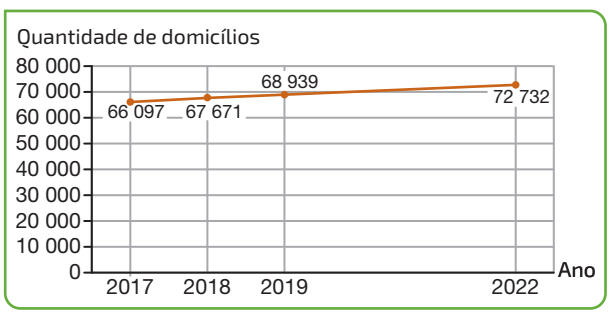
ODS 11

Total de domicílios no Brasil, nos anos 2017, 2018, 2019 e 2022

Ano	Quantidade de domicílios (em mil unidades)
2017	68 018
2018	69 419
2019	70 646
2022	74 145

Fonte de pesquisa: IBGE. Sidra – Banco de Tabelas Estatísticas. Disponível em: https://sidra.ibge.gov.br/tabela/6788#resultado. Acesso em: 19 ago. 2024.

Quantidade de domicílios com água canalizada no Brasil, nos anos 2017, 2018, 2019 e 2022



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: IBGE. Sidra – Banco de Tabelas Estatísticas. Disponível em: https://sidra.ibge.gov.br/tabela/6733#resultado. Acesso em: 19 ago. 2024.

a) Em 2017, ao ser escolhido aleatoriamente um domicílio no Brasil, qual era a probabilidade de ele ter água canalizada? Resposta: Aproximadamente 97,2%.

b) Qual era a probabilidade de, ao ser escolhido ao acaso um domicílio brasileiro em 2022, ele não ter água canalizada? Resposta: Aproximadamente 1,9%.

c) Em que ano, ao ser escolhido aleatoriamente um domicílio no Brasil, havia a maior probabilidade de ele ter água canalizada: 2022 ou 2019? Resposta: 2022

77. A tabela a seguir apresenta as idades dos professores de uma universidade agrupadas em classes.

Professor, professora: Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Idade dos professores de uma universidade, em 2025

Classe das idades	Frequência
$22 \vdash 34$	18
$34 \vdash 46$	36
$46 \vdash 58$	27
$58 \vdash 70$	8
$70 \vdash 82$	1
Total	90

Fonte de pesquisa: Setor de Recursos Humanos da universidade.

Selecionado um professor dessa universidade ao acaso, determine a probabilidade de a idade dele ser igual ou menor do que 46 anos e menor do que 58 anos. Resposta: 0,3 ou 30%

78. Uma urna contém 30 bolinhas, entre brancas, pretas e vermelhas. Ao realizar repetidas vezes um experimento que consistia em sortear uma bolinha da urna, anotar sua cor e devolvê-la à urna, foram obtidos os resultados apresentados. Resposta: 8 brancas; 17 pretas; 5 vermelhas.

Resultados obtidos ao sortear uma bolinha da urna

Cor	Quantidade de sorteios
Branca	427
Preta	902
Vermelha	271

Com base nos resultados obtidos no experimento, estime qual deve ser o total de bolinhas de cada cor na urna.

79. Em certo experimento realizado com um dado de seis faces, foram feitos 900 lançamentos, obtendo os resultados a seguir. Pode-se suspeitar da honestidade desse dado? Justifique sua resposta.

Resultados obtidos nos 900 lançamentos do dado

Face	1	2	3	4	5	6
Quantidade de lançamentos	113	225	105	120	202	135

80. Há situações cotidianas em que é necessário tomar decisões com base em pesquisas prévias e conhecimentos de probabilidade, como a escolha de um método contraceptivo e um tratamento médico. Junte-se a um colega e realizem uma pesquisa para determinar outras situações em que é necessário utilizar os conhecimentos sobre probabilidade na tomada de decisão.

Resposta pessoal. Sugestões de resposta: Abertura de um negócio; destino de uma viagem considerando a possibilidade de chuva.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

7. Sugestão de resposta: Podemos concluir que, em relação às respectivas médias, as notas do 3º **A** são mais dispersas que as notas do 3º **B**.

Neste capítulo, estudamos variáveis estatísticas, gráficos, tabelas, medidas de tendência central, medidas separatrizes e medidas de dispersão. Agora, chegou a hora de refletir sobre seus conhecimentos! Como estratégia de estudos, sugerimos a você que faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

3. c) Resposta: Grau de instrução: qualitativa ordinal; idade em anos quantitativa discreta.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os.

Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

2. A seguir estão apresentados os principais conteúdos estudados neste capítulo.

Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

Variáveis estatísticas. | População e amostra.

Tabelas e gráficos.

Inadequações em tabelas e gráficos.

Medidas de tendência central.

Medidas separatrizes. | Medidas de dispersão.

Distribuição de frequência. | Intervalos de classe.

Probabilidade e estatística.

3. b) Resposta: Classe social: qualitativa ordinal; quantidade de filhos: quantitativa discreta.

Você teve dificuldade em alguns conteúdos? Ficou com dúvidas? Reflita sobre essas questões e, se necessário, retome o que estudou.

3. Em cada item, há uma variável qualitativa e outra quantitativa. Identifique cada uma delas e classifique a qualitativa em nominal ou ordinal e a quantitativa, em discreta ou contínua.

a) Salário; tipo sanguíneo.

Resposta: Salário: quantitativa contínua; tipo sanguíneo: qualitativa nominal.

b) Classe social; quantidade de filhos.

c) Grau de instrução; idade em anos.

d) IDH; nacionalidade.

Resposta: IDH: quantitativa contínua; nacionalidade: qualitativa nominal.

4. Todas as tabelas e gráficos devem apresentar em sua estrutura título e fonte de pesquisa. Qual é a função desses elementos?

Resposta: O título sintetiza o conteúdo representado, e a fonte de pesquisa identifica a origem dos dados.

5. Em cada item, há uma variável e a sugestão de um tipo de gráfico para representá-la. Se a sugestão estiver adequada, justifique sua resposta. Caso contrário, indique outro tipo de gráfico adequado.

Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) Índice mensal de inflação em 2025; gráfico de setores.

b) Taxa de analfabetismo nas grandes regiões brasileiras; gráfico de barras.

c) Intenções de voto para o cargo de prefeito de uma cidade em 2024; pirâmide etária.

d) Vendas mensais de motocicletas em 2025; gráfico de barras.

6. A tabela a seguir apresenta a quantidade de salários mínimos recebidos pelos 20 funcionários de uma empresa.

Quantidade de salários mínimos recebidos pelos funcionários de uma empresa em março de 2025

Quantidade de salários mínimos	Frequência
1	8
2	5
3	3
4	2
Mais do que 4	2

Fonte de pesquisa: Setor de Recursos Humanos da empresa.

6. b) Resposta: Não é possível obter a média aritmética, pois não sabemos a quantidade de salários mínimos recebidos por dois dos funcionários.

Se possível, calcule:

a) a mediana.

Resposta: $Md = 2$

b) a média aritmética.

7. Após realizar uma mesma avaliação em duas turmas do 3º ano, o professor de Matemática constatou que a média das notas no 3º **A** foi igual a 8,5, com desvio padrão de 9,1 pontos, e no 3º **B**, a média foi igual a 7, com desvio padrão de 3 pontos. Considerando essas medidas, que conclusões podem ser obtidas?

8. Indique um ponto positivo e outro negativo para utilizar um histograma com o objetivo de representar dados estatísticos.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

9. No ano 2000, a população brasileira era composta de 169 872 856 pessoas, e dessas aproximadamente 49,2% eram do gênero masculino. Já no ano de 2022, a população brasileira era de 203 080 756 pessoas, das quais 104 548 325 eram do gênero feminino. De 2000 a 2022, a probabilidade de escolher aleatoriamente uma pessoa, entre toda a população brasileira, e esta ser do gênero feminino aumentou ou diminuiu? Qual estratégia você utilizou para resolver essa questão?

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

10. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo-o. Depois, troque-o com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

11. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

11. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo. Nela, use desenhos e dê exemplos.

10. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

4

GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO



OWLIE PRODUCTIONS/SHUTTERSTOCK

Projeto plotado em um programa 3D de computador para evidenciar ao cliente os detalhes arquitetônicos planejados.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O desenho é um modo importante de comunicação que remonta aos primórdios da nossa história e está presente em diferentes aspectos do nosso cotidiano, como na sinalização de trânsito, em livros e nas logomarcas de diversas empresas.

Um aspecto específico desse meio de comunicação é o desenho técnico, que visa retratar objetos com precisão, fornecendo todas as informações essenciais para representá-los em um plano tridimensional. Entre suas principais características, estão as vistas e as escalas.

Antigamente, os desenhos técnicos eram feitos à mão, usando instrumentos de desenho como escalímetro, compasso, régua T e esquadros. Com o avanço da tecnologia, foram desenvolvidos *softwares* especializados que simplificam a produção e o ajuste desses desenhos, assim como permitem seu compartilhamento. Além disso, com esses *softwares*, engenheiros e arquitetos podem obter uma cópia física de seus projetos por meio de uma **máquina de plotagem**, que imprime os desenhos em papéis com amplas dimensões.

No Brasil, os desenhos técnicos obedecem às normas e aos padrões estabelecidos pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), que representa o país na Organização Internacional para Padronização (ISO), uma entidade não governamental responsável pela normatização e padronização de empresas e produtos em mais de 160 países.

Entre as normas da ABNT para o desenho técnico estão a NBR 10068, que padroniza as dimensões dos papéis e determina os *layouts*, e a NBR 8403, que determina, entre outros detalhes, a aplicação e a largura de linhas em desenhos.

Com base nos dados de um desenho técnico de determinado objeto, um profissional capacitado é capaz de reproduzi-lo no material e formato desejados. Nas próximas páginas, estudaremos as projeções ortogonais de pontos, figuras e retas sobre planos, assim como a distância no espaço entre alguns desses elementos, tópicos diretamente relacionados aos desenhos técnicos.

Neste capítulo, você vai estudar:

- geometria de posição;
- posições relativas entre duas retas;
- posições relativas entre reta e plano;
- posições relativas entre dois planos;
- propriedades de paralelismo e perpendicularismo;
- projeções ortogonais sobre um plano;
- distâncias no espaço.

Máquina de plotagem: dispositivo para impressão de gráficos e desenhos em grandes dimensões e com alta qualidade fotográfica, principalmente plantas arquitetônicas e mapas cartográficos.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Em sua opinião, qual é uma das necessidades que os desenhos técnicos ajudam a suprir? Resposta pessoal. Sugestão de resposta: A necessidade de representar, em um plano, objetos tridimensionais com o detalhamento e a precisão necessários para reproduzi-los, sendo uma linguagem global, capaz de superar barreiras idiomáticas.

2. Você já fez algum desenho técnico, com ou sem o uso de *softwares*? Converse com seus colegas e professores.
Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

3. Pesquise a importância dos desenhos técnicos para um projeto.
Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Introdução

Fazer afirmações sobre a origem da Geometria é algo arriscado, pois seus primórdios são mais antigos que a própria escrita. Somente há alguns milênios a humanidade foi capaz de registrar por escrito seus conhecimentos e ideias. O que sabemos é que alguns povos, como os mesopotâmicos, os egípcios e os babilônicos, já usavam conhecimentos geométricos, principalmente os relativos à mensuração.

Em algum momento da história, o homem sentiu a necessidade de ter argumentos lógicos para que certas afirmações fossem aceitas como verdadeiras. Foi assim que surgiu a chamada Geometria demonstrativa. Comumente, é dito que ela teve início no século VI a.C., com o matemático Tales de Mileto, um dos primeiros personagens conhecidos a quem se creditam descobertas matemáticas.



SHEILA TERRY/SPL/FOTOARENA

Tales de Mileto (c. 624 a.C.-c. 546 a.C.), retratado de acordo com um busto antigo, do livro do século XIX *Vies des Savants Illustres*.

Outro contribuinte notável da Geometria demonstrativa, talvez o mais importante, foi Euclides de Alexandria (c. 300 a.C.). Ele foi um excelente organizador de resultados matemáticos obtidos por vários estudiosos que o precederam, revelando grande habilidade ao escrever suas deduções de forma simples e clara. Muito do trabalho de Euclides está contido em sua obra-prima: *Os elementos*. Essa coleção, composta de 13 livros, é um dos trabalhos mais influentes da história, contabilizando mais de mil edições publicadas.

Durante muito tempo, as deduções matemáticas realizadas por Euclides foram o texto escolar padrão em quase todo o mundo, e ainda hoje muito do que se ensina de Geometria nas escolas é baseado no livro *Os elementos*. A grandiosa obra de Euclides buscou formalizar o que atualmente conhecemos como Geometria euclidiana.

No estudo da Geometria, existem noções ou conceitos que são aceitos como verdadeiros sem que seja necessário demonstrá-los. As noções de **ponto**, **reta**, **plano** e **espaço** são chamadas **primitivas** e não são definidas formalmente: nós as distinguimos intuitivamente. O ponto, a reta e o plano são elementos básicos do espaço.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.



Página de rosto da primeira versão em inglês, traduzida por Sir Henry Billingsley, datada de 1570, da obra *Os elementos*, Euclides.

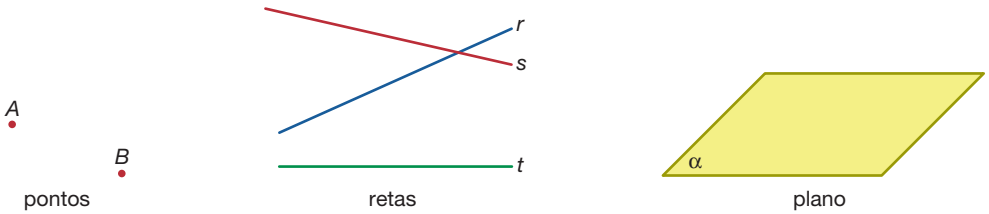
HENRY BILLINGSLEY - COLEÇÃO PARTICULAR
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

OBJETO DIGITAL ***Carrossel de imagens:***
Contribuições para a Geometria Espacial

Professor, professora: Comente com os estudantes que o grande avanço conquistado pelos pensadores da época de Tales foi notar que, por meio de abstrações matemáticas partindo de alguns pressupostos básicos, seria possível construir deduções que garantissem a veracidade de certas proposições gerais. As primeiras deduções, capazes de provar enunciados dotados de grande generalidade (os chamados "teoremas") estavam no contexto da Geometria. Assumindo como verdadeiros alguns poucos fatos (chamados "axiomas" ou "postulados"), uma sucessão de raciocínios lógicos leva a conclusões acerca das figuras geométricas, garantindo relações que, com total certeza, são válidas sempre e em qualquer lugar. Desde então, a ideia de demonstração é essencial na Matemática.

Conceitos iniciais

Geralmente, indicamos os pontos por letras maiúsculas, as retas por letras minúsculas e os planos por letras gregas minúsculas, como α, β e γ.



As noções primitivas de ponto, reta, plano e espaço servem como base para novos conceitos, sendo os postulados (ou axiomas) afirmações tomadas como verdadeiras sem necessidade de demonstrações. Já os teoremas, conclusões baseadas em postulados ou em outros teoremas já demonstrados, necessitam de demonstrações para serem aceitos como verdadeiros.

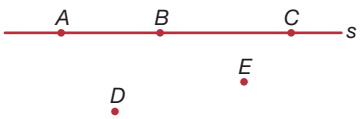
Provavelmente, você já estudou as posições relativas entre pontos e retas em um mesmo plano. Agora, estenderemos esse conceito para a posição relativa entre ponto e plano.

Relação entre ponto e reta



O ponto A pertence à reta s $(A \in s)$.
O ponto B não pertence à reta s $(B \notin s)$.

Relação entre pontos

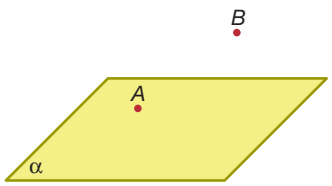


Os pontos A, B e C são **colineares**, pois pertencem à mesma reta.
Os pontos A, D e E não são colineares.

Observação

Dois pontos são sempre colineares.

Relação entre ponto e plano



O ponto A pertence ao plano α $(A \in \alpha)$.
O ponto B não pertence ao plano α $(B \notin \alpha)$.

Observação

É importante destacar que, na Matemática, nem tudo se manifesta de maneira imediata. Existem situações em que é necessário comprovar a veracidade de alguma proposição, ideia ou teoria. Para que isso seja possível, são considerados alguns princípios, chamados "axiomas", que são reconhecidos como verdadeiros, ou, então, proposições que já foram comprovadas como tal. Por meio da dedução e do raciocínio lógico, é elaborado um método que torne visível ou de fácil percepção a veracidade do que se está questionando. Esse processo de dedução e investigação foi introduzido por Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) e ficou conhecido como "demonstração".

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Neste momento, enunciaremos os primeiros postulados e demonstraremos alguns teoremas. Com base neles, iniciaremos o estudo das posições relativas entre retas e planos no espaço.

Postulado 1

Retas e planos são conjuntos de pontos.

Postulado 2

Existem infinitos pontos que pertencem a uma reta, assim como infinitos pontos que não pertencem a ela.

Postulado 3

Existem infinitos pontos que pertencem a um plano, assim como infinitos pontos que não pertencem a ele.

Postulado 4

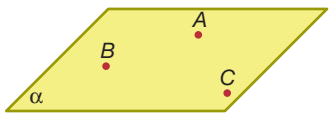
Dois pontos distintos determinam uma única reta.



Os pontos A e B determinam a reta s.

Postulado 5

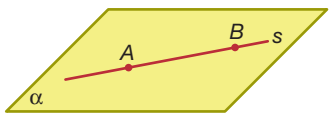
Três pontos não colineares determinam um único plano.



Os pontos A, B e C determinam o plano α.

Postulado 6

Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então essa reta está contida nesse plano.



Os pontos A e B da reta s pertencem ao plano α. Portanto, s está contida em α $(s \subset \alpha)$.

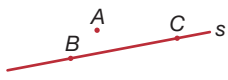
Considerando esses postulados e os conceitos primitivos de ponto, reta, plano e espaço, podemos enunciar e, aplicando o método dedutivo, demonstrar os teoremas a seguir.

Teorema 1

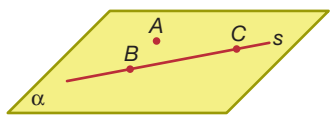
Uma reta e um ponto não pertencentes a ela determinam um único plano.

Demonstração

Considere uma reta s e um ponto A não pertencente a ela. Sejam ainda os pontos B e C pertencentes à reta s.



Os pontos A, B e C não são colineares, pois, pelo **postulado 4**, os pontos B e C determinam unicamente a reta s e, por **hipótese**, A não pertence a s. Pelo **postulado 5**, existe um único plano α determinado por A, B e C. Como a reta s tem dois de seus pontos pertencentes a α, o **postulado 6** nos permite concluir que a reta s está contida em α. Portanto, α é o único plano que contém a reta s e o ponto A.



Hipótese: proposição (ou conjunto de proposições) que se admite como um princípio, independentemente do fato de ser verdadeira ou falsa.

Professor, professora: Diga aos estudantes que um teorema, provado com base em axiomas, é uma afirmação geral que funciona para todos os casos em que suas hipóteses sejam satisfeitas, e não apenas em um ou outro caso particular.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

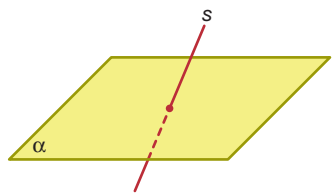
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Teorema 2

Se uma reta não contida em um plano o corta, a interseção dessa reta com esse plano é um único ponto.

Demonstração

Seja o plano α e a reta s, tal que $s \not\subset \alpha$. Suponha por absurdo que existam pelo menos dois pontos distintos de interseção entre a reta s e o plano α. Nesse caso, pelo **postulado 6**, s está contida em α, o que é falso, pois, por hipótese, s não está contida em α. Portanto, o ponto de interseção de s e α é único.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Tese: proposição que se expõe para ser defendida.

Observação

Na demonstração dedutiva por absurdo, utilizada no **teorema 2**, considera-se a hipótese e a negação da **tese** verdadeira. Usando argumentos verdadeiros, deduz-se uma sentença absurda, demonstrando-se, então, que a tese é verdadeira.

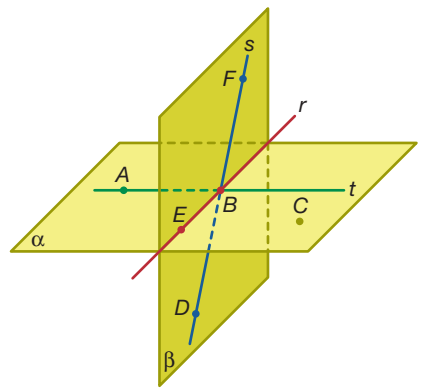
Exercícios e problemas resolvidos

R1. Com o auxílio da figura, determine a relação de pertinência ou continência dos itens a seguir.

a) Cada ponto em relação aos planos α e β.

b) Cada reta em relação aos planos α e β.

c) Cada ponto em relação às retas r, s e t.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Da figura, observamos que:

a) os pontos A, B, C e E pertencem ao plano α, e os pontos B, D, E e F pertencem ao plano β.

b) as retas r e t estão contidas no plano α, e as retas r e s estão contidas no plano β.

c) os pontos A e B pertencem à reta t, os pontos B e E pertencem à reta r, e os pontos D, B e F pertencem à reta s.

Observação

- Os pontos B e E pertencem aos dois planos.
- A reta r está contida nos dois planos.
- O ponto B pertence às três retas.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1. Em relação às afirmações a seguir, classifique-as em verdadeira ou falsa e reescreva aquelas que julgar falsas, corrigindo-as. 1. b) Resposta: Falsa. Sugestão de correção: Existem infinitos pontos que pertencem a um plano e infinitos pontos que não pertencem a ele.

a) Por um ponto, passam infinitas retas. Resposta: Verdadeira.

b) Existem finitos pontos que pertencem a um plano e infinitos pontos que não pertencem a ele.

c) Três pontos quaisquer determinam sempre uma única reta. Resposta: Falsa. Sugestão de correção: Três pontos colineares determinam uma única reta.

d) Existem infinitas retas que estão contidas em um único plano. Resposta: Verdadeira.

e) Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então, essa reta não está contida no plano. Resposta: Falsa. Sugestão de correção: Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então, essa reta está contida no plano.

2. Considere uma pirâmide de base quadrangular.

a) Por regiões de quantos planos as faces dessa pirâmide são formadas? Resposta: Cinco planos.

b) Cada vértice da pirâmide está contido em quantos dos planos indicados no item **a**? Resposta: Cada vértice da base está contido em três planos: um que contém a base e outros dois que contêm faces laterais. Já o outro vértice (que não pertence à base) está contido nos quatro planos que contêm, respectivamente, cada uma das faces laterais da pirâmide.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Posições relativas entre duas retas

Neste tópico, estudaremos as posições relativas entre retas contidas em um mesmo plano (retas coplanares) e entre retas não contidas em um mesmo plano (não coplanares).

No caso de retas coplanares, temos as seguintes posições relativas.

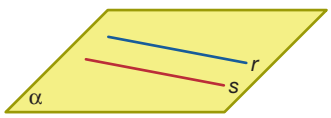
Coincidentes

Se duas retas r e s correspondem ao mesmo conjunto de pontos, dizemos que elas são coincidentes, isto é, são a mesma reta. Assim, indicamos por $r = s$.



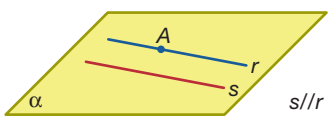
Paralelas

Duas retas quaisquer r e s são paralelas se, e somente se, elas forem coplanares e não tiverem pontos em comum. Indicamos por $r // s$.



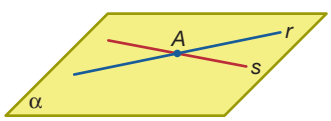
Postulado 7

Sendo A um ponto não pertencente à reta s, existe apenas uma reta r que passa por A e é paralela a s.



Concorrentes ou secantes

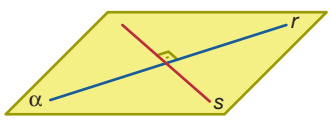
Duas retas r e s quaisquer são concorrentes (ou secantes) se, e somente se, elas forem coplanares e tiverem apenas um ponto em comum.



Se nenhum dos ângulos formados por duas retas concorrentes for reto, então dizemos que essas retas são **concorrentes oblíquas**.

Perpendiculares

Se duas retas concorrentes r e s formam um ângulo reto, dizemos que elas são perpendiculares. Indicamos por $r \perp s$.





ANDRÉ THÉVET – BIBLIOTECA MUNICIPAL DE LYON

Retrato de Euclides, de André Thévet. Entalhe, 16,9 cm × 14 cm, 1584.

Observação

O **postulado 7**, também citado como "5º Postulado de Euclides", "Postulado das paralelas" ou simplesmente "Postulado de Euclides", foi enunciado pelo matemático grego Euclides por volta do século III a.C.

OBJETO DIGITAL
***Carrossel de imagens*:** Geometria Esférica

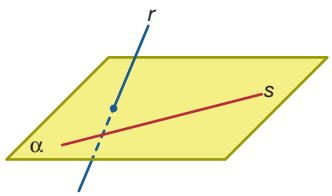
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

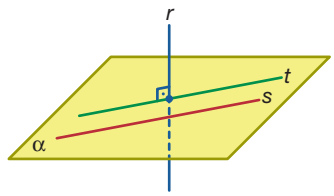
No caso de retas não coplanares, temos a seguinte posição relativa.

Reversas

Duas retas *r* e *s* são chamadas **reversas** (ou não coplanares) quando todo o plano que contém uma delas não contiver a outra.



Duas retas reversas *r* e *s* são chamadas **ortogonais** caso exista uma reta *t* perpendicular a uma delas e paralela à outra. Caso duas retas reversas não sejam ortogonais, dizemos que elas são **reversas oblíquas**.

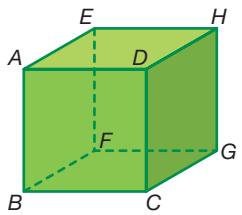


Professor, professora: Verifique se os estudantes compreendem a diferença entre retas perpendiculares e retas ortogonais. Diga que, embora nos dois casos a inclinação relativa entre as duas retas seja de 90°, as retas perpendiculares são um caso particular de retas concorrentes, pertencendo ao mesmo plano, enquanto as retas ortogonais são um caso particular de retas reversas, pertencendo a planos diferentes.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas resolvidos

R2. Analise o cubo. Professor, professora: Informe aos estudantes que em capítulos seguintes será apresentada a definição de cubo.



Observação

Usamos a notação $\overleftrightarrow{AB}$ para indicar a reta que contém o segmento $\overline{AB}$.

Professor, professora: Relembre com os estudantes o que são vértices, arestas e faces de um poliedro, conceitos que eles provavelmente estudaram no Ensino Fundamental.

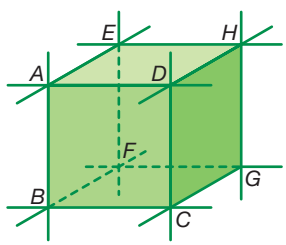
Considerando as retas que contêm as arestas desse cubo, determine:

a) as retas perpendiculares a $\overleftrightarrow{AD}$.

b) a posição relativa entre $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

Resolução

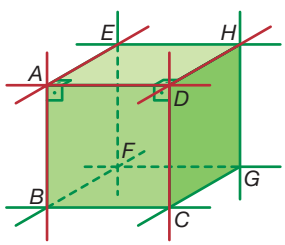
As retas que contêm as arestas do cubo são: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{GH}$, $\overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{DH}$.



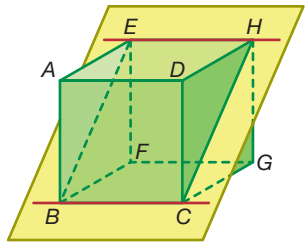
Observação

As retas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{EH}$ são paralelas entre si, assim como as retas $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{DH}$.

a) Em relação a $\overleftrightarrow{AD}$, as retas perpendiculares são: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{DH}$.



b) As retas $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, pois são coplanares e não têm pontos em comum.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

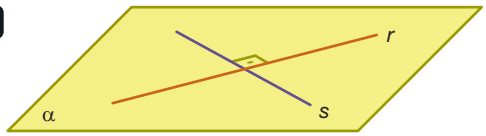
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

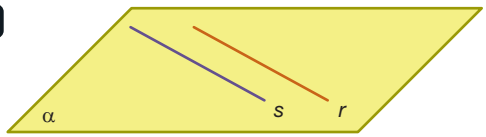
6. Resposta: Sim, pois $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são paralelas, de maneira que toda reta definida por dois pontos, entre A, B, C e D é coplanar.

3. Com o auxílio de um *software* de computador, Carina construiu um par de retas perpendiculares contidas em um plano α. Entre os itens a seguir, qual apresenta a construção feita por ela? Justifique sua resposta. Resposta: A construção feita por Carina é a do item **A**.

A.

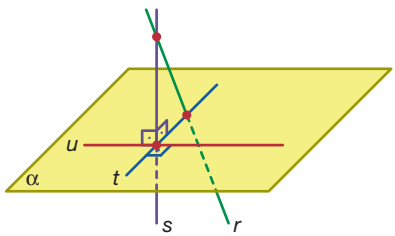


B.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

4. Seja o plano α e as retas r, s, t e u, tais que são concorrentes os pares: t e u; t e s; t e r; u e s; e r e s. Além disso, temos, $t \subset \alpha$ e $u \subset \alpha$.



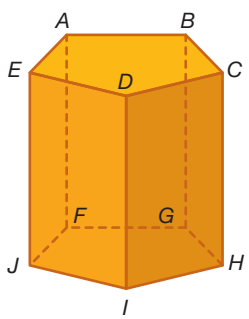
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual é a posição relativa entre:

- s e u? Resposta: Perpendiculares.
- r e u? Resposta: Reversas.

b) É possível que a reta r seja perpendicular à reta t? Por quê? Resposta: Não, pois se $r \perp t$, o triângulo formado por r, t e s teria dois ângulos internos retos, o que é um absurdo.

5. Analise o prisma reto de base pentagonal e, considerando as retas que contêm as arestas, escreva as retas: Respostas no final do **Livro do Estudante**.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) paralelas à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

b) ortogonais à reta $\overleftrightarrow{CD}$.

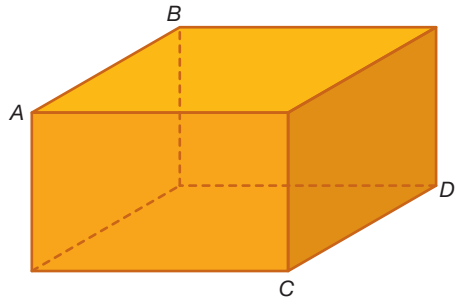
c) perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{IJ}$.

d) coplanares à reta $\overleftrightarrow{CH}$.

e) reversas à reta $\overleftrightarrow{AE}$.

Professor, professora: Em algumas tarefas são apresentados diversos prismas e pirâmides. Informe aos estudantes que esses objetos serão definidos em capítulos posteriores.

6. Em relação ao paralelepípedo reto retângulo apresentado, é possível afirmar que as retas $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ são coplanares? Por quê?

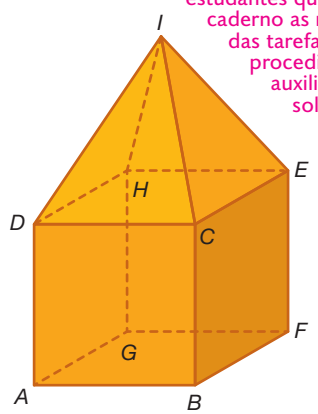


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Paralelepípedo reto retângulo é aquele cujas bases e faces laterais são regiões retangulares.

7. A figura apresentada a seguir é composta de um cubo e uma pirâmide. Professor, professora: Peça aos estudantes que construam no caderno as retas na resolução das tarefas **7** e **8**, pois esse procedimento pode auxiliá-los na busca da solução.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Em relação às retas que contêm as arestas dessa figura, resolva o que se pede nos itens a seguir.

a) Escreva três retas coplanares a $\overleftrightarrow{CD}$. Sugestão de resposta: $\overleftrightarrow{AB}$; $\overleftrightarrow{AD}$; $\overleftrightarrow{BC}$.

b) Determine todas as retas paralelas a $\overleftrightarrow{EF}$. Resposta: $\overleftrightarrow{HG}$; $\overleftrightarrow{AD}$; $\overleftrightarrow{BC}$.

c) Quais retas não têm paralelas? Resposta: $\overleftrightarrow{CI}$; $\overleftrightarrow{DI}$; $\overleftrightarrow{EI}$; $\overleftrightarrow{HI}$.

d) Qual é a posição de $\overleftrightarrow{AD}$ em relação a $\overleftrightarrow{CE}$? Resposta: Ortogonal.

8. Sejam r, s, t e u quatro retas não coincidentes e coplanares, com $r \perp s$, $u \perp t$ e s e t oblíquas, qual das afirmações a seguir está **incorreta**? Resposta: Alternativa **c**.

a) É possível que todas as retas se intersectem em um único ponto.

b) A reta t é oblíqua em relação à reta r.

c) A reta s é perpendicular à reta u.

d) As retas r e u são secantes.

e) Todas essas retas estão contidas em um único plano.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Posições relativas entre reta e plano

OBJETO DIGITAL
***Infográfico clicável*:**
Impedimento no futebol

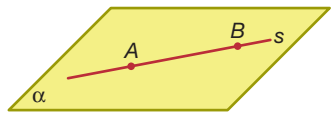
A seguir, estudaremos as posições relativas entre reta e plano. Considerando uma reta e um plano no espaço, temos as seguintes posições relativas.

Observação

Lembre-se: pelo **postulado 6**, se uma reta tem dois ou mais pontos pertencentes a um plano α, então $s \subset \alpha$.

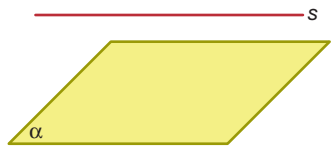
Reta contida no plano

Se dois pontos distintos *A* e *B* de uma reta *s* pertencem a um plano α, então a reta está contida nesse plano. Indicamos por $s \subset \alpha$.



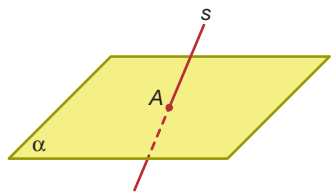
Reta paralela ao plano

Se uma reta *s* não tem ponto em comum com um plano α, então a reta é paralela a esse plano. Indicamos por $s // \alpha$.



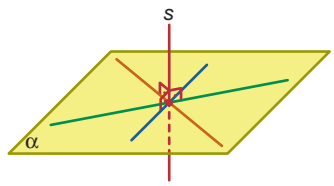
Reta concorrente ou secante ao plano

Se uma reta *s* tem um único ponto *A* em comum com um plano α, então a reta e o plano são concorrentes.



Reta perpendicular ao plano

Uma reta *s* é perpendicular a um plano α se, e somente se, *s* for perpendicular a todas as retas concorrentes a ela contidas em α. Indicamos por $s \perp \alpha$.

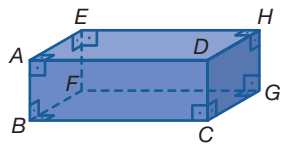


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas resolvidos

R3. Analise o paralelepípedo reto retângulo.

Considerando as retas que contêm as arestas do paralelepípedo reto retângulo e os planos que contêm as faces, responda às seguintes perguntas.

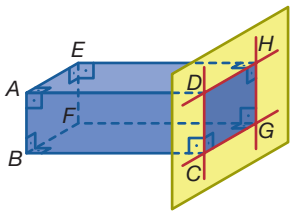


a) Quais são as retas contidas no plano que contém a face *DCGH*?

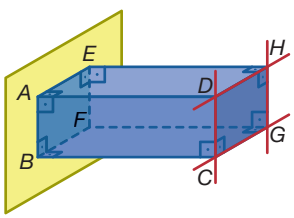
b) Quais são as retas paralelas ao plano que contém a face *ABFE*?

Resolução

a) O plano que contém a face *DCGH* contém as retas $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{DH}$, $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{CG}$.



b) Em relação ao plano que contém a face *ABFE*, as retas paralelas são: $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{DH}$, $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{CG}$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

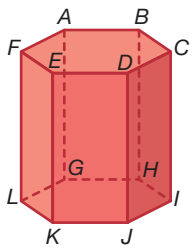
9. Verifique se é verdadeira ou falsa cada afirmação a seguir, reescrevendo corretamente aquelas que julgar falsas.

a) Se uma reta r é perpendicular a duas outras retas paralelas e contidas em um mesmo plano α, então r está contida em α. Resposta: Verdadeira.

b) Existem infinitas retas paralelas a um plano qualquer e infinitos planos paralelos a uma reta qualquer. Resposta: Verdadeira.

c) Se uma reta r e um plano α são paralelos, então toda reta perpendicular a r será perpendicular a α.

10. Considerando os planos que contêm as faces e as retas que contêm as arestas do prisma hexagonal regular, responda às questões.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

9. c) Resposta: Falsa. Sugestão de resposta: Se uma reta r e um plano α são paralelos, então existem retas perpendiculares a r que são perpendiculares a α.

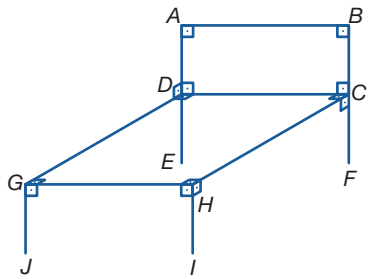
a) Quantas retas são perpendiculares ao plano que contém a face $CDJI$? Resposta: Nenhuma.

b) Qual é a posição relativa entre o plano que contém a face $EFLK$ e a reta $\overleftrightarrow{CD}$? Resposta: Concorrente.

c) Quais retas são paralelas a $\overleftrightarrow{KL}$?
Resposta: $\overleftrightarrow{EF}$; $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{HI}$.

11. Considere as retas r e s e o plano α. Determine as possíveis posições relativas entre essas retas, sabendo que r é concorrente a α e s está contida em α. Resposta: Concorrentes (perpendiculares ou oblíquas) ou reversas (ortogonais ou oblíquas).

12. Analise o esquema que representa uma cama.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual é a posição relativa entre $\overleftrightarrow{AB}$ e o plano determinado por:

- $CDEF$? Resposta: Contida no plano.
- $CDGH$? Resposta: Paralela.

b) Entre as retas que contêm os segmentos do esquema, qual é paralela ao plano determinado por $ABCD$? Resposta: $\overleftrightarrow{GH}$.

c) Determine as retas que contêm os segmentos do esquema, reversas a $\overleftrightarrow{AE}$. Resposta: $\overleftrightarrow{CH}$; $\overleftrightarrow{GH}$.

13. Se uma reta s for perpendicular a apenas uma reta contida em um plano α, então s será perpendicular a α? Justifique sua resposta.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Posições relativas entre dois planos

Antes de estudarmos as posições relativas entre dois planos, vamos apresentar um postulado.

Postulado 8

Se dois planos têm um ponto em comum, então, eles têm pelo menos uma reta em comum.

Considerando dois planos no espaço, temos as seguintes posições relativas.

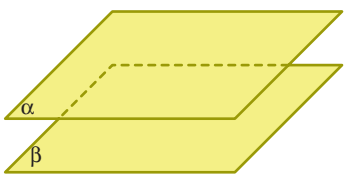
Coincidentes

Se dois planos α e β correspondem ao mesmo conjunto de pontos, dizemos que eles são coincidentes. Indicamos por $\alpha = \beta$.



Paralelos

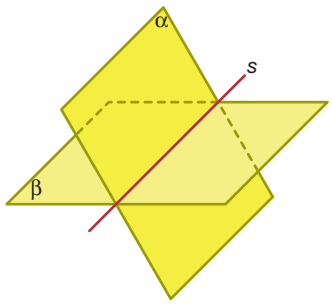
Dois planos quaisquer α e β são paralelos se, e somente se, não tiverem pontos em comum. Indicamos por $\alpha // \beta$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Concorrentes ou secantes

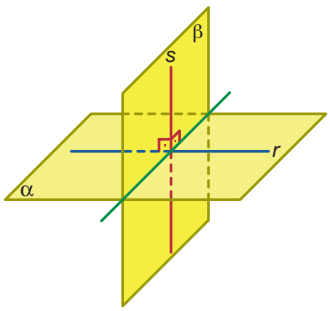
É possível demonstrar, usando postulados e resultados anteriores, que dois planos quaisquer α e β são concorrentes se, e somente se, tiverem apenas uma reta em comum.



Quando concorrentes, a interseção de dois planos distintos é uma reta.

Perpendiculares

Dois planos concorrentes α e β são perpendiculares se, e somente se, um deles contiver uma reta perpendicular ao outro. Indicamos por $\alpha \perp \beta$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

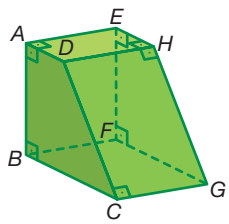
Se dois planos concorrentes não são perpendiculares, dizemos que eles são **oblíquos**.

Exercícios e problemas resolvidos

R4. Considere os planos que contêm as faces da figura geométrica espacial representada a seguir.

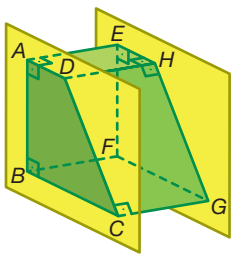
a) Determine os planos paralelos ao plano que contém a face *ABCD*.

b) Determine a posição relativa entre os planos que contêm as faces *ABFE* e *DCGH*.

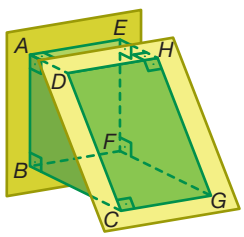


Resolução

a) Em relação ao plano que contém a face *ABCD*, o plano paralelo é aquele que contém a face *EFGH*.



b) Os planos que contêm as faces *ABFE* e *DCGH* são oblíquos.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

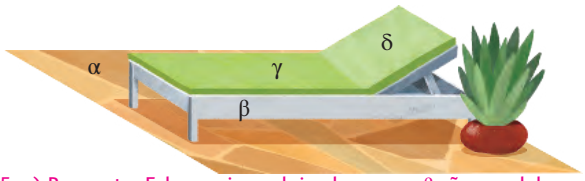
Exercícios e problemas

Professor, professora: Informe aos estudantes que a definição de poliedro será apresentada em capítulos seguintes.

Anote as respostas no caderno.

14. Na espreguiçadeira ilustrada a seguir, considere os planos α, β, γ e δ, que contêm o solo, uma das laterais o assento e o encosto, respectivamente, com $\beta \perp \alpha$ e $\beta \perp \gamma$. Quais desses planos são paralelos?

Resposta: α; γ.



LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

15. c) Resposta: Falsa, pois se dois planos α e β são paralelos, então as retas paralelas a α são paralelas ou contidas em β.

15. Determine se cada proposição a seguir é verdadeira ou falsa. Depois, justifique aquelas que classificar como falsas.

a) Dois planos secantes têm um único ponto em comum. Resposta: Falsa, pois dois planos secantes têm uma reta em comum, ou seja, infinitos pontos em comum.

b) Dois planos perpendiculares são secantes. Resposta: Verdadeira.

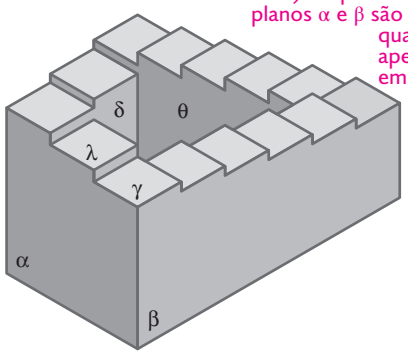
c) Se dois planos α e β são paralelos, então todas as retas paralelas a α são secantes a β.

d) Se uma reta está contida em dois planos não coincidentes, então estes são concorrentes. Resposta: Verdadeira.

e) Se os planos α e β são concorrentes, então podemos concluir que $\alpha = \beta$.

16. O holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972), mais conhecido como M. C. Escher, foi um famoso artista gráfico reconhecido mundialmente. Sua criatividade também o levou a "brincar" com a perspectiva e a ilusão de óptica, misturando esses elementos à Arquitetura, de maneira a desenhar, no plano, construções que seriam impossíveis no espaço, como é o caso da obra **Escada acima e escada abaixo**, na qual nos deparamos com uma escada que tanto pode subir quanto descer, mas que não chega a lugar algum. A imagem a seguir representa um modelo de escada semelhante ao usado por Escher, em que os degraus são paralelos.

15. e) Resposta: Falsa, pois os planos α e β são concorrentes quando têm apenas uma reta em comum.



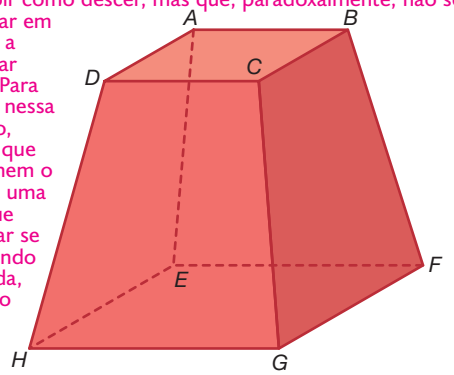
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Em relação aos planos que contêm as superfícies indicadas, qual é a posição relativa entre:

- α e β? Resposta: Concorrentes.
- α e δ? Resposta: Concorrentes.
- β e θ? Resposta: Concorrentes.

17. Considere apenas os planos que contêm as faces do poliedro.

Professor, professora: Verifique se os estudantes percebem que, na escada retratada na tarefa **16**, pode-se tanto subir como descer, mas que, paradoxalmente, não se chega a algum lugar em cima nem a algum lugar embaixo. Para auxiliá-los nessa percepção, peça-lhes que acompanhem o trajeto de uma pessoa que possa estar se locomovendo pela escada, verificando que ela sempre sobe um degrau, mas que, depois de uma volta, retorna ao mesmo ponto de partida.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Dica

Nesse poliedro, as faces laterais são determinadas por trapézios congruentes, e as bases, por quadrados.

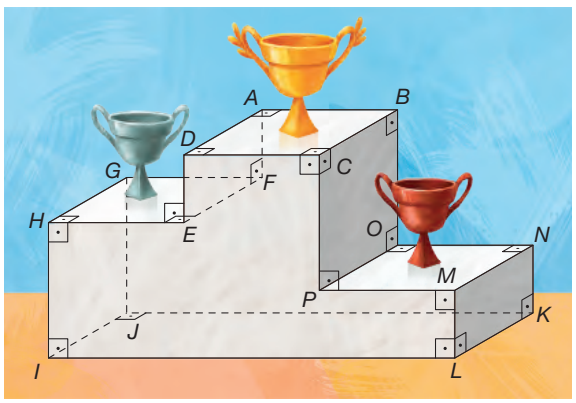
a) O plano que contém a face *ABCD* é concorrente ao plano que contém a face *ABFE*? Por quê? Resposta: Sim, pois eles têm apenas a reta $\overleftrightarrow{AB}$ em comum.

b) Há algum plano perpendicular àquele que contém a face *CDHG*? Resposta: Não.

c) Sabendo que os planos que contêm as faces *ABCD* e *EFGH* são paralelos, determine quais dos planos são secantes a todos os outros.

Resposta: Os planos que contêm as faces *ABFE*, *BCGF*, *CDHG* e *ADHE*.

18. Considerando os planos e as retas que contêm, respectivamente, as faces e as arestas de um modelo de pódio, resolva as questões.



LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

18. a) Resposta: Os planos que contêm as faces *IJKL*, *MNOP* e *ABCD*.

a) Determine os planos que são paralelos ao plano que contém a face *EFGH*.

b) Em relação ao plano que contém a face *CDEHILMP*:

- quantos planos são concorrentes a ele? Resposta: 8 planos.
- qual plano é paralelo a ele? Resposta: O plano que contém a face *ABONKJGF*.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

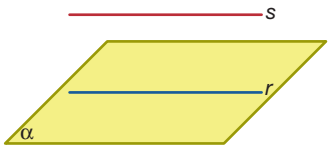
Propriedades de paralelismo e perpendicularismo

Neste tópico, estudaremos algumas propriedades relacionadas a paralelismo e perpendicularismo no espaço. Tais propriedades são teoremas que podem ser demonstrados; porém, nesta obra, apenas os enunciaremos.

Em relação ao paralelismo no espaço, destacamos as seguintes propriedades.

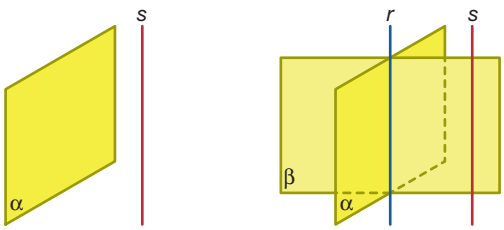
Propriedade 1

Uma reta *s* não contida em um plano α é paralela a esse plano se for paralela a uma reta *r* contida em α.



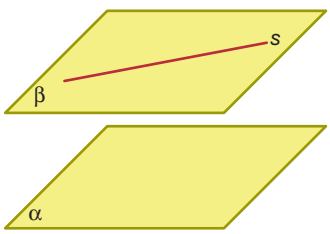
Propriedade 2

Uma reta *s* paralela a um plano α é paralela a pelo menos uma reta *r* desse plano. Sejam α e β planos concorrentes.



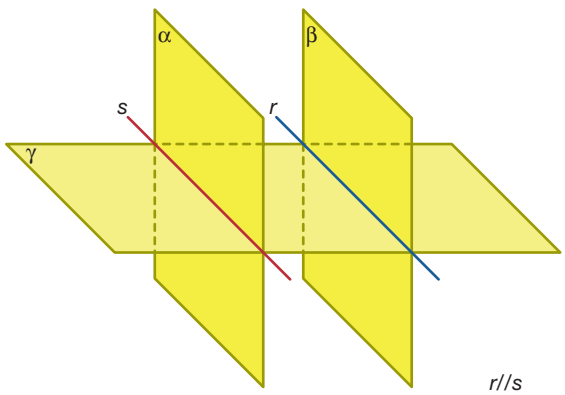
Propriedade 3

Se α e β são planos paralelos, toda reta *s* contida em um deles será paralela ao outro.



Propriedade 4

Sejam α e β planos paralelos e γ um plano secante a α e β. As interseções de γ com α e β são retas paralelas.



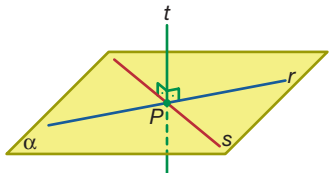
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Em relação ao perpendicularismo no espaço, destacamos as seguintes propriedades.

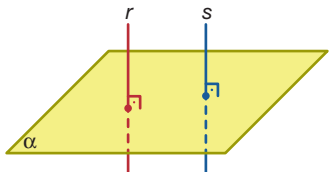
Propriedade 1

Sejam r e s retas contidas no plano α e concorrentes em um ponto P. Para que uma reta t seja perpendicular a α em P, é necessário e suficiente que ela seja perpendicular a r e s.



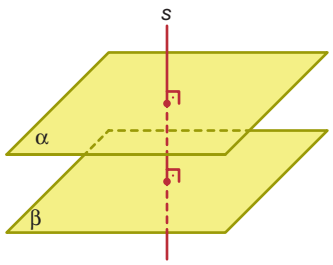
Propriedade 2

Se s é uma reta perpendicular a um plano α, então qualquer reta r, paralela a s, é perpendicular a α.



Propriedade 3

Se α e β são planos paralelos, toda reta s perpendicular a um deles será perpendicular ao outro.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas resolvidos

R5. Classifique em verdadeiro ou falso cada item a seguir, justificando cada caso.

a) Se uma reta r é paralela a um plano α, então r é paralela a qualquer reta de α.

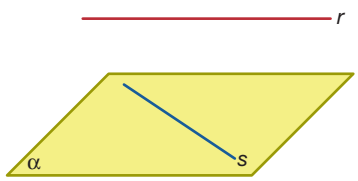
b) Por uma reta r, perpendicular a um plano α, passam infinitos planos perpendiculares a α.

c) Se dois planos α e β são paralelos a uma reta r, então α e β são paralelos entre si.

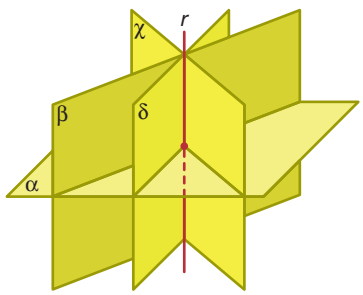
d) Se dois planos α e β são secantes, então toda reta de um desses planos é secante ao outro.

Resolução

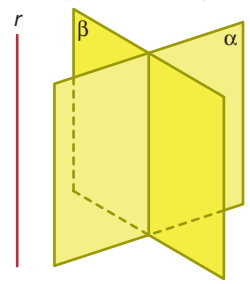
a) Falso, pois existem retas em α que são reversas a r.



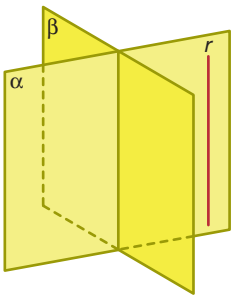
b) Verdadeiro, pois se uma reta r é perpendicular a um plano α, então qualquer plano que contenha r será perpendicular a α.



c) Falso, pois os planos α e β podem ser secantes.



d) Falso, pois existem retas de α, por exemplo, que são paralelas a β.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolvendo por etapas

Considere três retas r, s e t distintas, tais que $r \perp t$ e $s \perp t$. Em relação a essas retas, classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas.

I. A reta r pode ser paralela à reta s.

II. A reta r pode ser concorrente às retas s e t.

III. A reta r pode ser reversa em relação às retas s e t.

IV. A reta r pode ser perpendicular ao plano determinado por s e t.

A. Compreendendo o problema

1. O que se pede no problema?

Analisar a possibilidade de: r e s serem paralelas; r ser concorrente às retas s e t; r ser reversa às retas s e t; e r ser perpendicular ao plano determinado por s e t.

2. Quais são os dados apresentados no problema?

As retas r e t, assim como s e t, são perpendiculares.

B. Organizando as ideias e elaborando um plano

1. Registrando um possível plano.

Inicialmente, construímos um paralelepípedo reto retângulo. Em seguida, para analisar cada uma das afirmações, traçamos, sobre algumas das arestas desse poliedro, as retas r, s e t, de maneira que elas satisfaçam as condições impostas (isto é, $r \perp t$ e $s \perp t$).

2. Escolhendo as notações.

A, B, C, D, E, F, G e H: vértices do paralelepípedo reto retângulo.

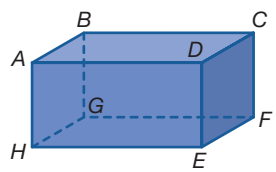
α: plano que contém os vértices A, B, G e H do paralelepípedo.

C. Executando o plano

Passo 1

Primeiro, construímos um paralelepípedo reto retângulo de vértices A, B, C, D, E, F, G e H.

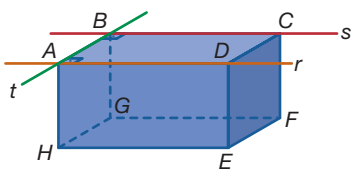
Em seguida, analisaremos cada uma das afirmações.



Passo 2

I. A reta *r* pode ser paralela à reta *s*.

Partindo das arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$, traçamos as retas r, s e t, respectivamente.

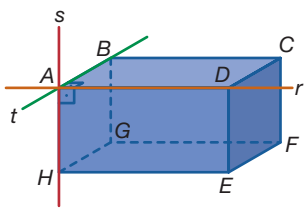


Podemos verificar, nesse caso, que $r \perp t$ e $s \perp t$, como indicado no enunciado. Além disso, nesse caso, $r // s$. Logo, a afirmação **I** é verdadeira, ou seja, dadas as retas r, s e t distintas, tais que $r \perp t$ e $s \perp t$, é possível que $r // s$.

Passo 3

II. A reta *r* pode ser concorrente às retas *s* e *t*.

A partir das arestas $\overline{AD}$, $\overline{AH}$ e $\overline{AB}$, traçamos as retas r, s e t, respectivamente.



Como indicado no enunciado, verificamos que $r \perp t$ e $s \perp t$.

Além disso, nesse caso, A pertence às retas r, s e t. Logo, a afirmação **II** é verdadeira, ou seja, dadas as retas r, s e t distintas, tais que $r \perp t$ e $s \perp t$, é possível que r seja concorrente às retas s e t.

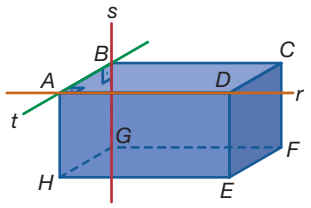
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Passo 4

III. A reta *r* pode ser reversa às retas *s* e *t*.

Como as retas *r* e *t* são perpendiculares, então elas são concorrentes e, consequentemente, coplanares. Portanto, não é possível que as retas *r* e *t* sejam reversas.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Na imagem, as retas *r*, *s* e *t* foram traçadas partindo das arestas $\overline{AD}$, $\overline{BG}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Nesse exemplo, $r \perp t$ (consequentemente, não são reversas) e *r* e *s* são retas reversas.

Portanto, a afirmação **III** é falsa, ou seja, dadas as retas *r*, *s* e *t* distintas, tais que $r \perp t$ e $s \perp t$, é impossível que *r* seja reversa às retas *s* e *t*.

Passo 5

IV. A reta *r* pode ser perpendicular ao plano determinado por *s* e *t*.

Para verificar a veracidade dessa afirmação, continuaremos a analisar a imagem apresentada no **passo 4**. Considere $A \in t$, $G \in s$ e o ponto *B*, interseção entre as retas *s* e *t*. Assim, pelo **postulado 5**, o plano determinado pelas retas *s* e *t* é o plano α.

Seja a reta *u* que contém a aresta $\overline{AH}$ do paralelepípedo reto retângulo. Desse modo, $r \perp t$ e $r \perp u$, e, consequentemente, a reta *r* é perpendicular ao plano que contém a face *ABGH*. Logo, a afirmação **IV** é verdadeira, ou seja, dadas as retas *r*, *s* e *t* distintas, tais que $r \perp t$ e $s \perp t$, é possível que *r* seja perpendicular ao plano determinado por *s* e *t*.

Portanto, apenas as afirmações **I**, **II** e **IV** são verdadeiras.

Dica

Verifique se é possível aplicar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de alguns problemas semelhantes propostos na seção **Exercícios e problemas** desse mesmo tópico.

Agora é você quem resolve!

1. Leia o problema.

Aroldo escreveu a seguinte frase em seu caderno. Respostas no final do **Livro do Estudante**.

> Considere as retas *r*, *s* e *t* distintas. Se *r* e *s* são perpendiculares e *r* e *t* são paralelas, então é possível que *s* e *t* sejam ortogonais.

LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

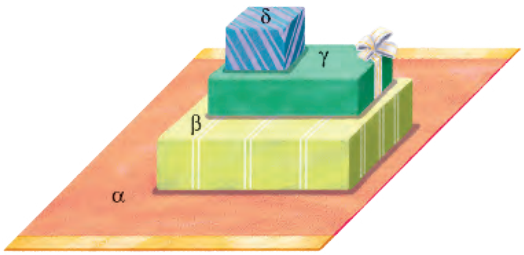
2. É possível resolver o problema usando, com algumas adequações, o plano apresentado nesta seção? Qual é a resposta a esse problema?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

22. a) Resposta: Espera-se que os estudantes respondam que o plano θ e a reta *r* são perpendiculares, pois α e θ são sempre paralelos.

19. A figura a seguir ilustra três caixas com formato de paralelepípedo reto retângulo empilhadas sobre um tapete (contido no plano α), sendo β, γ e δ os planos que contêm as bases superiores dessas caixas.



LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Com relação à figura, classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação, justificando aquelas que julgar falsas.

a) Toda reta contida em δ é paralela aos demais planos. Resposta: Verdadeira.

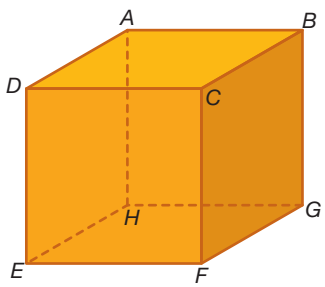
b) Uma reta não contida em α é paralela a esse plano se, e somente se, for paralela a γ. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

c) Qualquer plano paralelo a β, não coincidente a α, γ e δ, é paralelo a esses planos. Resposta: Verdadeira.

d) Todo plano paralelo a γ também é paralelo a δ. Resposta: Falsa, pois pode haver um plano coincidente a δ.

e) Todo plano perpendicular a α também é perpendicular aos demais planos. Resposta: Verdadeira.

20. No cubo a seguir, considere as retas que contêm as arestas e os planos que contêm as faces.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Quais planos são:

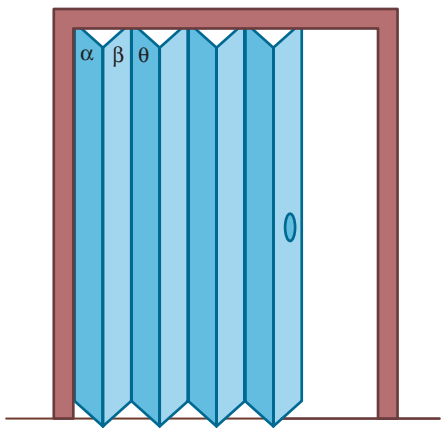
- perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$? Resposta: Os planos que contêm as faces *BCFG* e *ADEH*.
- perpendiculares àquele que contém a face *EFGH*? Resposta: Os planos que contêm as faces *CDEF*, *BCFG*, *ABGH* e *ADEH*.
- paralelos àquele que contém a face *BCFG*? Resposta: O plano que contém a face *ADEH*.

b) A reta $\overleftrightarrow{DC}$ é reversa à reta $\overleftrightarrow{EH}$? Por quê? Resposta no final do **Livro do Estudante**.

c) A reta $\overleftrightarrow{CF}$ está contida em quais planos perpendiculares àquele que contém a face *ABCD*? Resposta: Nos planos que contêm as faces *CDEF* e *BCFG*.

21. Se a reta *r* é oblíqua a um plano ρ, determine quantos planos contêm a reta *r* e são perpendiculares a ρ. Resposta: Um plano.

22. Uma opção para quem deseja instalar uma porta em locais com pouco espaço é a chamada "porta sanfonada". No esquema a seguir está representada uma delas, sendo destacados alguns planos que contêm três das faixas móveis.



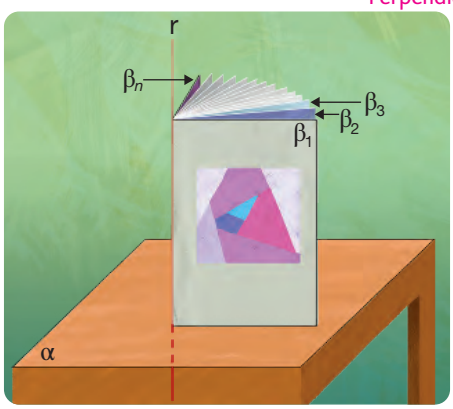
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qualquer que seja a abertura da porta, ao traçar uma reta *r* perpendicular ao plano α, qual será a posição do plano θ em relação a *r*? Justifique sua resposta.

b) Qual é a posição relativa entre o plano do solo e os planos indicados na porta sanfonada? Essa posição relativa muda de acordo com a abertura da porta? Resposta: Perpendicular. Não.

c) Considere que, quando a porta está totalmente aberta, os planos α, β e θ são paralelos. Nessa posição, se uma reta *r* for perpendicular em relação ao plano α, qual será a posição relativa de *r* em relação aos demais planos? Resposta: Perpendicular.

23. A imagem representa um livro na posição vertical sobre uma mesa, em que α é o plano que contém o tampo da mesa (na horizontal) e os planos β_1, β_2, β_3, …, β_n contêm a capa e cada uma das páginas do livro (totalmente esticadas). Se uma reta *r* está contida em β_1, β_2, β_3, …, β_n, qual é a posição relativa de *r* em relação a α? Resposta: Perpendicular.



LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

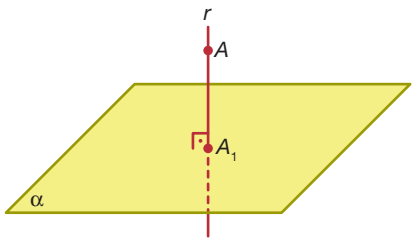
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Projeções ortogonais sobre um plano

Projeção de um ponto sobre um plano

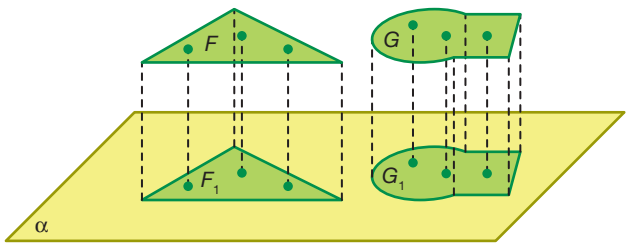
A projeção ortogonal de um ponto A sobre um plano α é dada pelo ponto A_1, correspondente à interseção da reta r e α, com r perpendicular a α e passando por A.

OBJETO DIGITAL
Mapa clicável:
Mapa altimétrico



Projeção de uma figura sobre um plano

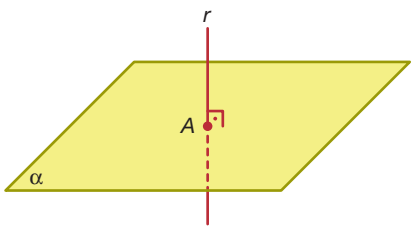
A projeção ortogonal de uma figura sobre um plano α é dada pela projeção ortogonal de todos os pontos dessa figura.



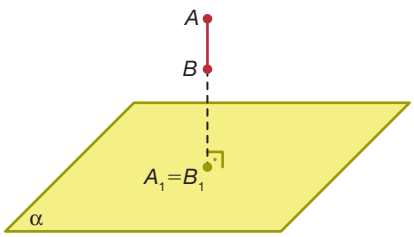
As figuras F_1 e G_1 são as projeções ortogonais, respectivamente, das figuras F e G sobre o plano α.

Projeção de uma reta ou um segmento de reta sobre um plano

Caso a reta r ou o segmento $\overline{AB}$ seja perpendicular em relação ao plano α, a projeção ortogonal tanto da reta quanto do segmento em α será um ponto.

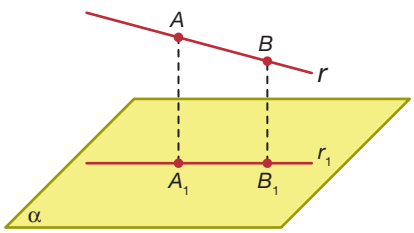


Projeção ortogonal da reta r perpendicular ao plano α.

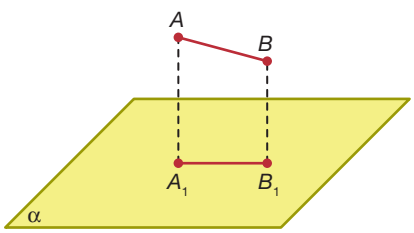


Projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ perpendicular ao plano α.

Caso a reta r ou o segmento $\overline{AB}$ sejam não perpendiculares ao plano α, a projeção ortogonal da reta será outra reta, e a do segmento de reta, outro segmento.



Projeção ortogonal da reta r não perpendicular ao plano α.



Projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ não perpendicular ao plano α.

Observação

A fim de simplificar a escrita, não distinguiremos grandezas de suas respectivas medidas. Desse modo, utilizaremos expressões do tipo "comprimento de $\overline{AB}$" quando, na realidade, queremos nos referir à "medida do comprimento do segmento $\overline{AB}$".

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

24. a) Resposta: Falsa, pois a projeção ortogonal pode ser uma única reta, por exemplo, se uma das retas for perpendicular ao plano de projeção.

Anote as respostas no caderno.

24. Classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação a seguir, justificando aquelas que julgar falsas.

a) A projeção ortogonal de duas retas concorrentes sobre um plano sempre será dada por duas retas concorrentes.

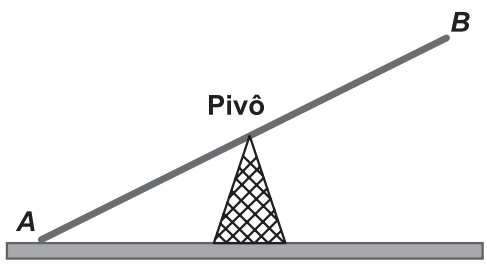
b) Se um segmento de reta $\overline{AB}$ é perpendicular a um plano α, então a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre um plano β, com $\alpha \perp \beta$ e $\overline{AB}$ não contido em β, será um segmento paralelo e de mesmo comprimento de $\overline{AB}$.
Resposta: Verdadeira.

c) Sabendo que as projeções ortogonais de duas retas r e s sobre um plano são dadas por duas retas paralelas, necessariamente temos $r // s$.
Resposta: Falsa, pois r e s podem ser retas reversas.

d) A projeção ortogonal de um hexágono sobre um plano sempre será dada por um hexágono.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

e) A projeção ortogonal, sobre um plano, de um segmento de reta $\overline{AB}$ e de um ponto não pertencente a $\overline{AB}$ pode ser dada por dois pontos distintos. Resposta: Verdadeira.

25. (Enem, 2013) Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra. Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos A e B são equidistantes do pivô:



A projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:
Resposta: Alternativa **b**.

a)


b)


c)


d)

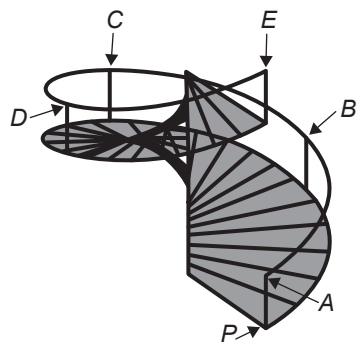

e)


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA/ENEM 2013

26. Considere um triângulo contido no plano φ que será projetado sobre os planos λ, δ e α, não coincidentes. Qual será a projeção do triângulo sobre:

- λ, sabendo que $\lambda // \varphi$? Resposta: Triângulo.
- δ, sabendo que $\delta \perp \lambda$? Resposta: Segmento de reta.
- α, sabendo que $\alpha // \lambda$? Resposta: Triângulo.

27. (Enem, 2014) O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos A, B, C, D e E sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos P, A e E estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto A até o ponto D.



A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:
Resposta: Alternativa **C**.

A.


D.


B.


E.


C.


FOTOS: ENEM 2014

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

28. A expressão gráfica usa desenhos técnicos e está presente em diversas áreas, como Medicina, Arte, Engenharia e Arquitetura, além de sua aplicação nas indústrias automobilística, moveleira e cosmética.

Na Engenharia, por exemplo, é usada na constituição da base para o desenvolvimento de projetos e, consequentemente, na fabricação dos mais variados produtos. Para transmitir informações precisas aos fabricantes acerca do objeto, da máquina ou da estrutura que se deseja construir, é necessário que o engenheiro prepare descrições completas, principalmente por meio de desenhos, indicando seus formatos e suas dimensões. A linguagem verbal serve de complemento, sob a forma de especificações no projeto.

Por descrever a forma exata de um objeto, a projeção ortogonal por meio de desenhos técnicos é empregada na maioria dos trabalhos de Engenharia. Alguns objetos podem ser descritos totalmente pelos conjuntos das vistas (superior, frontal, lateral direita, lateral esquerda, de baixo e de trás) sobre esses planos.

Na elaboração de alguns projetos, não é necessário desenhar as seis vistas, pois é possível descrever o objeto com exatidão pela combinação de algumas delas. A combinação das vistas frontal, lateral esquerda e superior pode ser suficiente para representar a forma do objeto considerado.

Analise a seguir uma combinação das vistas frontal, lateral esquerda e superior da figura **A**.

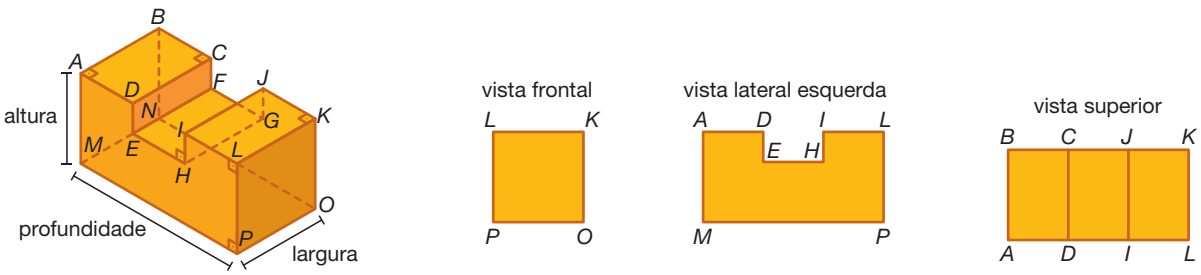


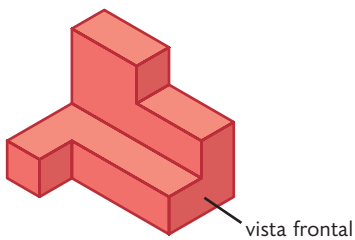
figura **A**

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

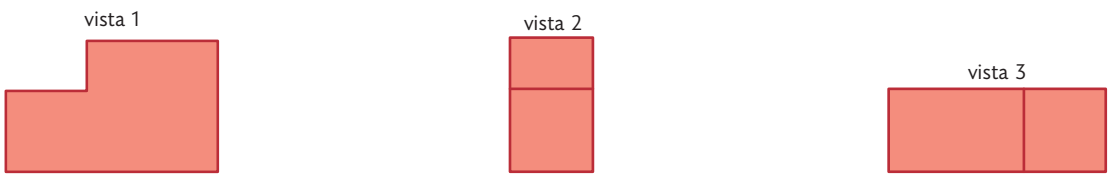
a) Conforme os planos que contêm as faces e as retas que contêm as arestas da figura **A**, determine:

- os planos paralelos àquele que contém a face *EFGH*.
  Resposta: Os planos que contêm as faces *ABCD*, *IJKL* e *MNOP*.
- os planos perpendiculares àquele que contém a face *LKOP*.
  Resposta: Os planos que contêm as faces *ABCD*, *EFGH*, *IJKL*, *MNOP*, *BCFGJKON* e *ADEHILPM*.

b) Represente a vista superior, a vista frontal e a vista lateral esquerda do objeto apresentado na imagem em perspectiva. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

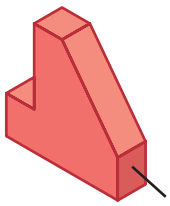


c) Represente em perspectiva o objeto cujas diferentes vistas dele são dadas por:
Resposta no final do **Livro do Estudante**.



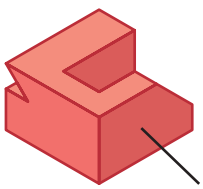
d) Quais vistas podem ser usadas para melhor representar cada objeto a seguir?

I.



Sugestão de resposta: Vistas superior e lateral esquerda ou direita.

II.



Sugestão de resposta: Vistas lateral direita, esquerda, frontal e superior.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

O que faz um arquiteto?

1. Resposta: Arquitetos podem desenvolver projetos em diversos segmentos, desde os industriais até os hospitalares. Também podem trabalhar com reformas, revitalizações e renovações de estruturas já existentes, contribuindo para a modernização e a preservação histórica desses lugares. Resposta pessoal.

Entre os profissionais que aplicam conhecimentos relacionados à Geometria espacial de posição para realizar seus trabalhos estão os arquitetos. Assim como os engenheiros, os arquitetos também utilizam a expressão gráfica para criar desenhos técnicos, formados por projeções ortogonais e modelos tridimensionais de projetos. Um exemplo é a planta baixa, que é um desenho técnico em escala que representa a vista superior de uma construção, considerando um corte horizontal e a retirada da parte de cima dela.

Professor, professora: Incentive os estudantes a comentar se eles se identificam com a profissão de arquiteto e, se a resposta for positiva, peça-lhes que contem aos colegas qual é o aspecto envolvendo esse tipo de trabalho que mais chamou a atenção deles.

Além de planejar e criar ambientes internos e externos, considerando critérios como estética, funcionalidade, medidas, sustentabilidade, eficiência energética, entre outros, os arquitetos trabalham com reformas, revitalizações e renovações de estruturas já existentes, contribuindo tanto para a preservação histórica do espaço quanto para modernizações, inclusive na escolha dos materiais de acabamento e dos elementos decorativos.



KRAKENIMAGES/SHUTTERSTOCK

Arquiteta trabalhando no desenho técnico de um projeto.

Observação

Para se tornar um arquiteto, é necessário cursar uma graduação em Arquitetura em uma instituição de Ensino Superior que seja reconhecida pelo Ministério da Educação (MEC) e se registrar no Conselho de Arquitetura e Urbanismo do Brasil (CAU/BR).

O crescimento populacional nas cidades e as demandas por estruturas e ambientes funcionais e sustentáveis faz da arquitetura uma importante profissão.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. De acordo com as informações apresentadas no texto, explique os tipos de projeto que um profissional da arquitetura pode desenvolver. Você se identifica com alguma dessas tarefas? Converse com os colegas sobre isso.

2. Faça uma pesquisa na internet sobre a influência africana da sociedade Kassena, localizada na região norte de Gana, na arquitetura, sobretudo a importância dela para a sociedade atual. Anote as informações que você considerar relevantes e compartilhe com os colegas e o professor na próxima aula.

2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes obtenham informações sobre a influência africana da sociedade Kassena na arquitetura com base na pesquisa que farão na internet. Eles podem comentar sobre a cultura local dessa sociedade para a preservação da memória africana expressando a história e a herança cultural, os materiais utilizados, a influência das cores e dos padrões, entre outros aspectos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Distâncias no espaço

Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos distintos A e B é o comprimento do segmento $\overline{AB}$ em uma dada unidade de medida de comprimento.

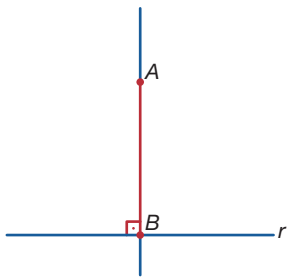


Observação

Se os pontos A e B forem coincidentes, a distância entre eles será nula.

Distância entre ponto e reta

Podemos obter a distância entre uma reta r e um ponto A, não pertencente a r, traçando uma reta perpendicular a r e passando por A, obtendo em r o ponto B. O comprimento AB é a distância entre a reta r e o ponto A.

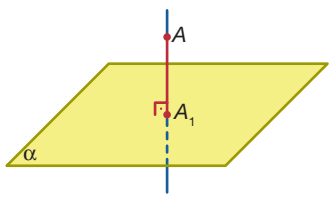


Observação

Se o ponto A pertencer à reta r, a distância entre eles será nula.

Distância entre ponto e plano

A distância entre um plano α e um ponto A, não pertencente a α, é o comprimento do segmento $\overline{AA_1}$, sendo A_1 a projeção ortogonal de A sobre α.

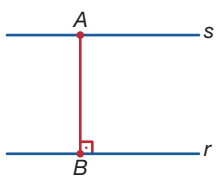


Observação

Se o ponto A pertencer ao plano α, a distância entre eles será nula.

Distância entre duas retas paralelas

A distância entre duas retas paralelas r e s é a distância entre um ponto A qualquer de uma delas à outra.



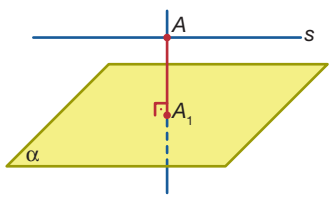
$r // s$

Observação

Se as retas r e s forem coincidentes, a distância entre elas será nula. Caso as retas sejam concorrentes, não definimos a distância entre elas.

Distância entre reta e plano paralelos

A distância entre um plano α e uma reta s, paralela a α, é a distância entre um ponto A qualquer de s a α.



$s // \alpha$

Observação

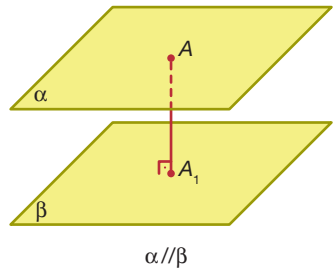
Se a reta s estiver contida no plano α, a distância entre eles será nula. Caso a reta seja concorrente ao plano, não definimos a distância entre eles.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Distância entre dois planos paralelos

A distância entre dois planos paralelos α e β é a distância entre um ponto A qualquer de um deles ao outro plano.



$\alpha // \beta$

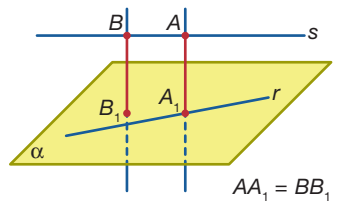
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Se α e β forem coincidentes, a distância entre eles será nula. Caso os planos sejam concorrentes, não definimos a distância entre eles.

Distância entre duas retas reversas

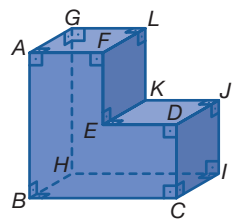
A distância entre duas retas reversas r e s é a distância entre um ponto qualquer de s ao plano α, paralelo à reta s, que contém r.



$AA_1 = BB_1$

Exercícios e problemas resolvidos

R6. Analise a figura geométrica apresentada.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com essa figura, determine os segmentos de reta cujas extremidades são vértices e cujos comprimentos representam a distância entre:

a) os pontos F e I.

b) o ponto A e a reta $\overleftrightarrow{BC}$.

c) o ponto H e o plano que contém a face $DCIJ$.

d) as retas $\overleftrightarrow{AG}$ e $\overleftrightarrow{EK}$.

e) a reta $\overleftrightarrow{ED}$ e o plano que contém a face $BCIH$.

f) os planos que contêm as faces $AFLG$ e $EDJK$.

Resolução

a) $\overline{FI}$ b) $\overline{AB}$ c) $\overline{HI}$ d) $\overline{AE}$ e $\overline{GK}$ e) $\overline{CD}$ f) $\overline{EF}$ e $\overline{KL}$

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

29. Classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação a seguir, justificando as que julgar falsas.

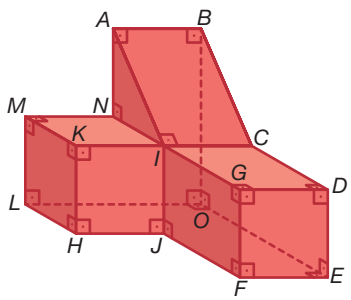
a) Não existe um ponto e uma reta cuja distância entre eles seja nula. Resposta: Falsa, pois se um ponto pertencer a uma reta, então a distância entre eles será nula.

b) A distância entre um plano α e um ponto P, não pertencente a α, corresponde a PP_1, em que P_1 é a projeção ortogonal de P sobre α. Resposta: Verdadeira.

c) Se $\overline{AA'}$ é um segmento de reta cujo comprimento corresponde à distância entre as retas reversas r e s ($A \in r$ e $A' \in s$), então $\overleftrightarrow{AA'} \perp s$. Resposta: Verdadeira.

d) Qualquer reta e ponto contidos em um mesmo plano têm distância nula. Resposta: Falsa, pois somente terão distância nula se o ponto pertencer à reta.

30. Considere a figura geométrica.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Determine o(s) segmento(s) de reta cujas extremidades sejam vértices da figura e a medida represente a distância entre:

a) o plano que contém a face $HKML$ e aquele que contém a face AIN. Resposta: $\overline{MN}$; $\overline{IK}$; $\overline{JH}$.

b) o plano que contém a face $DEFG$ e $\overleftrightarrow{LO}$. Resposta: $\overline{EO}$; $\overline{GN}$.

c) $\overleftrightarrow{AB}$ e o plano que contém a face $EFJHLO$. Resposta: $\overline{BO}$

d) $\overleftrightarrow{CK}$ e $\overleftrightarrow{LO}$. Resposta: $\overline{CO}$; $\overline{KL}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

31. Como estudamos anteriormente, o artista gráfico Maurits Cornelis Escher é conhecido por produzir obras que se apoiam em conceitos matemáticos, especialmente os da Geometria. Fascinado por paradoxos visuais, Escher criou nessas obras situações impossíveis, como em *Queda-d'água*, de 1961.

Nesse tipo de trabalho, um espectador desatento pode não perceber a situação impossível. Analisando cuidadosamente, porém, notamos a água passando continuamente pela calha, movimentando-se para baixo e afastando-se de quem observa a obra, ou, ainda, passando por um ponto mais alto e próximo do observador, o que mantém o curso de água contínuo, ou seja, há uma dupla interpretação.



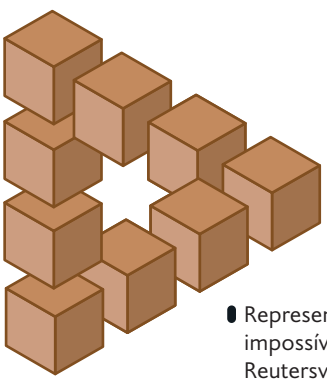
© 2024 THE M.C. ESCHER COMPANY-THE NETHERLANDS. TODOS OS DIREITOS RESERVADOS

ESCHER, Maurits Cornelis. *Queda-d'água*. Litografia, 38 cm x 30 cm. 1961.

Para isso, Escher utilizou a ideia de triângulos impossíveis, representada por Roger Penrose em 1958, embora existam versões anteriores deles, como a de Oscar Reutersvärd, de 1934. Podemos representar um triângulo impossível por meio de paralelepípedos que se sobrepõem perpendicularmente e que só têm consistência como desenho, pois as medidas dos ângulos internos desse suposto triângulo somam 270°. Isso justifica *Queda-d'água* ser possível apenas no plano bidimensional, ou seja, não é um trabalho em três dimensões.

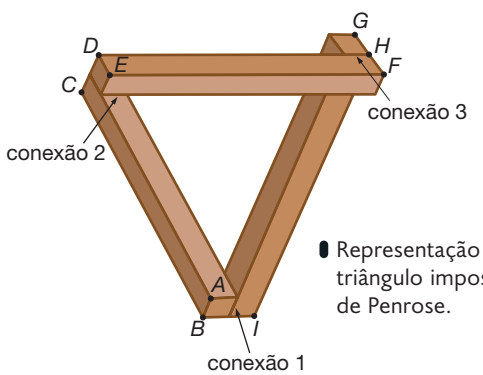
Fonte de pesquisa: ROONEY, Anne. *A história da matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M.Books do Brasil, 2012.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Representação do triângulo impossível de Oscar Reutersvärd.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Representação do triângulo impossível de Penrose.

a) Quantos triângulos impossíveis são sugeridos na obra *Queda-d'água*? Resposta: Três.

b) Considerando somente a conexão **1** como impossível e admitindo que os pontos A, B, C, D e E pertencem a um plano α, os pontos D, E e F pertencem a um plano β e os pontos G, H, F e I, a um plano δ, determine os planos:

- paralelos entre si. Resposta: α e δ.
- perpendiculares entre si. Resposta: α e β; β e δ.

c) Considerando as informações apresentadas no item **b**, quais segmentos de reta determinam a distância entre os planos α e δ? Resposta: $\overline{DH}$; $\overline{EF}$.

6. Resposta: Sim, pois, tomando os pontos *A* e *B* distintos de *P* e não colineares, pertencentes às retas *t* e *u*, respectivamente, pelo **postulado 5**, existe um plano que os contém.

Anote as respostas no caderno.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos Geometria espacial de posição. Agora, chegou a hora de refletir sobre seus conhecimentos! Como estratégia de estudo, sugerimos a você que faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

11. c) Resposta: Falsa. A distância entre uma reta *r* e um ponto *A*, não pertencente à reta, é determinada pelo comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$ perpendicular a essa reta, tal que *B* pertence a *r*.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os. Resposta pessoal. Orientações sobre essa questão no **Suplemento para o professor**.

2. Dos tópicos apresentados a seguir, em quais você teve dificuldades ou ficou com dúvidas? Reflita sobre os tópicos e, se necessário, retome o que foi estudado. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

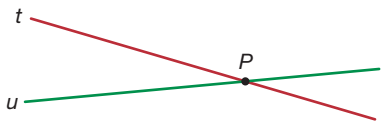
- Posições relativas entre duas retas.
- Propriedades de paralelismo e perpendicularismo.
- Posições relativas entre reta e plano.
- Projeções ortogonais sobre um plano.
- Posições relativas entre dois planos.
- Distâncias no espaço.

3. Qual é a diferença entre os axiomas e os teoremas? Resposta no final do **Livro do Estudante**.

4. O que determina que duas retas sejam classificadas como paralelas? Resposta: Duas retas quaisquer são paralelas se, e somente se, elas forem coplanares e não tiverem pontos em comum.

5. Duas retas coincidentes são paralelas? Justifique sua resposta. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

6. Considere duas retas *t* e *u* concorrentes.



KEITHY MOSTACHI/ ARQUIVO DA EDITORA

Podemos determinar um plano a partir de *t* e *u*? Justifique sua resposta.

7. Qual é a posição relativa entre uma reta *r* e um plano α, sabendo que essa reta:

a) não tem ponto em comum com esse plano? Resposta: Reta paralela ao plano.

b) tem um único ponto em comum com esse plano? Resposta: Reta concorrente ou secante ao plano.

8. O que garante que uma reta *r* é perpendicular a um plano α? Resposta: Para que uma reta *r* seja perpendicular ao plano α, é necessário e suficiente que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes contidas em α.

9. Considerando os planos α e β no espaço, indique quais afirmações a seguir são falsas. Resposta: Afirmações falsas: **b** e **c**.

a) Os planos α e β são paralelos se, e somente se, não tiverem pontos em comum.

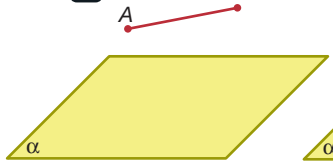
b) Os planos α e β são paralelos se, e somente se, tiverem pontos em comum.

c) Se os planos α e β não correspondem ao mesmo conjunto de pontos, dizemos que eles são coincidentes.

d) Se os planos α e β correspondem ao mesmo conjunto de pontos, dizemos que eles são coincidentes.

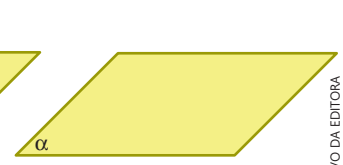
10. Em cada item, escreva qual é a projeção ortogonal das figuras sobre o plano. Depois, desenhe em seu caderno um esquema representando cada uma dessas projeções.

A.



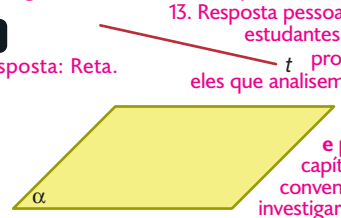
Resposta: Segmento de reta.

C.



Resposta: Ponto.

B.



Resposta: Reta.

ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

13. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

11. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa. Depois, justifique as sentenças falsas.

a) A distância entre dois pontos coincidentes é igual a 1. Resposta: Falsa. Dois pontos coincidentes equivalem ao mesmo ponto, com distância nula entre si.

b) A distância entre um ponto e um plano é igual ao comprimento do segmento de reta determinado por esse ponto e a projeção ortogonal dele no plano. Resposta: Verdadeira.

c) A distância entre um ponto e uma reta é determinada pelo comprimento de um segmento oblíquo à reta.

12. Cite pelo menos uma situação do cotidiano em que utilizamos Geometria espacial de posição.

13. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo esse assunto. Depois, troque-o com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida está correta.

14. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo e dê exemplos. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

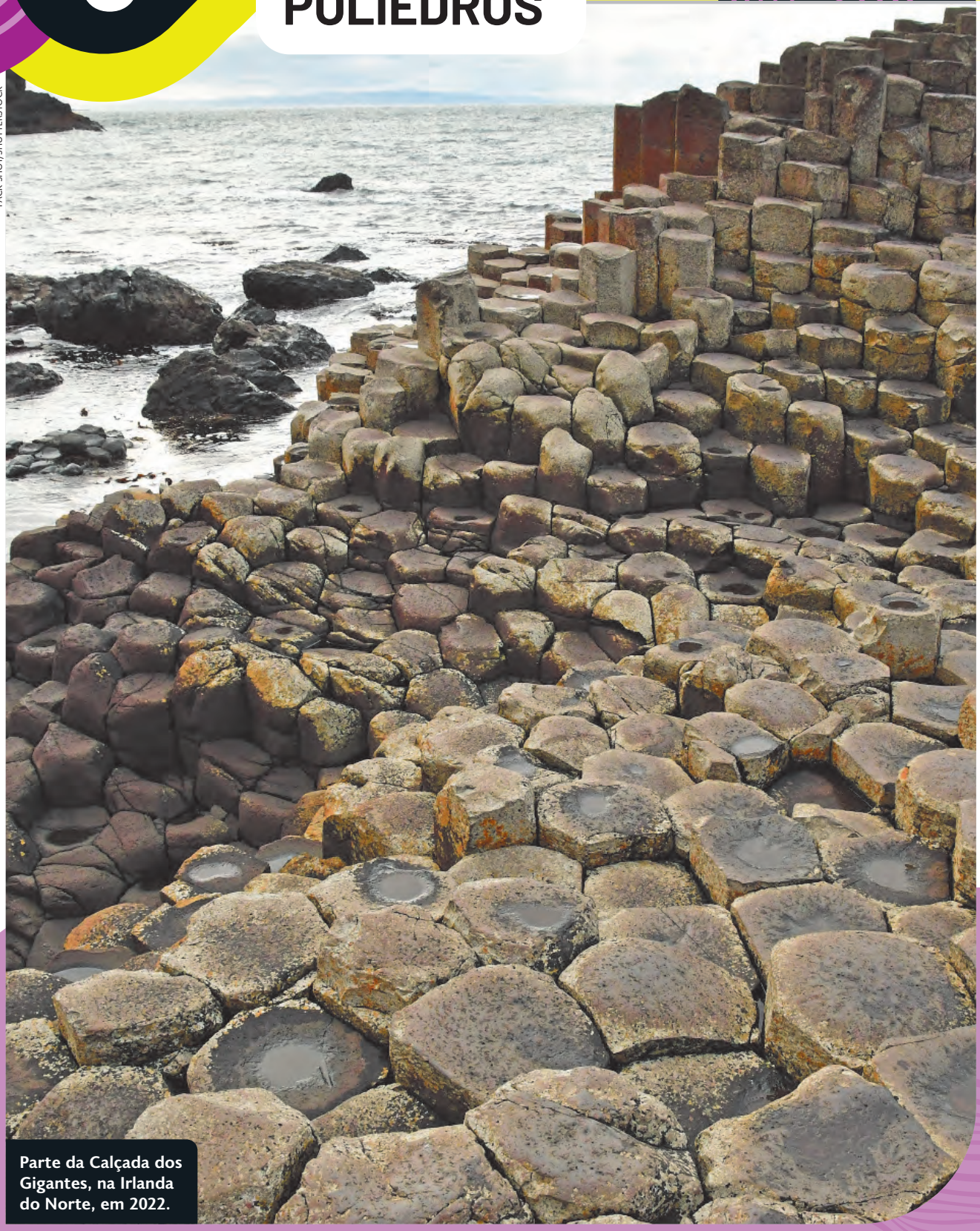
12. Resposta pessoal. Sugestão de resposta: Na percepção espacial, que diz respeito à habilidade de orientar-se no espaço, o que contribui para o desenvolvimento do indivíduo em várias situações do cotidiano.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

5

POLIEDROS



PACK-SHOT/SHUTTERSTOCK

Parte da Calçada dos Gigantes, na Irlanda do Norte, em 2022.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes concluam que o estudo das figuras geométricas espaciais nos leva a compreender conceitos básicos de geometria espacial, como área, volume e propriedades das figuras tridimensionais. Além disso, o estudo das figuras geométricas espaciais possibilita o desenvolvimento de habilidades de visualização espacial e raciocínio geométrico, que são essenciais em diversas áreas da Matemática e em aplicações práticas da vida cotidiana, como arquitetura, *design* e engenharia.

Entre os muitos fenômenos que mesclam natureza e Matemática, a Calçada dos Gigantes é um dos exemplos mais populares. Localizada ao norte da Irlanda do Norte, essa estrutura é composta de aproximadamente 40 000 colunas de basalto que, em sua maioria, se parecem com prismas de base hexagonal de até 25 m de altura. Apesar de muitas dessas colunas terem formato hexagonal na base, são notados também formatos que lembram polígonos de 4, 5, 7 e 8 lados.

A área que compõe a Calçada dos Gigantes e sua costa foi a primeira da Irlanda do Norte a se tornar um patrimônio cultural da Unesco, sendo um dos pontos turísticos mais populares do país, tanto pela beleza natural como pelo fato de ser um local onde a mitologia e a ciência se encontram.

Diz a lenda que a calçada foi construída pelo gigante norte-irlandês Finn McCool para lutar contra o gigante escocês Benandonner do outro lado do mar. A calçada ligava a costa da Irlanda do Norte à costa da Escócia, usando as colunas de basalto como pavimento. Antes que houvesse o confronto, Finn enganou Benandonner fazendo-o acreditar que era muito maior do que realmente era. Sentindo-se ameaçado, Benandonner fugiu correndo de volta à Escócia, destruindo o caminho que ligava os dois países.

A origem da Calçada dos Gigantes é explicada pela ciência. Estudos geológicos apontam que essa estrutura foi formada há mais de 60 milhões de anos, produto de constantes erupções originadas de uma fissura submersa. O resfriamento da lava fez com que o basalto se contraísse lateralmente, criando um padrão quase regular de fissuras e formando as colunas, que se assemelham a prismas.

Neste capítulo, você vai estudar:

- poliedros;
- relação de Euler;
- poliedros de Platão;
- poliedros regulares;
- prismas;
- área da superfície de um prisma;
- volume do paralelepípedo reto retângulo;
- princípio de Cavalieri;
- volume de um prisma qualquer;
- pirâmides;
- área da superfície de uma pirâmide;
- volume de uma pirâmide;
- volume de uma pirâmide triangular;
- volume de uma pirâmide qualquer;
- tronco de pirâmide;
- área da superfície de um tronco de pirâmide;
- volume de um tronco de pirâmide.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes mencionem figuras como cubo, cilindro, pirâmide e cone.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Junte-se a um colega e pesquisem outras estruturas naturais em que seja possível verificar padrões semelhantes aos da Calçada dos Gigantes. Depois, compartilhe com os colegas e o professor as informações obtidas na pesquisa. Resposta pessoal. Além da Calçada dos Gigantes, os estudantes podem explorar estruturas naturais como as colunas basálticas da Islândia.

2. Quais figuras geométricas espaciais você conhece?

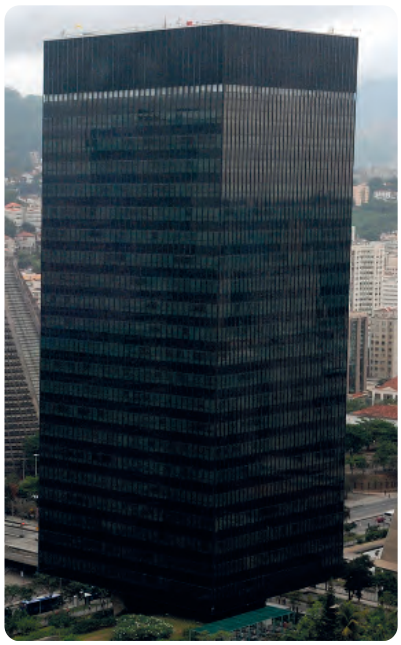
3. Em sua opinião, qual é a importância de estudarmos algumas características das figuras geométricas espaciais?

Os poliedros

Professor, professora: Verifique se os estudantes citam outras obras arquitetônicas que se assemelham a poliedros, como o Museu do Louvre na França e a Sede da TV Central da China.

Ao elaborar um projeto, um arquiteto fica atento a vários elementos, entre eles o formato externo que a edificação terá após o término da obra. Essas construções podem ter as mais variadas formas, e algumas delas apresentam características próprias. Algumas obras têm linhas mais retas, como as apresentadas a seguir.

A.PAES/SHUTTERSTOCK



Prédio do Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES), cidade do Rio de Janeiro, em 2017.

KIRBY LEE/ALAMY/FOTOARENA



Walter Pyramid, Califórnia, EUA, em 2021.

ADVTP/SHUTTERSTOCK



Museu de Arte de São Paulo (MASP), cidade de São Paulo, em 2023.

Imagens sem proporção entre si.

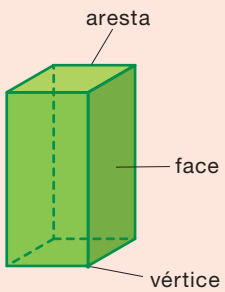
As obras que têm linhas mais retas têm formas que se parecem com poliedros. Analise a seguir alguns poliedros.



Um **poliedro** é uma reunião finita de regiões poligonais chamadas **faces**, em que:

- a interseção de duas faces do poliedro é um lado comum, um vértice comum ou é vazia;
- cada lado de uma dessas regiões é também lado de uma, e apenas uma, outra região.

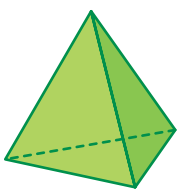
Os lados e os vértices dessas regiões chamam-se, respectivamente, **arestas** e **vértices** do poliedro.



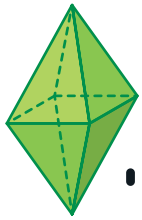
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplos



4 faces, 6 arestas e 4 vértices



8 faces, 12 arestas e 6 vértices

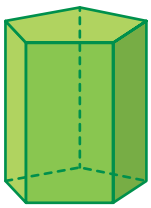
Observação

Ao reunirmos um polígono e todos os seus pontos interiores, obtemos uma região poligonal. Neste livro, utilizaremos a palavra "polígono" para nos referirmos tanto aos polígonos quanto às regiões poligonais.

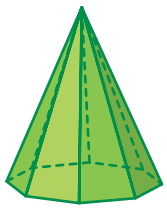
Podemos classificar um poliedro de acordo com a quantidade de suas faces.

Classificação de alguns poliedros

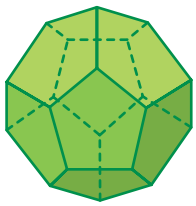
Quantidade de faces	Classificação
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Eneaedro
10	Decaedro
11	Undecaedro
12	Dodecaedro
⋮	⋮
20	Icosaedro



heptaedro



eneaedro



dodecaedro



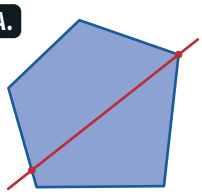
icosaedro

Poliedros convexos e poliedros não convexos

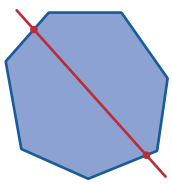
Antes de definirmos **poliedros convexos** e **poliedros não convexos**, é importante relembrar o que são polígonos convexos e polígonos não convexos.

Dizemos que um polígono é convexo quando toda reta que passa em seu interior corta seu contorno em, no máximo, dois pontos. Os polígonos **A** e **B** a seguir são convexos e os polígonos **C** e **D** são não convexos.

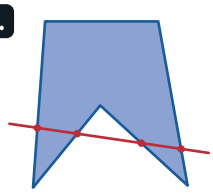
A.



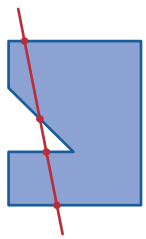
B.



C.



D.

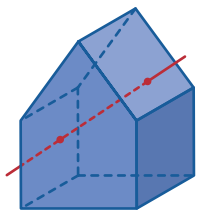


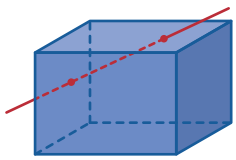
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

No caso dos poliedros, dizemos que são convexos se qualquer reta não paralela a nenhuma de suas faces o corta em, no máximo, dois pontos.

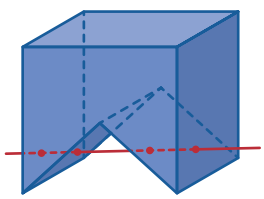
Exemplos

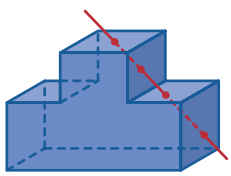
Poliedros convexos





Poliedros não convexos





ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Scratch

Em diversas situações, é interessante programar o computador para que ele resolva determinado problema. Para isso, é necessário fornecer uma sequência de instruções que devem ser seguidas, ou seja, precisamos escrever um programa, que será interpretado e executado pelo computador.

Por ser formada por conjuntos específicos de "zeros e uns", a linguagem do computador é complexa. Assim, foram desenvolvidas as linguagens de programação.

Observação

Em informática, **instrução** é a informação que indica a um computador uma ação elementar a ser executada.

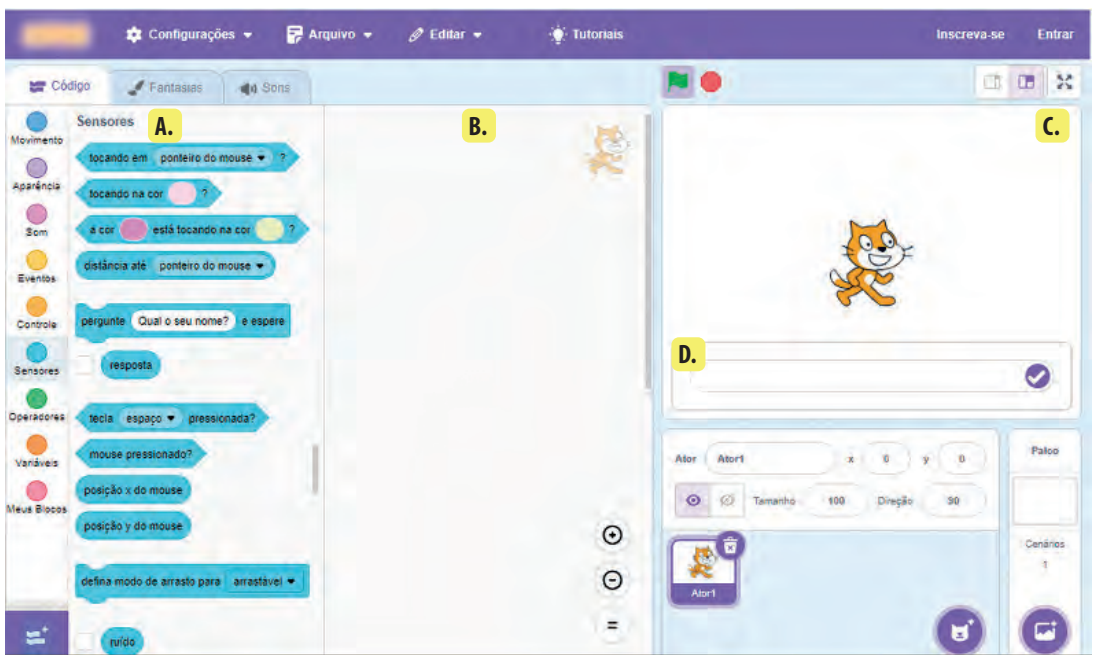
Linguagem de programação é um método padronizado para expressar instruções para um computador.

Existem diversas linguagens de programação, cada uma com características específicas e níveis de complexidade e objetivos diferentes. Nesta coleção, utilizaremos o Scratch, que é uma linguagem de programação composta de blocos que se encaixam, formando algoritmos.

Observação

Com o Scratch é possível criar histórias, jogos e animações digitais. Para usar essa linguagem de programação, basta acessar o *site* oficial. Disponível em: https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted. Acesso em: 8 jul. 2024.

A seguir, são apresentadas algumas características dessa linguagem de programação.



REPRODUÇÃO/SCRATCH

A. **Área de comandos**: nessa região, estão presentes os comandos e blocos que podem ser usados nos algoritmos.

B. **Área de edição**: região destinada aos blocos que compõem os algoritmos. O usuário deve clicar em um bloco na **Área de comandos** e "arrastá-lo" para a **Área de edição**.

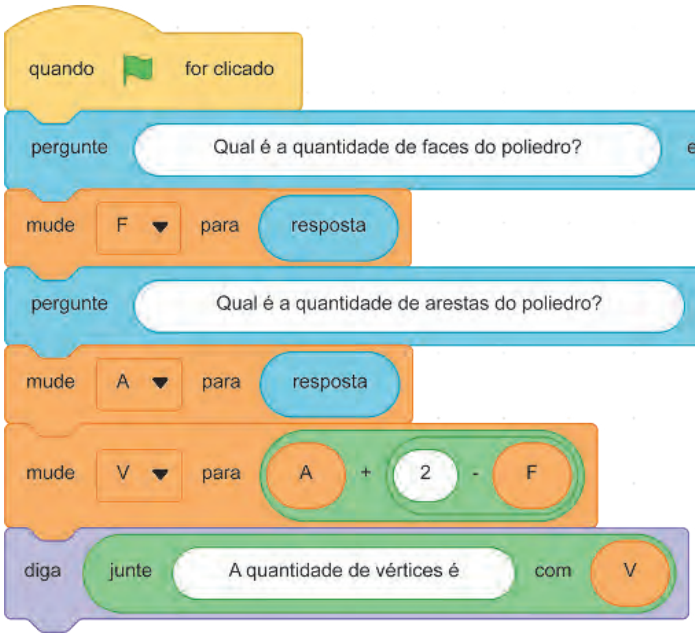
C. **Palco**: região em que os usuários podem visualizar a execução dos procedimentos e dos comandos inseridos.

D. Local destinado à inserção de respostas pelos usuários.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Quantidade de vértices de um poliedro convexo no Scratch

O algoritmo apresentado a seguir, construído no Scratch, possibilita calcular a quantidade de vértices de um poliedro convexo, dada a quantidade de suas faces e arestas.



Observação

Para iniciar a execução desse algoritmo, clique sobre o indicador , localizado próximo ao **Palco** do programa.

FOTOS: REPRODUÇÃO/SCRATCH

A seguir, são apresentadas algumas informações sobre os blocos usados na construção desse algoritmo.

- 

indica o início do algoritmo. Quando o indicador verde é acionado, as instruções conectadas a ele são realizadas.
- 

é usado para atribuir valor a uma variável ou mudar o valor dela. As variáveis são criadas antecipadamente no campo **Área de comandos**, clicando em **Criar uma variável**.
- 

é usado para apresentar mensagens com balões de fala.
- 

e 

indicam, respectivamente, adição e subtração.
- 

e 

atuam juntos. O primeiro é usado para indicar a pergunta que será exibida no **Palco**. A resposta dada pelo usuário é armazenada no bloco 

.
- 

é usado para juntar informações.

Agora é sua vez!

1. Qual será a mensagem exibida no **Palco** quando o programa executar a última instrução, supondo que as respostas dadas pelo usuário sejam "6" e "12", respectivamente? Resposta: A quantidade de vértices é 8.

2. Construa um programa no Scratch que determine a quantidade de arestas de um poliedro convexo, dada a quantidade de seus vértices e faces. Caso não seja possível o acesso ao *software*, descreva-o com suas palavras. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

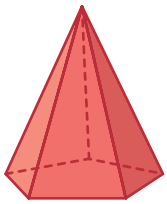
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

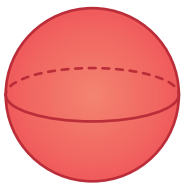
1. Classifique cada uma das figuras geométricas espaciais a seguir em poliedros ou não poliedros.

A.



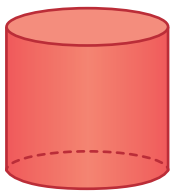
Resposta: Poliedro.

B.



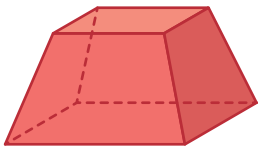
Resposta: Não poliedro.

C.



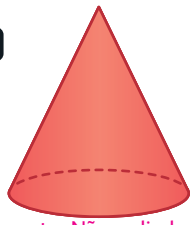
Resposta: Não poliedro.

D.



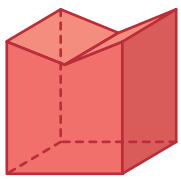
Resposta: Poliedro.

E.



Resposta: Não poliedro.

F.



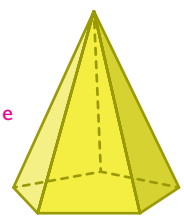
Resposta: Poliedro.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Determine a quantidade de faces, arestas e vértices de cada poliedro.

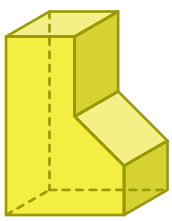
A.

Resposta: 6 faces, 10 arestas e 6 vértices.

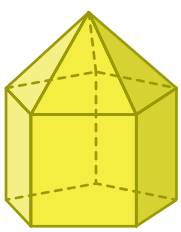


B.

Resposta: 8 faces, 18 arestas e 12 vértices.

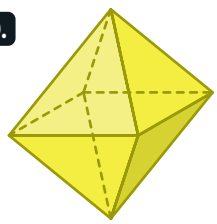


C.



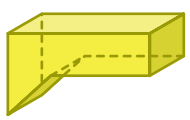
Resposta: 11 faces, 20 arestas e 11 vértices.

D.



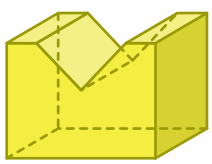
Resposta: 8 faces, 12 arestas e 6 vértices.

E.



Resposta: 7 faces, 15 arestas e 10 vértices.

F.

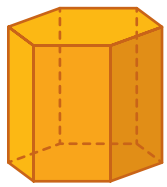


Resposta: 9 faces, 21 arestas e 14 vértices.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

3. Classifique cada poliedro a seguir em convexo ou não convexo.

A.



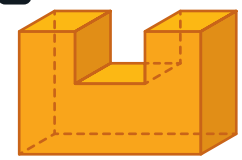
Resposta: Convexo.

B.



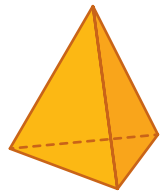
Resposta: Não convexo.

C.



Resposta: Não convexo.

D.

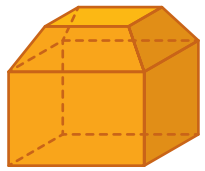


Resposta: Convexo.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

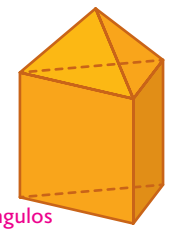
4. Determine quais polígonos (triângulo, quadrilátero, pentágono ou hexágono) são faces de cada um dos poliedros a seguir.

A.



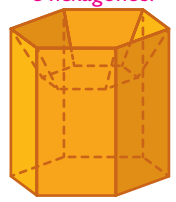
Resposta: Quadriláteros.

B.



Resposta: Triângulos e quadriláteros.

C.



Resposta: Quadriláteros e hexágonos.

D.



Resposta: Pentágonos.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

5. (Enem, 2015) Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro *P*, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro *P*, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.

Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu? Resposta: Alternativa **c**.

a) 6 **c)** 14 **e)** 30

b) 8 **d)** 24

6. Represente um poliedro convexo de 6 faces e um não convexo de 7 faces. Em seguida, troque essas figuras com um colega e determine a quantidade de vértices e arestas das figuras que você recebeu. Por fim, juntem-se e verifiquem se as respostas estão corretas. Resposta pessoal. Orientações sobre esta tarefa no **Suplemento para o professor**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Relação de Euler

O suíço Leonhard Euler (1707-1783) trouxe muitas contribuições para a Matemática. Mesmo ficando cego aos 59 anos de idade, Euler continuou seus estudos. É provável que nenhum outro matemático tenha produzido tanto quanto ele, que durante toda a vida publicou cerca de 500 trabalhos, entre livros e artigos.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Tradução: Elza F. Gomes. São Paulo: Edgard Blücher, 2010. p. 303-304.



MUSEU DAS BELAS ARTES, BASILEIA

Leonhard Euler, de Jakob Hanmann. Pastel sobre papel, 20,3 cm × 25,4 cm, 1753.

Entre as várias contribuições de Euler, podemos destacar uma importante relação envolvendo a quantidade de faces, arestas e vértices de um poliedro convexo, conhecida como **Relação de Euler**.

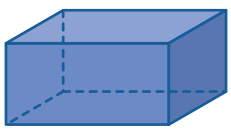
> Seja um poliedro convexo de F faces, A arestas e V vértices. Tem-se $V + F = A + 2$.

A Relação de Euler pode ser demonstrada; no entanto, neste livro, não apresentaremos essa demonstração.

Observação

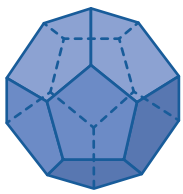
A Relação de Euler é válida também para uma infinidade de poliedros não convexos. Além disso, há valores que satisfazem essa relação, mas não correspondem à quantidade de vértices, faces e arestas de um poliedro, como $V = 8$, $F = 14$ e $A = 20$.

Exemplos



$V = 8$
$F = 6$
$A = 12$

$V + F = A + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8 + 6 = 12 + 2 \Rightarrow 14 = 14$



$V = 20$
$F = 12$
$A = 30$

$V + F = A + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 20 + 12 = 30 + 2 \Rightarrow 32 = 32$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas resolvidos

R1. Escreva um algoritmo que possibilite determinar a quantidade de faces de um poliedro convexo, conforme a quantidade de seus vértices e suas arestas.

Resolução

Antes de apresentarmos os passos para a construção de um algoritmo, vamos relembrar sua definição.

> Um **algoritmo** é uma sequência finita de passos (instruções) para resolver determinado problema.

Para construí-lo, inicialmente, devemos ler o enunciado do problema, compreendendo-o e destacando seus pontos mais importantes, e, em seguida, responder a estas perguntas.

a) Quais são os **dados de entrada**, ou seja, os dados fornecidos pelo problema?
Dados de entrada: quantidade de vértices e de arestas.

b) Quais são os **dados de saída**, ou seja, os dados gerados após a execução de todas as etapas do algoritmo?
Dados de saída: quantidade de faces.

c) Conhecendo os dados de entrada e de saída, quais **procedimentos** devem ser realizados?
Indicando por V, F e A a quantidade de vértices, faces e arestas, respectivamente, temos, pela Relação de Euler:

$$V + F = A + 2 \Rightarrow F = A + 2 - V$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Desse modo, é preciso adicionar duas unidades à quantidade de arestas e, da soma obtida, subtrair a quantidade de vértices.

Por fim, escrevemos o algoritmo. 8. c) Resposta: Sim, pois $\underbrace{9}_{\text{faces}} + \overbrace{9}^{\text{vértices}} = \underbrace{16}_{\text{arestas}} + 2$.

Início

1. Leia a quantidade de arestas.

2. Leia a quantidade de vértices.

3. Adicione duas unidades à quantidade de arestas.

4. Subtraia, da soma obtida no passo **3**, a quantidade de vértices.

Fim

R2. Um poliedro convexo é formado por quatro faces hexagonais e quatro faces triangulares. Qual é a quantidade de vértices e arestas desse poliedro?

Resolução

De acordo com o enunciado, a quantidade A de arestas é dada por:

- quatro faces hexagonais: $4 \cdot 6 = 24$
- quatro faces triangulares: $4 \cdot 3 = 12$

Logo, $A = \frac{12 + 24}{2} = 18$.

Como o poliedro é convexo, é válida a Relação de Euler. Assim, a quantidade V de vértices é:

$$V + 8 = 18 + 2 \Rightarrow V = 12$$

Portanto, o poliedro convexo tem 12 vértices e 18 arestas.

13. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes escolham um poliedro convexo do conhecimento deles e informem a um colega a quantidade de vértices e de arestas que ele tem, a fim de que o colega determine a quantidade de faces desse poliedro.

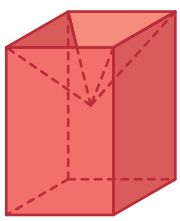
Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

7. Qual é a quantidade de faces de um poliedro convexo de 10 vértices e 15 arestas? Resposta: 7 faces.

8. Analise o poliedro a seguir.

8. a) Resposta: Não convexo, pois é possível traçar uma reta não paralela a nenhuma de suas faces e o cortar em mais de dois pontos.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Esse poliedro é convexo ou não convexo? Justifique sua resposta.

b) Determine a quantidade de vértices, arestas e faces desse poliedro. Resposta: 9 vértices; 16 arestas; 9 faces.

c) Nesse poliedro, a Relação de Euler é válida? Justifique sua resposta.

9. Considere um poliedro convexo de 15 faces. Sabendo que todas as faces desse poliedro são hexagonais, determine quantos vértices ele tem. Resposta: 32 vértices.

10. Um poliedro convexo de 16 arestas e 9 vértices é formado apenas por faces triangulares e quadrangulares. Determine a quantidade de faces triangulares e quadrangulares desse poliedro. Resposta: 4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares.

11. Em um poliedro convexo, a quantidade de arestas é o dobro da de vértices. Quantos vértices, arestas e faces tem esse poliedro, sabendo que todas as suas faces são triangulares? Resposta: 6 vértices; 12 arestas; 8 faces.

12. Analise a seguir a representação de uma molécula de *buckminsterfullerene*, que é composta de estruturas de carbono. Essa representação lembra um poliedro.



OGWEN/SHUTTERSTOCK

Estrutura que representa o formato molecular de *buckminsterfullerene*.

Sabendo que essa molécula é composta de 60 átomos de carbono e considerando cada átomo como um vértice, determine a quantidade de faces pentagonais e hexagonais que compõe o poliedro que lembra essa molécula. Resposta: 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais.

13. Escolha um poliedro convexo e indique a quantidade de vértices e de arestas que ele tem. Depois, peça a um colega que determine a quantidade de faces desse poliedro.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Poliedros de Platão

Platão (427 a.C.-347 a.C.), discípulo de Sócrates, foi um filósofo grego nascido em Atenas.

Comumente diz-se que Platão passou a ter uma visão matemática por influência de um amigo, Arquitas. Acredita-se também que tenha sido nesse momento que ele soube da existência de cinco poliedros: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o icosaedro e o dodecaedro. Nessa época, esses poliedros eram associados aos quatro elementos considerados primordiais: ar, associado ao octaedro; terra, associada ao cubo; fogo, ao tetraedro; e água, ao icosaedro. O quinto e último poliedro foi o dodecaedro, que Platão considerou o símbolo do Universo.

Fontes de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.
BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

Esses poliedros convexos são chamados **Poliedros de Platão**. Um Poliedro de Platão satisfaz simultaneamente as seguintes condições:

- todas as faces têm a mesma quantidade de arestas;
- de cada vértice parte a mesma quantidade de arestas;
- a Relação de Euler é válida.

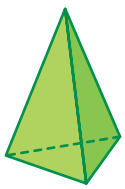
Exemplos

A. O poliedro apresentado é de Platão, pois todas as faces têm a mesma quantidade de arestas (3); de cada vértice parte a mesma quantidade de arestas (3); a Relação de Euler é válida, ou seja:

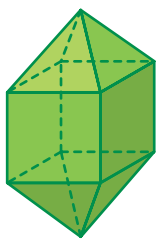
$V = 4$; $F = 4$; $A = 6$

$V + F = A + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 + 4 = 6 + 2 \Rightarrow 8 = 8$



B. O poliedro apresentado não é de Platão. Apesar de duas das condições serem satisfeitas, ou seja, de haver a mesma quantidade de arestas partindo de cada vértice e a Relação de Euler ser válida, nem todas as faces têm a mesma quantidade de arestas. Podemos notar que algumas faces têm 3 arestas, enquanto outras têm 4.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Nos exemplos anteriores, V, F e A indicam a quantidade de vértices, faces e arestas, respectivamente.

Em relação aos Poliedros de Platão, temos a seguinte propriedade:

> Existem 5, e somente 5, classes de Poliedros de Platão.

Para demonstrar essa propriedade, considere um Poliedro de Platão de F faces, V vértices e A arestas e também assuma que n é a quantidade de arestas de cada face e p, o total de arestas que partem de cada vértice.

Cada face tem n arestas $(n \geq 3)$ e cada aresta é comum a 2 faces. Assim:

$$A = \frac{n \cdot F}{2} \Rightarrow F = \frac{2 \cdot A}{n}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Como cada aresta contém 2 vértices e p $(p \geq 3)$ é a quantidade de arestas que partem de cada vértice, temos:

$$A = \frac{p \cdot V}{2} \Rightarrow V = \frac{2 \cdot A}{p}$$

Observação

As restrições $n \geq 3$ e $p \geq 3$ são necessárias, pois se n for menor do que 3 não é possível obter um polígono, e se p for menor do que 3 não é possível formar um poliedro.

Substituímos V por $\frac{2 \cdot A}{p}$ e F por $\frac{2 \cdot A}{n}$ na Relação de Euler. Em seguida, dividimos a equação obtida por $2A$.

$$V + F = A + 2 \Rightarrow \frac{2 \cdot A}{p} + \frac{2 \cdot A}{n} = A + 2 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} > 0$$

Vamos supor que as faces sejam triangulares. Nesse caso, temos $n = 3$, e assim:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{6} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{1}{6} \Rightarrow p < 6$$

Para $n = 3$, temos p igual a 3, 4 ou 5.

Observação

Nesse caso, A é positivo e, consequentemente, $\frac{1}{A} > 0$. Assim, $\frac{1}{p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}$ também é maior do que 0.

Supondo que as faces sejam quadrangulares, nesse caso, temos $n = 4$. Assim:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{1}{4} \Rightarrow p < 4$$

Para $n = 4$, temos p igual a 3.

Supondo que as faces sejam pentagonais $(n = 5)$, temos:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{3}{30} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{3}{30} \Rightarrow p < \frac{10}{3} = 3,\overline{3}$$

Para $n = 5$, temos p igual a 3.

Se $n \geq 6$, obteremos $p < 3$, o que não é possível, pois p deve ser maior ou igual a 3, isto é, $p \geq 3$.

Organizando as informações obtidas, temos:

Quantidade *n* de arestas de cada face e quantidade *p* de arestas que partem de cada vértice

Faces	*n*	*p*
Triangulares	3	3
Triangulares	3	4
Triangulares	3	5
Quadrangulares	4	3
Pentagonais	5	3

Analisando essas informações, podemos notar que há 5 classes de Poliedros de Platão.

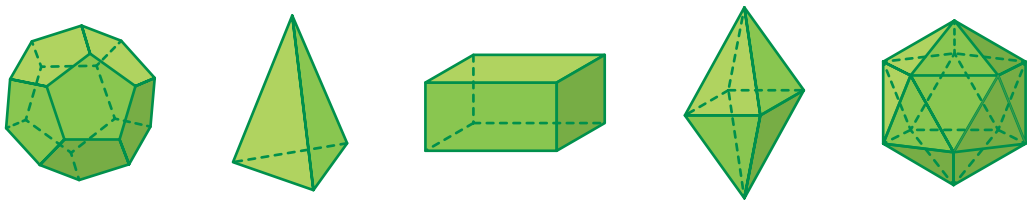
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Utilizando as relações obtidas anteriormente, determinamos os valores de V, F e A. Ao organizar esses valores em um quadro, temos as 5 classes de poliedros possíveis.

Analise alguns Poliedros de Platão.

Poliedros de Platão e seus elementos

n	*p*	*V*	*F*	*A*	Nome do poliedro
3	3	4	4	6	Tetraedro
3	4	6	8	12	Octaedro
3	5	12	20	30	Icosaedro
4	3	8	6	12	Hexaedro
5	3	20	12	30	Dodecaedro



dodecaedro — tetraedro — hexaedro — octaedro — icosaedro

PARA FIXAR

Verifique, na prática, o motivo de existir apenas 5 classes dos Poliedros de Platão, utilizando materiais manipuláveis e princípios geométricos. Para isso, assista ao vídeo "POR QUE só existem 5 SÓLIDOS DE PLATÃO em 3D?" do canal Tem ciência.

Poliedros regulares

Dizemos que um poliedro convexo é regular quando satisfaz as seguintes condições:

- as faces são polígonos regulares e congruentes;
- de cada vértice do poliedro parte a mesma quantidade de arestas.

Em relação aos poliedros regulares, temos a seguinte propriedade:

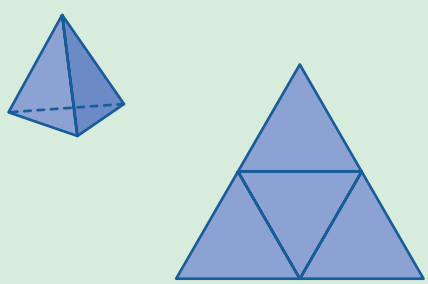
> Existem 5, e somente 5, poliedros regulares.

Podemos demonstrar essa propriedade da seguinte maneira.

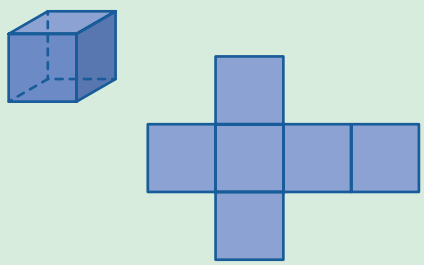
Se um poliedro é regular, suas faces são polígonos regulares e congruentes. Desse modo, todas as faces têm a mesma quantidade de lados. Além disso, em um poliedro regular, de cada vértice parte a mesma quantidade de arestas.

Assim, é possível afirmar que todo poliedro regular é de Platão. Logo, existem no máximo 5 poliedros regulares.

Analise a seguir os 5 poliedros regulares e uma de suas respectivas planificações.



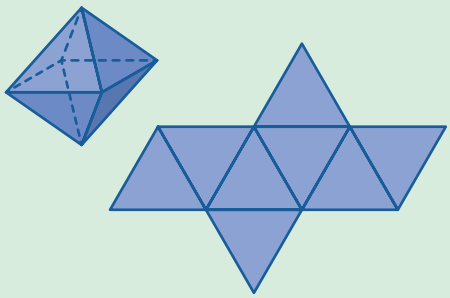
Tetraedro regular: 4 faces triangulares equiláteras e 3 arestas que partem de cada vértice.



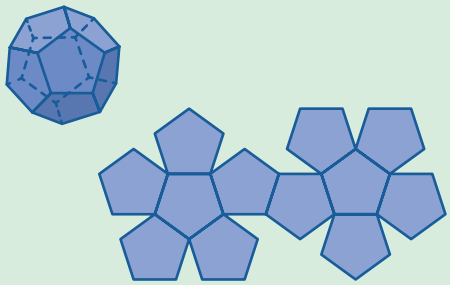
Hexaedro regular ou cubo: 6 faces quadradas e 3 arestas que partem de cada vértice.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

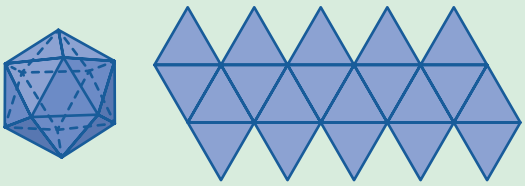
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



Octaedro regular: 8 faces triangulares equiláteras e 4 arestas que partem de cada vértice.



Dodecaedro regular: 12 faces pentagonais regulares e 3 arestas que partem de cada vértice.



Icosaedro regular: 20 faces triangulares equiláteras e 5 arestas que partem de cada vértice.

Observação

Para compor outras planificações desses poliedros, é necessário organizar as faces de maneira conveniente.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas resolvidos

R3. Classifique em verdadeira ou falsa as afirmações a seguir, justificando cada caso.

a) O cubo é um Poliedro de Platão.

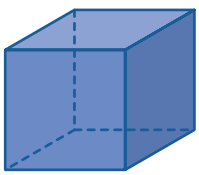
b) As faces de um icosaedro regular são triângulos equiláteros.

c) A Relação de Euler é válida somente para poliedros convexos.

d) Se as faces de um poliedro convexo são polígonos regulares congruentes, então o poliedro é regular.

Resolução

a) Verdadeira, pois o cubo é um hexaedro regular e, portanto, um Poliedro de Platão.



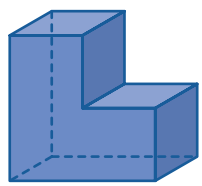
cubo ou hexaedro regular

b) Verdadeira, pois o icosaedro regular tem 20 faces triangulares equiláteras, ou seja, suas faces são triângulos equiláteros.



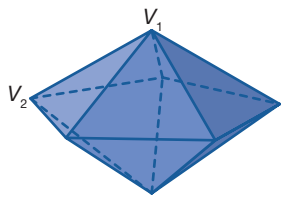
icosaedro regular

c) Falsa, pois a Relação de Euler é válida também para alguns poliedros não convexos, como o apresentado a seguir.



8 faces, 12 vértices e 18 arestas (relação $V + F = A + 2$ verdadeira)

d) Falsa, pois também é necessário que de cada vértice do poliedro parta a mesma quantidade de arestas.



As faces desse poliedro são triângulos regulares e, além disso, é válida a Relação de Euler. Porém, do vértice V_1 partem 5 arestas e do vértice V_2, 4 arestas.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R4. Armando construiu a representação de um poliedro convexo de 32 vértices. Sabendo que ele utilizou apenas faces triangulares nessa construção, determine a quantidade de arestas desse poliedro.

Resolução

Sabemos que o poliedro é convexo. Desse modo, a Relação de Euler é válida, ou seja, indicando por V, F e A a quantidade de vértices, faces e arestas, respectivamente, temos:

$$V + F = A + 2$$

Além disso, sabemos que $V = 32$. Assim:

$$V + F = A + 2 \Rightarrow 32 + F = A + 2 \Rightarrow A = F + 30$$

Tem-se ainda que toda face tem 3 arestas (regiões triangulares) e cada aresta é comum a duas faces. Consequentemente:

$$A = \frac{3F}{2} \Rightarrow F = \frac{2A}{3}$$

Substituindo $F = \frac{2A}{3}$ em $A = F + 30$, temos:

$$A = F + 30 \Rightarrow A = \frac{2A}{3} + 30 \Rightarrow 3A = 2A + 90 \Rightarrow A = 90$$

Portanto, esse poliedro tem 90 arestas.

Exercícios e problemas

17. Professor, professora: Lembre os estudantes de que, para obter a soma S dos ângulos internos de um polígono, é necessário fazer sua decomposição em triângulos ou recorrer à fórmula $S = (n - 2) \cdot 180°$, em que n corresponde à quantidade de lados do polígono.

Anote as respostas no caderno.

14. De um poliedro convexo de 12 vértices, partem 5 arestas de cada vértice. Determine a quantidade de faces e arestas desse poliedro.
Resposta: 20 faces e 30 arestas.

15. Considere o poliedro regular cuja quantidade de faces é igual à de vértices e responda às questões.

a) Quantas faces, quantos vértices e quantas arestas tem esse poliedro?
Resposta: 4 faces; 4 vértices; 6 arestas.

b) Que nome recebe esse poliedro?
Resposta: Tetraedro regular.

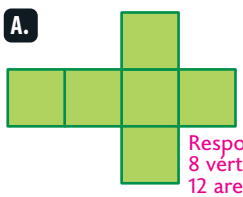
c) Qual é a forma das faces desse poliedro?
Resposta: Todas são triangulares equiláteras.

16. Podemos afirmar que um octaedro, que se enquadra em uma das cinco classes dos Poliedros de Platão, é um poliedro regular? Justifique sua resposta. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

17. Qual é, em graus, a soma dos ângulos internos das faces de um tetraedro regular?
Resposta: 720°

18. Em cada item é apresentada a planificação de um poliedro convexo. Determine a quantidade de vértices e arestas de cada um deles.

A.



Resposta: 8 vértices e 12 arestas.

B.



Resposta: 6 vértices e 12 arestas.

19. Elabore um problema que tenha a seguinte frase como resposta:

> Sim, a relação de Euler é válida, pois o poliedro é convexo.

19. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

20. Escreva um algoritmo que possibilite determinar a quantidade de vértices de um Poliedro de Platão de faces triangulares, dada a quantidade de faces desse poliedro. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

a) Utilizando o algoritmo escrito por você, determine a quantidade de vértices de um Poliedro de Platão de faces triangulares que tem:

- 4 faces. Resposta: 4 vértices.
- 20 faces. Resposta: 12 vértices.

b) Codifique o algoritmo escrito por você para a linguagem Scratch.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

21. A IX Copa do Mundo de futebol da FIFA foi realizada em 1970, no México, e teve como campeã a seleção brasileira. Nessa Copa, foi utilizada pela primeira vez a bola confeccionada com partes de couro com formato pentagonal e hexagonal.



DPA/ZUMA PRESS/IMAGEPLUS

Bola de futebol utilizada na Copa do Mundo de 1970.

Essa bola foi inspirada em um icosaedro truncado, um dos 13 poliedros conhecidos como Sólidos de Arquimedes. O icosaedro truncado é um poliedro convexo formado por 12 pentágonos regulares e 20 hexágonos regulares.

Fonte de pesquisa: LIMA, Elon Lages *et al*. *A matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. v. 2.

Qual é a quantidade de vértices e arestas do icosaedro truncado? Resposta: 60 vértices e 90 arestas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

Cada um na sua bolha

Início de conversa

Leia a tirinha a seguir.



DAHMER, André. *Quadrinhos dos anos 20*. São Paulo: Companhia das Letras, 2023. p. 10.

1. Qual é a expectativa do personagem de óculos ao receber o mundo de informações?

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes identifiquem que a expectativa do personagem de óculos é a de se tornar uma pessoa mais bem informada e consciente sobre o que acontece no mundo.

2. O personagem vestido de laranja na tirinha se chama Algoritmo. Como o comportamento dele no último quadrinho contrasta com as expectativas do personagem de óculos? O que isso pode revelar?

2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes identifiquem que o Algoritmo sai correndo e rindo no último quadrinho, o que pode revelar uma intenção maliciosa ou manipuladora na sua ação de trazer um mundo de informações para o outro personagem, que, em vez de se tornar mais consciente, pode estar recebendo um mundo de informações voltadas somente para si, que podem ser limitadas ou distorcidas.

Você já teve a sensação de que os conteúdos que aparecem em suas redes sociais são escolhidos especialmente para você? Já percebeu que as páginas principais dessas redes mostram notícias e conteúdos do seu interesse, perspectivas e opiniões parecidas com as suas e até ofertas de produtos que estava pesquisando em outros *sites*? Isso ocorre porque uma das características das redes sociais é oferecer uma experiência *on-line* personalizada.

Essa personalização acontece por meio de **algoritmos**, que nesse contexto são conjuntos de técnicas computacionais utilizadas para realizar determinadas tarefas. Uma delas é investigar os acessos dos usuários à internet para captar suas preferências e visões de mundo com o objetivo de apresentar a eles conteúdos alinhados a esses acessos. Isso pode ser interessante quando, por exemplo, gostamos de assistir a vídeos de culinária e são recomendados diversos deles. No entanto, e quando essa personalização influencia a maneira como as pessoas se informam e consomem notícias?

Com a evolução da tecnologia, a mídia e os meios de comunicação e informação em geral também se transformaram. Muitas pessoas usam as redes sociais e plataformas digitais para se informar sobre tudo o que está acontecendo no mundo, e os algoritmos desempenham papel fundamental nesse processo. Eles são responsáveis pelo surgimento de ambientes *on-line* nos quais as informações são filtradas e selecionadas com base nos interesses e pontos de vista dos usuários, as chamadas **bolhas informacionais**.

Analise, a seguir, como essas bolhas surgem.

Coleta de dados

Por meio dos algoritmos, os gostos e interesses de um usuário são monitorados. Curtir, compartilhar, seguir, clicar. Todas essas interações *on-line* são analisadas e contribuem para o entendimento das preferências de cada perfil.

Personalização de conteúdo

Com base na coleta de dados, os algoritmos priorizam os conteúdos que vão prender a atenção do usuário e mantê-lo engajado. Isso inclui qualquer tipo de conteúdo que se alinhe com as preferências do usuário.

ILUSTRAÇÕES: LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Filtragem de informações

Os algoritmos filtram as informações que não combinam com os interesses e as crenças dos usuários e dificultam a chegada delas até eles. Isso causa a sensação de que uma bolha foi criada em torno do usuário e que ele está protegido de opiniões diferentes das dele.

LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Em meio à infinidade de conteúdos produzidos todos os dias, a ideia de ter um filtro informacional personalizado pode parecer interessante. Porém, as bolhas informacionais promovem um isolamento na forma como as pessoas consomem informações e podem fazer com que elas tenham uma ideia descolada da realidade ao tratar como verdade absoluta pontos de vista que só circulam em sua bolha.

Esse modo de funcionamento também facilita a disseminação de informações falsas, pois os algoritmos não checam a veracidade das informações antes de oferecê-las aos usuários. Eles priorizam o engajamento nos conteúdos. Isso significa que notícias que geram mais cliques, curtidas e compartilhamentos, por exemplo, são mostradas com mais frequência na página inicial dos usuários.



LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Como resultado, as pessoas ficam presas em um ciclo de informações repetitivas, potencialmente falsas e **enviesadas**, muitas vezes sem perceber que suas visões de mundo e opiniões estão sendo moldadas pela ação dos algoritmos e das bolhas informacionais. É essencial conscientizar-se da maneira como consumimos informações, principalmente nas redes sociais. Analise, a seguir, algumas orientações que ajudam a furar as bolhas informacionais.

Enviesadas: nesse contexto, informações parciais, que tendem a estar inclinadas a determinada opinião ou pensamento.

Apague os rastros

Limpe os dados de navegação dos seus dispositivos, utilize o modo anônimo de navegação e bloqueie os anúncios personalizados. Com isso, fica mais difícil de os algoritmos coletarem seus dados.

Pesquise de modo diferente

Procure buscar páginas ou veículos de informação que criem conteúdos diferentes dos quais você já acompanha. Assim, o algoritmo pode se confundir e ampliar os resultados das suas buscas.

Varie suas fontes

Consuma notícias de diferentes veículos jornalísticos com posições, especialidades e segmentos distintos. Dessa forma, você pode comparar como a mesma informação foi noticiada em cada veículo e encontrar informações mais precisas.

ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Como as bolhas informacionais são criadas?

2. Quais são as vantagens e desvantagens do modo de funcionamento dos algoritmos?

3. De que maneira você acha que o isolamento em uma bolha informacional pode limitar a capacidade de pensar criticamente e tomar decisões?

4. Que tal tentar furar a sua bolha? Identifique os conteúdos que são mais recomendados a você na internet. Em seguida, pesquise conteúdos da mesma área, mas que correspondam a outras bolhas. Compartilhe suas percepções com os colegas.

1. Resposta: Por meio da ação dos algoritmos que coletam dados e informações sobre as preferências e os interesses dos usuários de acordo com suas interações *on-line*, filtrando os conteúdos para que só cheguem as informações alinhadas aos interesses e às opiniões deles.

2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reconheçam que a filtragem de assuntos que interessam pode ser positiva, mas também pode limitar a visão de mundo do usuário, fazendo com que ele seja inserido em uma bolha informacional.

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que o isolamento proporcionado pela bolha informacional limita a exposição a pontos de vista distintos, o que reduz a capacidade de avaliar informações de forma integral e crítica. Ao receber apenas informações com as quais concordam, as pessoas podem se tornar menos propensas a questionar essas crenças e considerar outras perspectivas.

4. Resposta pessoal. Incentive os estudantes a procurar conteúdos de outras bolhas e perceber aspectos positivos relacionados a elas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Prismas

Neste tópico, estudaremos o prisma, que é um caso particular de poliedro. Analise a seguir alguns objetos cujos formatos são semelhantes a prismas.



LABORANT/SHUTTERSTOCK

Bloco de madeira.



STEYNO&STITCH/SHUTTERSTOCK

Caixa de madeira.



HEDZLIN VASYL/SHUTTERSTOCK

Caixa de sapatos.

Para definir um prisma, considere os planos paralelos α e β, o polígono convexo $A_1A_2...A_n$ contido em α e o ponto B_1 pertencente a β. Pelos vértices $A_2, A_3, ..., A_n$ traçamos retas paralelas a $\overline{A_1B_1}$ que cortam β nos pontos $B_2, B_3, ..., B_n$. Considerando dois segmentos consecutivos assim determinados, por exemplo, $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$, verificamos que o quadrilátero $A_1B_1B_2A_2$ é plano, pois $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$ são paralelos. Além disso, como $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ estão contidos em retas coplanares que não se intersectam, esses segmentos são paralelos. Consequentemente, o quadrilátero é um paralelogramo.

Observação

Nesse caso, $B_1 \notin \alpha$ e as retas paralelas a $\overline{A_1B_1}$ que passam por $A_2, A_3, \ldots, A_n$ também são paralelas entre si.

A união de todos esses paralelogramos, juntamente com os polígonos $A_1A_2...A_n$ e $B_1B_2...B_n$, é chamada **prisma de bases** $A_1A_2...A_n$ e $B_1B_2...B_n$.

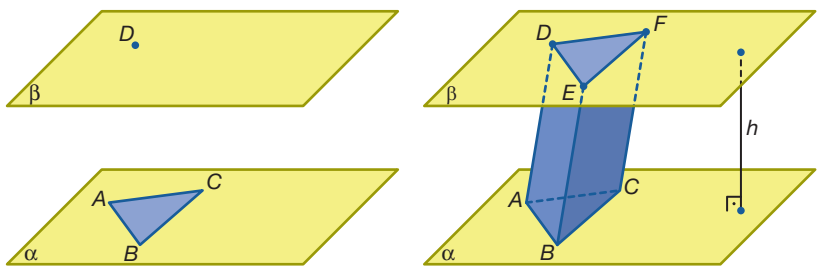
Os segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, ..., $\overline{A_nB_n}$ são chamados **arestas laterais**. Todas as arestas laterais são paralelas e de mesmo comprimento.

Observação

Pode-se mostrar que as bases de um prisma são congruentes.

Os paralelogramos $A_1B_1B_2A_2, A_2B_2B_3A_3, \ldots, A_nB_nB_1A_1$ são chamados **faces laterais** do prisma. Já os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_nA_1}$ e $\overline{B_1B_2}$, $\overline{B_2B_3}$, ..., $\overline{B_nB_1}$ são chamados **arestas das bases**.

Supondo os planos paralelos α e β, o polígono convexo ABC contido em α e o ponto D pertencente a β, temos:



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Nesse prisma, segue que:

- as **bases** são os polígonos ABC e DEF (polígonos congruentes).
- as **arestas das bases** são $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{DF}$.
- as **arestas laterais** são $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$.
- as **faces laterais** são os paralelogramos $ADEB$, $BEFC$ e $CFDA$.
- a **altura** é a distância h entre os planos α e β.

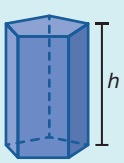
Observação

A altura de um prisma é a distância entre as bases.

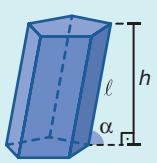
Um prisma é **reto** quando suas arestas laterais são perpendiculares às bases. Caso as arestas laterais sejam oblíquas às bases, dizemos que o prisma é **oblíquo**.

Observação

Em um prisma reto, a altura corresponde ao comprimento da aresta lateral.



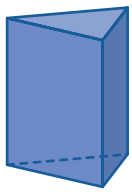
Em um prisma oblíquo, a altura está relacionada ao comprimento da aresta lateral e ao ângulo formado entre a aresta lateral e sua projeção no plano da base.



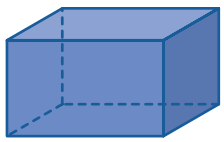
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

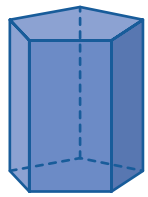
Um prisma pode ser denominado de acordo com sua base. Se a base for um triângulo, o prisma é triangular; se a base for um quadrilátero, o prisma é quadrangular; e assim por diante. Analise alguns exemplos.



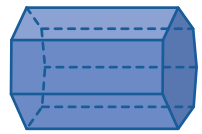
Prisma triangular.



Prisma quadrangular.



Prisma pentagonal.



Prisma heptagonal.

Observação

Quando a base de um prisma reto é um polígono regular, dizemos que ele é um **prisma regular**.

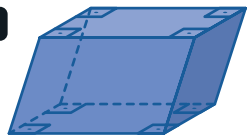
No caso dos prismas quadrangulares, são dadas denominações diferentes de acordo com algumas de suas características. Um desses prismas é o **paralelepípedo**, cujas bases são paralelogramos.

Em relação aos paralelepípedos, temos:

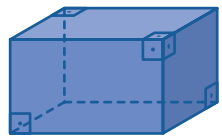
a) paralelepípedo retângulo, cujas bases são retângulos.

b) paralelepípedo reto retângulo, cujas bases e faces laterais são retângulos.

A.

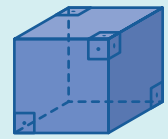


B.



Observação

O cubo é um caso particular de paralelepípedo reto retângulo que tem todas as faces quadradas.

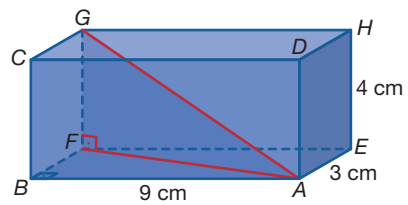


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R5. Dado o paralelepípedo reto retângulo, determine AF e AG.



Resolução

No triângulo retângulo ABF, o segmento $\overline{AF}$ é a hipotenusa. Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$(AF)^2 = (AB)^2 + (BF)^2 \Rightarrow (AF)^2 = 9^2 + 3^2 \Rightarrow (AF)^2 = 90 \Rightarrow AF = 3\sqrt{10}$$

No triângulo retângulo AFG, o segmento $\overline{AG}$ é a hipotenusa, logo:

$$(AG)^2 = (AF)^2 + (FG)^2 \Rightarrow (AG)^2 = \left(3\sqrt{10}\right)^2 + 4^2 \Rightarrow AG = \sqrt{106}$$

Portanto, $AF = 3\sqrt{10}$ cm e $AG = \sqrt{106}$ cm.

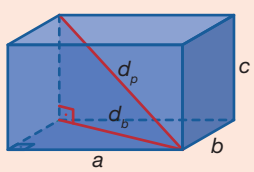
Observação

Nesse caso, $AF = 3\sqrt{10}$ e $AG = \sqrt{106}$, pois $AF > 0$ e $AG > 0$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Dado um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c, pode-se mostrar que:

- o comprimento da diagonal da base do paralelepípedo é dado por $d_b = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- o comprimento da diagonal do paralelepípedo é dado por $d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



Anote as respostas no caderno.

22. Escreva como é denominado, de acordo com o polígono da base, um prisma reto cuja base seja um polígono regular de:

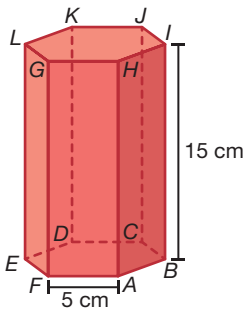
a) 6 lados. Resposta: Prisma regular hexagonal.

b) 8 lados. Resposta: Prisma regular octogonal.

c) 10 lados. Resposta: Prisma regular decagonal.

23. Analise o prisma hexagonal regular a seguir.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



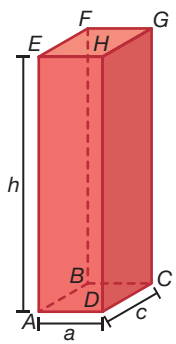
Professor, professora: Para resolver o item **a**, lembre os estudantes de que um hexágono regular pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros congruentes.

a) Determine AD e AK. Resposta: $AD = 10$ cm; $AK = 5\sqrt{13}$ cm

b) Qual é a área e o perímetro do triângulo BEL? Resposta: Área: 75 cm²; perímetro: $5 \cdot (5 + \sqrt{13})$ cm.

24. Sabendo que o comprimento da diagonal da base e da diagonal do paralelepípedo reto retângulo a seguir é igual a 5 cm e 13 cm, respectivamente, e que a área do retângulo $ABFE$ é 48 cm², quais são os valores de a, c e h?

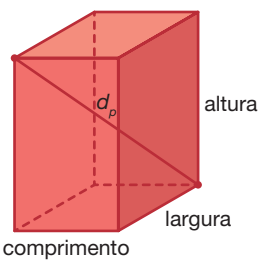
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



Resposta: $a = 3$ cm, $c = 4$ cm, $h = 12$ cm

25. O comprimento da diagonal d_p de um paralelepípedo reto retângulo é $15\sqrt{2}$ cm. Sabendo que o comprimento, a largura e a altura desse paralelepípedo são proporcionais aos números 3, 4 e 5, respectivamente, determine as dimensões desse paralelepípedo.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



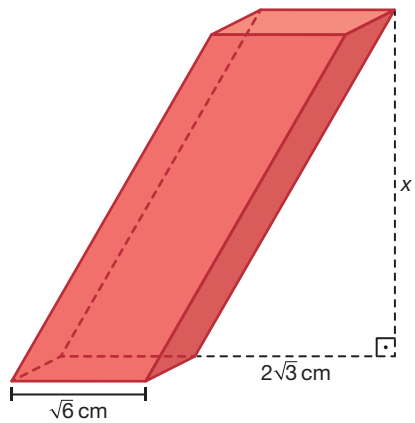
Resposta: Comprimento: 9 cm; largura: 12 cm; altura: 15 cm.

26. As dimensões externas de uma caixa em forma de paralelepípedo reto retângulo são representadas por números consecutivos, e a diagonal desse paralelepípedo tem $\sqrt{194}$ cm de comprimento. Quantos centímetros tem cada uma das dimensões externas dessa caixa?
Resposta: 7 cm, 8 cm e 9 cm.

27. Em uma aula de Geometria espacial, o professor solicitou aos estudantes que construíssem, com canudos de papel de 20 cm de comprimento, as arestas de um cubo, de maneira que a diagonal dele tivesse o mesmo comprimento de um canudo. Quantos centímetros de cada canudo devem ser cortados para construir as arestas desse cubo? Resposta: Aproximadamente 8,5 cm.

28. As arestas laterais do prisma oblíquo de base quadrada representado a seguir têm $4\sqrt{3}$ cm de comprimento. Sendo assim, determine:

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



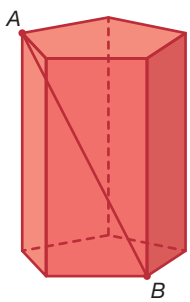
Resposta: $2\sqrt{3}$ cm

a) o comprimento da diagonal da base.

b) a altura x. Resposta: 6 cm

29. O segmento $\overline{AB}$ indicado no prisma regular pentagonal representado a seguir tem 30 cm de comprimento. Para que esse segmento aumente 16,8 cm, de maneira que o comprimento das arestas da base não seja alterado, a altura desse prisma deve ter aumento de 19,2 cm. Calcule quantos centímetros de altura tem esse prisma.
Resposta: 24 cm

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

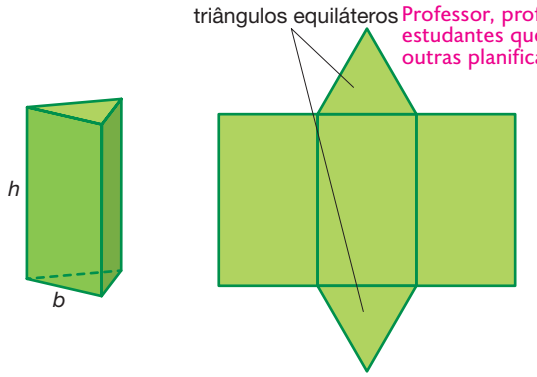
Área da superfície de um prisma

Para iniciar o estudo acerca do cálculo da área da superfície de um prisma, são necessárias algumas considerações. Em um prisma:

- a **superfície lateral** corresponde à reunião de todas as suas faces laterais, sendo a área dessa superfície a área lateral do prisma (A_l);
- a **área da base** corresponde à área do polígono relativa a cada uma das bases do prisma (A_b);
- a **superfície total** corresponde à reunião da superfície lateral com as bases, sendo a área total do prisma (A_t) a soma da área lateral com a área das bases.

Assim, a área total da superfície de um prisma é igual à área lateral mais duas vezes a área da base, isto é: $A_t = A_l + 2A_b$.

Analise a representação de um prisma regular e sua planificação.



Professor, professora: Explique aos estudantes que é possível compor outras planificações deste prisma.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Nesse caso, a área total do prisma é dada pela área lateral, que é igual a três vezes a área de uma face lateral (retângulo) mais a área das bases, que é igual a duas vezes a área de uma base (triângulo equilátero).

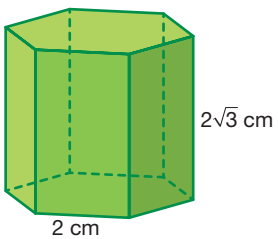
$$A_t = \underbrace{A_l}_{3 \cdot b \cdot h} + 2\ \underbrace{A_b}_{\frac{b^2\sqrt{3}}{4}} = 3bh + 2 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = 3bh + \frac{b^2\sqrt{3}}{2}$$

Observação

A fim de simplificar a escrita, vamos dizer "a área do polígono" em vez de dizer "a área da região poligonal" em referência à área da região determinada por esse polígono. Além disso, utilizaremos, de maneira simplificada em alguns contextos, expressões sem o uso do termo "medida" ou do verbo medir em referência à medida do comprimento de um segmento.

Exercícios e problemas resolvidos

R6. Em relação ao prisma hexagonal regular a seguir, calcule:

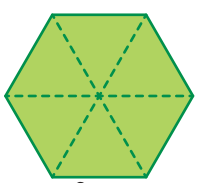


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) a área da base.
b) a área lateral.
c) a área total.

Resolução

a) Por ser hexagonal, a base pode ser decomposta em 6 triângulos equiláteros de lado 2 cm.



Como a área de um triângulo equilátero de lado a é dada por $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, segue que:

$$A_b = 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$$

Portanto, a área da base do prisma é $6\sqrt{3}$ cm².

b) A superfície lateral é formada por 6 retângulos de dimensões 2 cm e $2\sqrt{3}$ cm. Assim:

$$A_l = 6 \cdot \left(2 \cdot 2\sqrt{3}\right) = 24\sqrt{3}$$

Portanto, a área lateral do prisma é $24\sqrt{3}$ cm².

c) Para calcular a área total do prisma, fazemos:

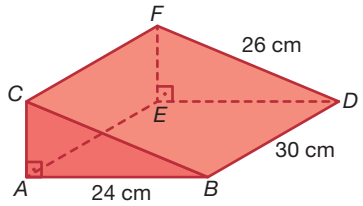
$$A_t = A_l + 2A_b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_t = 24\sqrt{3} + 2 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

Portanto, a área total do prisma é $36\sqrt{3}$ cm².

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R7. Considere o prisma reto apresentado. Sabendo que *ABDE*, *AEFC* e *BCFD* são retângulos, determine a área total desse prisma.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Inicialmente, verificamos que as bases desse prisma são triângulos retângulos, cujo comprimento do cateto menor não é conhecido. Utilizando o Teorema de Pitágoras, determinamos esse comprimento.

$(AC)^2 + (AB)^2 = (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 + 24^2 = 26^2 \Rightarrow (AC)^2 = 100 \Rightarrow AC = \sqrt{100} = 10$

Observação

Note que $AC = 10$, pois $AC > 0$.

Em seguida, calculamos a área da base e a área lateral do prisma.

- A área da base: $A_b = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120$

  Logo, a área da base do prisma é 120 cm^2.
- A área lateral: $A_l = 30 \cdot 10 + 30 \cdot 24 + 30 \cdot 26 = 1800$

  Assim, a área lateral do prisma é 1800 cm^2.

  Por fim, calculamos a área total do prisma.

$$A_t = A_l + 2A_b = 1800 + 2 \cdot 120 = 2040$$

Portanto, a área total do prisma é 2 040 cm^2.

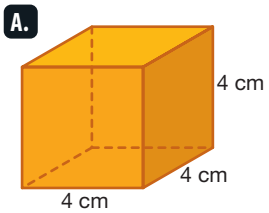
Exercícios e problemas

Professor, professora: Se julgar conveniente, solicite aos estudantes que resolvam algumas das tarefas propostas nesta seção com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica.

Anote as respostas no caderno.

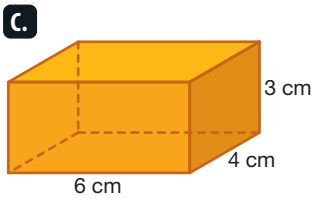
30. Calcule a área da superfície de cada prisma.

A.



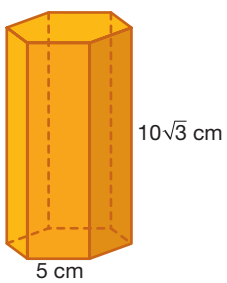
Cubo.
Resposta: 96 cm^2

C.



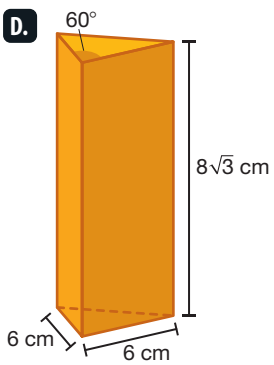
Paralelepípedo reto retângulo.
Resposta: 108 cm^2

B.



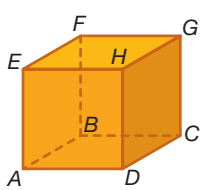
Prisma hexagonal regular.
Resposta: 375 $\sqrt{3}$ cm^2

D.



Prisma reto de base triangular.
Resposta: 162 $\sqrt{3}$ cm^2

31. Na imagem, está representado um cubo cuja área da superfície é igual a 54 cm^2.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Calcule o comprimento de cada aresta desse cubo. Resposta: 3 cm

b) Qual é o perímetro do quadrilátero *AEGC*? Resposta: $6 \cdot (1 + \sqrt{2})$ cm

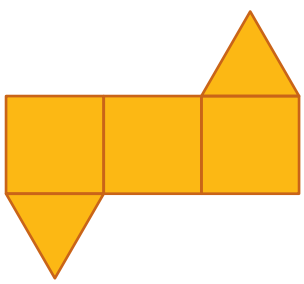
32. Todas as faces de um cubo de madeira com 120 cm de aresta foram pintadas de vermelho; em seguida, o cubo foi dividido em cubinhos com 4 cm de aresta.

a) Em quantos cubinhos o cubo vermelho foi dividido? Resposta: 27 000 cubinhos.

b) Quantos cubinhos têm ao menos duas faces pintadas de vermelho? Resposta: 344 cubinhos.

c) Qual é a razão entre a área total de cada cubinho e a do cubo vermelho? Resposta: $\frac{1}{900}$

33. Analise a planificação de um prisma triangular regular cujo comprimento das arestas das bases e das arestas laterais é igual a 30 cm.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual é a área da base desse prisma? Resposta: 225 $\sqrt{3}$ cm^2

b) Calcule a área lateral e a área total desse prisma. Resposta: $A_l = 2700$ cm^2; $A_t = 450 \cdot (6 + \sqrt{3})$ cm^2

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

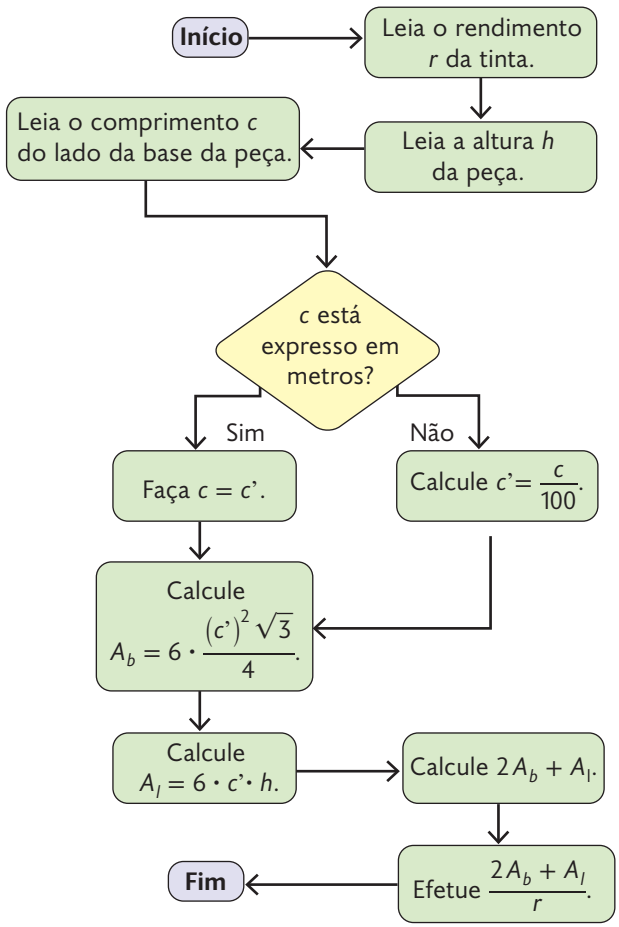
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

34. O seguinte problema foi proposto na aula de Matemática.

Determinar a quantidade de tinta necessária para pintar uma peça em formato de prisma regular de base hexagonal, com:

- o rendimento da tinta em metros quadrados por litro;
- a altura da peça em metros;
- o comprimento, em metros ou em centímetros, de cada lado da base da peça.

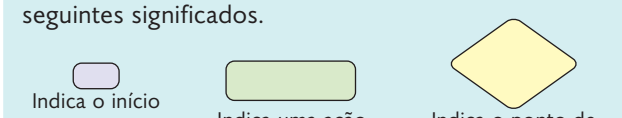
Para resolvê-lo, Antônio construiu o seguinte fluxograma.



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

As figuras que aparecem nesse fluxograma têm os seguintes significados.



Utilizando o fluxograma construído por Antônio e sabendo que com 1 L de tinta é possível pintar 100 m², determine a quantidade necessária de tinta para pintar uma peça em formato de prisma regular de 0,25 m de altura cuja base é um hexágono de 12 cm de lado.

Resposta: Aproximadamente 0,0025 L ou 2,5 mL.

35. Em quantos centímetros deve ser aumentada a diagonal de um cubo cuja área total é 384 cm², de modo que sua área lateral aumente 144 cm²?

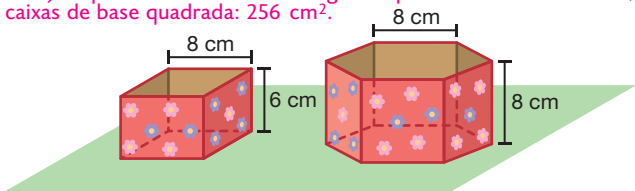
Resposta: 3,46 cm

Observação

Considere $\sqrt{3} = 1{,}73$.

36. Bruna confecciona e vende embalagens para presentes. Ela recebeu uma encomenda de cinco caixas com formato de prismas regulares, sendo duas de base hexagonal e três de base quadrada. Todas as caixas serão confeccionadas com papelão reciclado, e seus exteriores, com exceção da tampa, deverão ser revestidos com um papel colorido cujo preço é R$ 3,20 o metro quadrado. Analise as dimensões de cada uma das caixas.

36. a) Resposta: Caixas de base hexagonal: aproximadamente 550 cm²; caixas de base quadrada: 256 cm².



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Determine a área de cada uma das caixas que será revestida com o papel colorido.

b) Desconsiderando desperdícios, quantos reais Bruna vai gastar com papel colorido na confecção das cinco caixas?

Resposta: Aproximadamente R$ 0,60.

37. O quadrado do comprimento da diagonal de um prisma reto de base quadrada é igual ao triplo do quadrado do comprimento da diagonal de sua base. Sabendo que a área total desse prisma é 640 cm², determine:

a) o comprimento das arestas desse prisma.

Resposta: Aresta da base: 8 cm; aresta lateral: 16 cm.

b) a área lateral desse prisma.

Resposta: 512 cm²

38. Considere um pedaço retangular de cartolina com 20 cm de largura por 35 cm de comprimento. De cada "canto" dessa cartolina foi retirado um quadrado de lado x; em seguida, a cartolina foi dobrada na linha tracejada, de maneira a formar uma caixa sem tampa.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Calcule o valor de x, de modo que a área da superfície externa da caixa obtida seja 684 cm².

Resposta: x = 2 cm

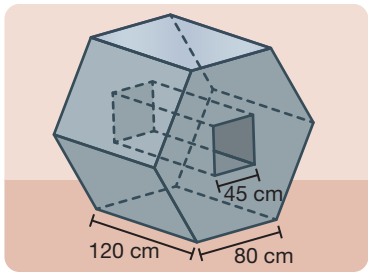
b) Calcule a área da base e a área lateral da caixa obtida.

Resposta: Área da base: 496 cm²; área lateral: 188 cm².

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

41. b) Resposta: Peça cúbica maior: 486 cm²; peça amarela: 54 cm².

39. Uma peça, confeccionada em certa liga metálica, tem a forma de um prisma hexagonal regular com um "recorte" em forma de prisma reto de base quadrada. Em seu processo de produção, ela teve sua superfície pintada com uma tinta anticorrosiva, cujo custo e rendimento por litro são, respectivamente, R$ 25,00 e 4 m².

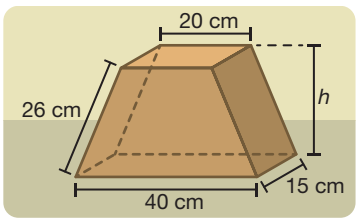


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual é a área total da superfície dessa peça?
Resposta: Aproximadamente 108 405 cm² ou 10,8405 m².

b) Quantos reais serão gastos com tinta para pintar essa peça?
Resposta: Aproximadamente R$ 67,75.

40. Utilizando 4 pedaços de papelão com formato de retângulo e 2 com formato de trapézio isósceles, Rafael confeccionou uma caixa que servirá como urna de votação em uma eleição que será realizada na escola onde ele estuda.



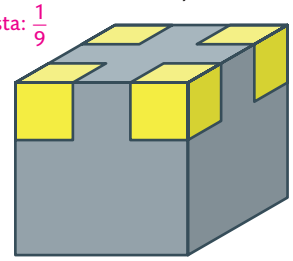
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Nessa caixa, qual é o valor de h?
Resposta: 24 cm

b) Quantos centímetros quadrados de papelão foram utilizados para montar a caixa?
Resposta: 3 120 cm²

41. Quatro peças amarelas com formato de cubos idênticos são encaixadas em outra peça, formando uma peça cúbica maior, como representado a seguir.

41. a) Resposta: $\frac{1}{9}$



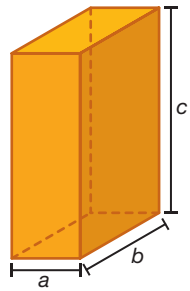
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que a área total da peça, antes de encaixar as peças amarelas, é 486 cm² e que a peça maior tem arestas com o triplo do comprimento das peças amarelas, responda às questões.

a) Qual é a razão entre a área total de cada peça amarela e a área total da peça cúbica maior?

b) Calcule a área total da peça cúbica maior e a área total de cada peça amarela.

42. A área total do paralelepípedo reto retângulo representado a seguir é 198 cm² e os lados a, b e c são dados em centímetros, tal que $b = 2a$ e $c = b + a$.



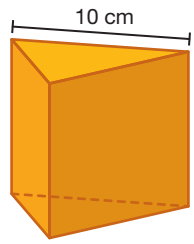
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Quais são as dimensões desse paralelepípedo?
Resposta: $a = 3$ cm, $b = 6$ cm e $c = 9$ cm.

b) Calcule o comprimento da diagonal desse paralelepípedo. Resposta: $3\sqrt{14}$ cm

c) Calcule a área da base e a área lateral desse paralelepípedo. Resposta: Área da base: 18 cm²; área lateral: 162 cm².

43. O prisma reto representado tem área total igual a 350 cm². 43. b) Resposta: Área da base: aproximadamente 43,25 cm²; área lateral: aproximadamente 264 cm².



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

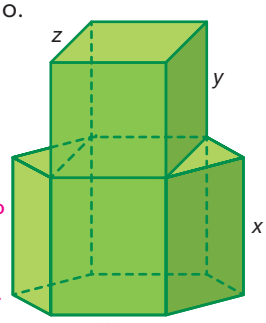
Observação
Considere $\sqrt{3} = 1{,}73$.

a) Qual é, em centímetros, a altura desse prisma?
Resposta: Aproximadamente 8,8 cm.

b) Calcule a área da base e a área lateral desse prisma.

44. A peça representada a seguir é composta de duas partes: uma com formato de prisma hexagonal regular e outra com formato de paralelepípedo reto retângulo.

Professor, professora: O item **b** da tarefa **44** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

a) Escreva um algoritmo que possibilite determinar a área total dessa peça, em metros quadrados, dados os valores de x, y, z e w, em metros. Em seguida, organize-o em um fluxograma.

b) Atribua valores para x, y, z e w. Em seguida, elabore um problema envolvendo a área total dessa peça. Por fim, peça a um colega que o resolva.

45. Sejam a, b e c, respectivamente, a altura, a largura e o comprimento, em centímetros, de um paralelepípedo reto retângulo. Sabendo que $a + b + c = 12$ e que $d^2 = 56$, em que d é o comprimento, em centímetros, da diagonal desse paralelepípedo, calcule sua área total. Resposta: 88 cm²

44. b) Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

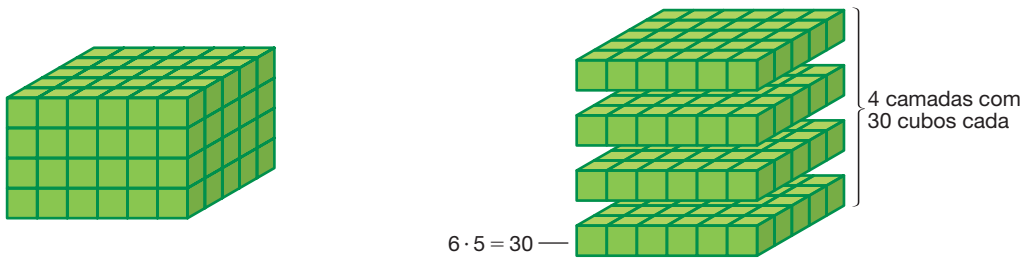
Volume de um prisma

OBJETO DIGITAL
***Infográfico clicável*:**
Calculando o desnível de um terreno

A seguir, estudaremos como calcular a medida do volume de diferentes tipos de prismas.

Volume do paralelepípedo reto retângulo

O paralelepípedo a seguir foi construído com cubos de 1 cm de aresta, isto é, cubos com 1 cm^3 de volume. O volume V desse paralelepípedo é igual à soma dos volumes dos cubos com os quais ele é formado. Para calcularmos o número de cubos e, consequentemente, o volume do paralelepípedo, multiplicamos a quantidade de cubos em cada camada pelo número de camadas.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$$V = \overbrace{6 \cdot 5}^{\text{cubos em cada camada}} \cdot \underbrace{4}_{\text{número de camadas}} = 120$$

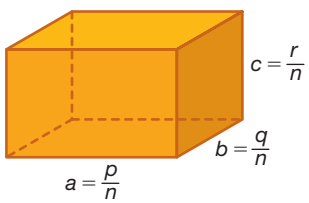
Assim, o volume do paralelepípedo é 120 cm^3.

Vamos demonstrar que o volume V de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões expressas pelos números racionais a, b e c é dado por $V = a \cdot b \cdot c$.

Demonstração

Inicialmente, considere um cubo unitário, ou seja, que tem volume igual a 1 u.v. (unidade de volume). Podemos decompor esse cubo em n^3 cubinhos de aresta $\frac{1}{n}$ u.c. (unidades de comprimento), em que n é um número natural diferente de zero. Consequentemente, cada um desses cubinhos tem volume igual a $\frac{1}{n^3}$ u.v.

Considere agora um paralelepípedo reto retângulo de dimensões expressas pelos números racionais a, b e c. Podemos escrever esses números como fração de mesmo denominador, ou seja, $a = \frac{p}{n}$, $b = \frac{q}{n}$ e $c = \frac{r}{n}$, em que p, q, r e n são números naturais diferentes de zero.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, podemos decompor esse paralelepípedo em p cubinhos de aresta $\frac{1}{n}$ u.c. no comprimento, q cubinhos de aresta $\frac{1}{n}$ u.c. na largura e r cubinhos de aresta $\frac{1}{n}$ u.c. na altura. Consequentemente, como queríamos demonstrar, o volume V desse paralelepípedo é:

$$V = p \cdot q \cdot r \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} \cdot \frac{r}{n} = a \cdot b \cdot c$$

É possível demonstrar que o volume de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões expressas por números reais é obtido calculando-se o produto entre seu comprimento, sua largura e sua altura, porém não o faremos neste livro.

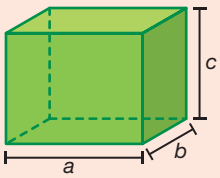
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Questão A. Escreva um algoritmo que possibilite calcular o volume de um paralelepípedo reto retângulo, dadas suas dimensões. Em seguida, organize-o em um fluxograma.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

O volume V de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c é:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

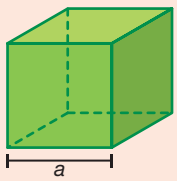


A área da base do paralelepípedo é dada por $A_b = a \cdot b$. Dessa maneira, também podemos escrever a seguinte fórmula para o volume:

$$V = A_b \cdot c$$

Para obter o volume de um cubo, multiplicamos suas dimensões. Porém, como elas são iguais, temos:

$$V = a \cdot a \cdot a \text{ ou } V = a^3$$



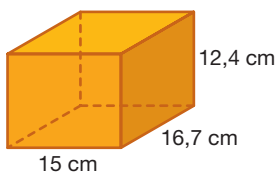
Observação

Lembre-se de que o cubo é um caso particular de paralelepípedo reto retângulo.

Exemplo

O volume V do paralelepípedo reto retângulo representado a seguir é igual a 3 106,2 cm^3, pois:

$$V = 15 \cdot 16{,}7 \cdot 12{,}4 = 3\,106{,}2$$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

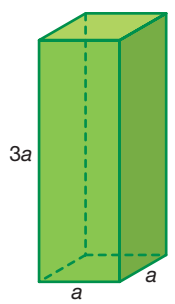
Exercícios e problemas resolvidos

R8. Um paralelepípedo reto retângulo, cuja base é um quadrado, tem a altura igual ao triplo do comprimento das arestas da base. Se o volume desse paralelepípedo é 12 288 cm^3, qual é o comprimento da aresta de sua base?

Resolução

Indicando por a o comprimento das arestas da base, a altura desse paralelepípedo é $3a$. Assim, o volume V dessa figura é:

$$V = a \cdot a \cdot 3a = 3a^3$$



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Substituindo V por 12 288, segue que:

$$12\,288 = 3a^3 \Rightarrow a^3 = \frac{12\,288}{3} \Rightarrow a^3 = 4\,096 \Rightarrow$$

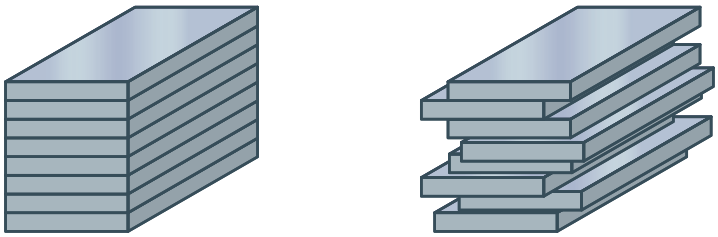
$$\Rightarrow a = \sqrt[3]{4096} = 16$$

Portanto, o comprimento da aresta da base desse paralelepípedo é 16 cm.

Princípio de Cavalieri

Considere algumas chapas metálicas idênticas em forma de paralelepípedo reto retângulo, empilhadas de duas maneiras diferentes, como mostram as figuras.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



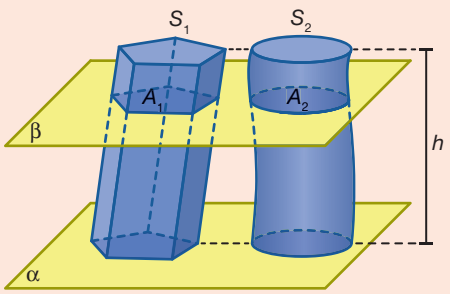
Questão B. Qual é a relação entre os volumes desses dois empilhamentos?

Questão B. Resposta: Os volumes são iguais. Espera-se que os estudantes percebam que o volume de cada uma dessas pilhas é o mesmo, independentemente da maneira como as chapas são empilhadas.

Diante dessa situação, enunciaremos o Princípio de Cavalieri.

Considere as figuras geométricas espaciais S_1 e S_2, cuja altura h é a mesma, apoiadas em um mesmo plano horizontal α, e um plano β, paralelo a α, que determina em S_1 e S_2 duas regiões planas de área A_1 e A_2.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



Nesse caso, se $A_1 = A_2$ para qualquer plano β, o volume de S_1 é igual ao de S_2, ou seja, $V_{S_1} = V_{S_2}$.

Observação

O matemático Bonaventura Cavalieri (1598-1647) nasceu em Milão, na Itália. Foi estudante de Galileu e atuou como professor na Universidade de Bolonha por quase duas décadas.



BIBLIOTECA MUNICIPAL DE TRENTO

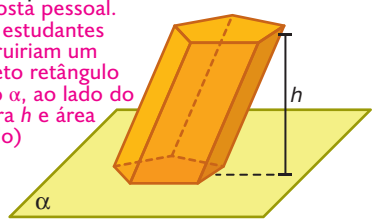
Bonaventura Cavalieri, de Giuseppe Fusinati. Gravura em cobre, 27 cm × 16,6 cm, 1837.

Volume de um prisma qualquer

Imagine um prisma qualquer de altura h, cuja base seja um polígono de área A contido em um plano α.

Questão C. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam que construiriam um paralelepípedo reto retângulo apoiado no plano α, ao lado do prisma, com altura h e área da base (retângulo) igual a A.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



Observação

Na imagem, a base do prisma qualquer é representada por um pentágono.

Questão C. Qual estratégia você utilizaria para calcular o volume desse prisma?

Questão D. Mostre que, para determinar o volume de um prisma qualquer, multiplicamos a área da base pela sua altura.

Questão D. Resposta: Utilizando a estratégia descrita na questão C, temos um prisma qualquer e um paralelepípedo reto retângulo apoiados em um plano α, ambos de altura h e área da base igual a A. Suponha um plano horizontal β, paralelo a α, que produz seções de áreas A' e A'' no prisma qualquer e no paralelepípedo, respectivamente. Como essas figuras são prismas, então uma seção paralela à base é congruente com essa base. Logo, como figuras congruentes têm áreas iguais, temos $A' = A = A''$. Consequentemente, pelo Princípio de Cavalieri, o paralelepípedo e o prisma qualquer têm volumes iguais. Como estudamos anteriormente, o volume do paralelepípedo reto retângulo é igual a $A \cdot h$. Assim, o volume do prisma qualquer também é igual a $A \cdot h$, ou seja, o produto da área da base por sua altura.

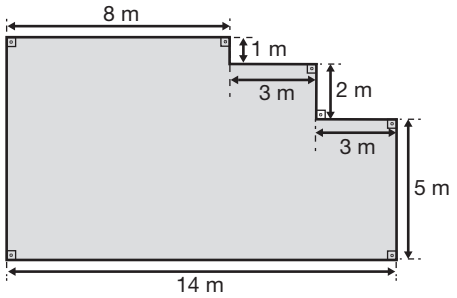
O volume de um prisma é obtido multiplicando a área da base pela sua altura.

Questão E. Qual é o volume de um prisma de altura 4 cm cuja base é um hexágono regular de lado 5 cm? Resposta: $150\sqrt{3}$ cm³

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R9. (Enem, 2019) Um mestre de obras deseja fazer uma laje com espessura de 5 cm utilizando concreto usinado, conforme as dimensões do projeto dadas na figura. O concreto para fazer a laje será fornecido por uma usina que utiliza caminhões com capacidades máximas de 2 m^3, 5 m^3 e 10 m^3 de concreto.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA/ENEM 2019

Qual é a menor quantidade de caminhões, utilizando suas capacidades máximas, que o mestre de obras deverá pedir à usina de concreto para fazer a laje?

a) Dez caminhões com capacidade máxima de 10 m^3.

b) Cinco caminhões com capacidade máxima de 10 m^3.

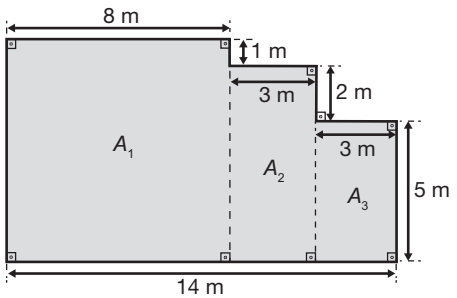
c) Um caminhão com capacidade máxima de 5 m^3.

d) Dez caminhões com capacidade máxima de 2 m^3.

e) Um caminhão com capacidade máxima de 2 m^3.

Resolução

De acordo com as informações apresentadas no problema, a laje tem formato de prisma reto de altura 5 cm, cuja base pode ser decomposta em três retângulos, conforme apresentado, os quais nomeamos A_1, A_2 e A_3.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Em seguida, calculamos a área A desse polígono.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 8 \cdot (5 + 2 + 1) + 3 \cdot (5 + 2) + 3 \cdot 5 = 64 + 21 + 15 = 100$$

Logo, a área da base do prisma que representa a laje é 100 m^2.

Convertendo a medida da altura em metros, temos:

$$5 \text{ cm} = \frac{5}{100} \text{ m} = 0{,}05 \text{ m}$$

Na sequência, calculamos o volume V do prisma que representa a laje. Desse modo:

$$V = 100 \cdot 0{,}05 = 5$$

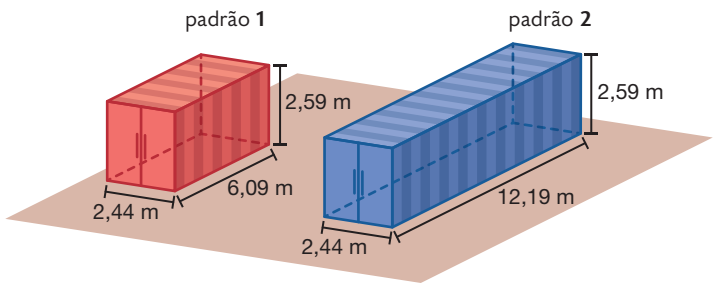
Logo, o volume é 5 m^3 e, consequentemente, o mestre de obras deverá pedir à usina de concreto um caminhão com capacidade máxima de 5 m^3. Portanto, a alternativa correta é a **c**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

46. Analise as dimensões dos dois padrões mais populares de contêineres.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual é a capacidade aproximada dos contêineres de padrões **1** e **2**?
Resposta: Padrão **1**: 38,49 m^3; padrão **2**: 77 m^3.

b) Determine a área aproximada da superfície externa dos contêineres de padrões **1** e **2**. Resposta: Padrão **1**: 73,9 m^2; padrão **2**: 135,27 m^2.

Dica

Para resolver esta tarefa, considere que os contêineres têm formato de paralelepípedo reto retângulo e desconsidere a espessura deles no cálculo do volume.

47. A área da superfície de um cubo é 384 cm^2. Em quantos centímetros deve ser aumentada cada aresta desse cubo para que seu volume passe a ser 1728 cm^3? Resposta: 4 cm

Professor, professora: Se necessário, ao trabalhar com a tarefa **48**, informe aos estudantes que paralelepípedo retangular reto é o mesmo que paralelepípedo reto retângulo.

48. Certa fábrica usa embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto para comercializar as sobremesas congeladas que produz. Cada embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm de medidas internas. No processo de confecção dessa sobremesa, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1000 cm^3 e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com o produto final, sem transbordar.

O volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocada na embalagem é:

a) 1000 **c)** 600 **e)** 450

b) 800 **d)** 550

Resposta: Alternativa **c**.

49. Em um recipiente com formato de paralelepípedo reto retângulo, cujas medidas internas da largura, do comprimento e da altura são respectivamente 10 cm, 12 cm e 14 cm, foi colocada água até que esta atingisse 8 cm de altura. Em seguida, foi inserido no recipiente um cubo sólido que ficou totalmente submerso, fazendo o nível da água subir 1,8 cm.

a) Qual é a capacidade desse recipiente em centímetros cúbicos? Resposta: 1680 cm^3

b) Qual é o volume de água dentro do recipiente? Resposta: 960 cm^3

c) Qual é o comprimento da aresta do cubo colocado no recipiente? Resposta: 6 cm

50. Uma galeria comercial foi dividida em 10 salas retangulares, todas do mesmo tamanho, cada uma com 4 m de largura e 6 m de comprimento. O piso do local é feito de concreto com 15 cm de espessura. Quantos metros cúbicos de concreto foram utilizados no piso da galeria?
Resposta: 36 m^3

51. Um líquido, que ocupa uma altura de 50 cm em um recipiente **A**, de forma cúbica, será despejado em um recipiente **B**, também de forma cúbica, cujo comprimento da diagonal é o dobro do comprimento da diagonal de **A**. 51. a) Resposta: $\frac{1}{8}$

a) Calcule a razão entre o volume de **A** e o de **B**.

b) Que altura o líquido ocupará no recipiente **B**?
Resposta: 12,5 cm

52. Um paralelepípedo reto retângulo tem dimensões a, b e c com $a < b < c$. Diminuindo em 20% a medida de a e mantendo a medida de b, o que deve ser feito com a medida de c para que o volume do paralelepípedo não seja alterado?
Resposta: A medida de c deve ser aumentada em 25%.

53. No projeto de construção de uma ponte está prevista a instalação de 8 colunas de sustentação, todas com a forma de um prisma regular hexagonal, com 2 m de aresta da base e 12 m de altura. Sabendo que o volume de cada coluna é composto de 80% de concreto e 20% de ferragem, responda às questões.

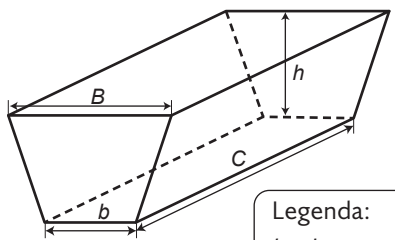
a) Quantos metros cúbicos de volume tem cada uma das colunas? Resposta: Aproximadamente 124,7 m^3.

b) Qual é o volume de concreto utilizado para construir as 8 colunas? Resposta: 798,08 m^3

54. De um reservatório com formato cúbico, que estava totalmente cheio, foram retirados 2 700 L de água, fazendo o nível da água baixar 30 cm. Qual é a capacidade total, em litros, desse reservatório?
Resposta: 27 000 L

55. Certo líquido, que ocupava 75% da capacidade de um recipiente cúbico, foi despejado em um recipiente com forma de prisma triangular regular, atingindo 40% da sua altura. Qual é a capacidade do recipiente em forma de prisma triangular, sabendo que a do recipiente cúbico é de 4 L?
Resposta: 7,5 L

56. (Enem, 2014) Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Legenda:
b – largura do fundo
B – largura do topo
C – comprimento do silo
h – altura do silo

KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA/ENEM 2014

Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 desse tipo de silo.

EMBRAPA. *Gado de corte*. Disponível em: https://www.embrapa.br/gado-de-corte. Acesso em: 22 maio 2024. (adaptado)

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é:

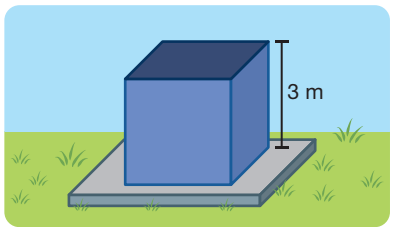
a) 110 **c)** 130 **e)** 260

b) 125 **d)** 220

Resposta: Alternativa **a**.

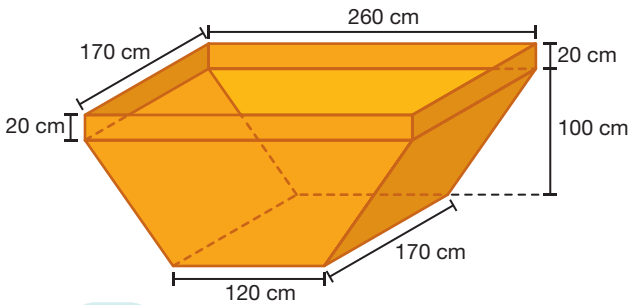
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

57. Uma bomba-d'água enche uma caixa cúbica como da figura a seguir em 3 h 45 min. Calcule o tempo necessário para que essa mesma bomba encha completamente uma caixa com formato de paralelepípedo reto retângulo de dimensões 2 m, 5,4 m e 3 m. Resposta: 4 h 30 min



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

58. Lucas contratou um serviço de remoção de entulhos com caçambas estacionárias durante uma reforma em sua casa. A quantidade de entulho gerado na reforma foi transportada em quatro caçambas com forma e dimensões representadas a seguir. Resposta: Aproximadamente 16,46 m^3.



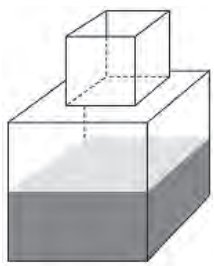
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Dica

A caçamba pode ser decomposta em duas partes com formas de paralelepípedo reto retângulo e prisma reto, cujas bases são trapézios isósceles.

Considerando que não possa ser colocado entulho sobre a borda da caçamba, quantos metros cúbicos de entulho, no máximo, foram gerados e removidos na reforma da casa de Lucas?

59. (Enem, 2014) Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



ENEM 2014

Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

Resposta: Alternativa **b**.

a) 8 **c)** 16 **e)** 24

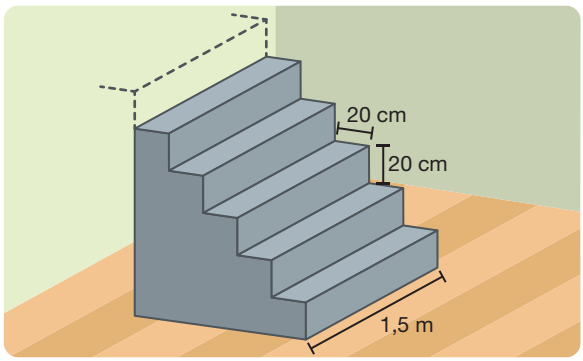
b) 10 **d)** 18

60. A base de um prisma reto, cujo volume é 640 cm^3, tem o formato de um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa $8\sqrt{2}$ cm.

a) Quantos centímetros de altura tem esse prisma? Resposta: 20 cm

b) Calcule a área total desse prisma. Resposta: Aproximadamente 610,27 cm^2.

61. A figura representa parte de uma escada construída com blocos de concreto na forma de prisma reto com 1,5 m de altura, cuja base é um quadrado de lado 20 cm.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Quantos blocos são necessários para construir uma escada como essa com 20 degraus? Resposta: 210 blocos.

b) Qual é o volume de concreto necessário para construir a escada descrita no item **a**? Resposta: 12,6 m^3

62. Uma piscina deve ser projetada de maneira a ter o maior volume possível e formato de prisma reto retângulo com dimensões iguais a x m, $(30 - x)$ m e 2,5 m.

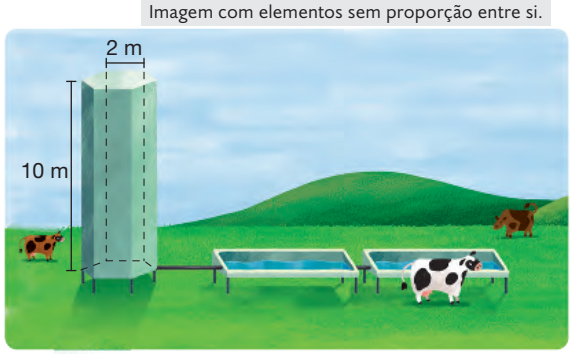
a) Quais devem ser as dimensões dessa piscina? Resposta: 2,5 m, 15 m e 15 m.

b) De quantos metros cúbicos será a capacidade dessa piscina? Resposta: 562,5 m^3

63. Um tanque em forma de prisma hexagonal regular, conforme representado a seguir, é utilizado como reservatório de água e abastece bebedouros para o gado em uma fazenda. Nesses bebedouros, são consumidos diariamente cerca de 10 000 L de água.

Estando inicialmente cheio, durante quantos dias a água do reservatório consegue suprir os bebedouros? Resposta: Aproximadamente 10 dias.

Imagem com elementos sem proporção entre si.



LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Ao trabalhar com a tarefa **59**, informe aos estudantes que, no enunciado, quando é dito "medida da aresta", o problema se refere à medida do comprimento da aresta.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

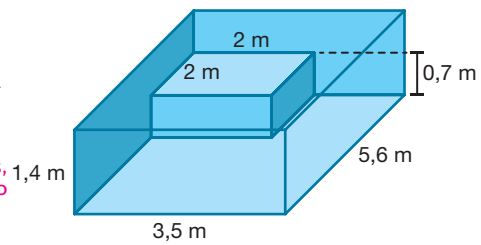
64. Um grupo de voluntários decidiu revitalizar uma praça no bairro onde moram. Para isso, além de reparos nas estruturas existentes, eles decidiram construir alguns bancos de concreto, oferecendo mais conforto para quem frequenta o espaço. Optou-se por um modelo de banco constituído de um assento apoiado em dois blocos idênticos. O assento é um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 1,4 m, 0,5 m e 0,1 m. Cada apoio é um prisma de altura 0,4 m, cuja base é um triângulo equilátero de lado 0,2 m. A superfície dos apoios em contato com o chão e o assento são as bases dos prismas. (Considere $\sqrt{3} = 1{,}7$.)

a) Sabendo que eles têm material para produzir 2 m^3 de concreto, determine quantos bancos desse modelo será possível construir, utilizando uma calculadora. Resposta: 23 bancos.

b) Para a pintura dos bancos, são necessárias 3 demãos de certa tinta. Sabe-se que uma lata dessa tinta é suficiente para pintar 45 m^2. Utilizando uma calculadora, determine quantas latas dessa tinta devem ser adquiridas para a pintura da quantidade de bancos indicada por você no item **a**. Resposta: 4 latas.

65. Um condomínio pretende construir uma piscina com formato de paralelepípedo reto retângulo. Um morador sugeriu que houvesse uma elevação em um dos cantos da parte interna da piscina.

69. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem. A tarefa **69** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.



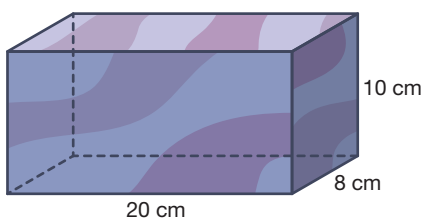
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Para fundamentar sua sugestão, o morador apresentou a variação na área interna da base da piscina, em metros quadrados, e na capacidade máxima, em metros cúbicos.

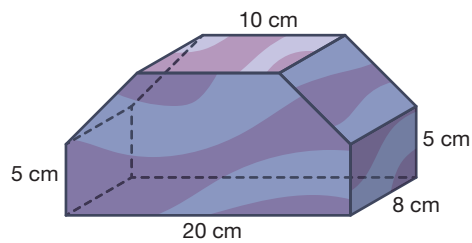
a) Considerando que os cálculos realizados pelo morador estão corretos, quais foram os resultados apresentados por ele? Resposta: Variação de 0 m^2 na área interna e redução de 2,8 m^3 na capacidade máxima.

b) Caso pudesse opinar a respeito da construção dessa piscina, você aceitaria a sugestão do morador? Escreva um argumento que fundamente sua opinião. Resposta pessoal. Sugestões de resposta: Sim, pois não gera aumento de custos com revestimento e diminui o volume de água que deve ser tratada, reduzindo, assim, custos. Não, pois reduz o espaço disponível para o uso da piscina.

66. Certo produto era vendido em uma embalagem com formato de paralelepípedo reto retângulo. Ao perceber que havia espaços vazios na embalagem, a empresa responsável alterou o formato para o de um prisma reto, cuja base é um hexágono.



Embalagem antiga (formato de paralelepípedo reto retângulo).



Nova embalagem (formato de prisma reto).

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que a base da nova embalagem pode ser decomposta em um retângulo e em um trapézio isósceles com 5 cm de altura, determine a redução na área da superfície e no volume da embalagem desse produto. (Considere $\sqrt{2} = 1{,}41$.) Resposta: Área: aproximadamente 97,2 cm^2, volume: 200 cm^3.

67. Qual é o comprimento da aresta de um cubo que tem volume igual ao de um prisma reto com 20 cm de altura, cuja base é um pentágono de área igual a 25,6 cm^2?
Resposta: 8 cm

68. A embalagem de certo produto terá formato de prisma regular, cuja base é um triângulo equilátero com o comprimento da altura igual a $2\sqrt{3}$ cm. Sabendo que o comprimento da aresta da base do prisma que representa essa embalagem é x cm e sua altura é $4x$ cm, determine o volume dessa embalagem. (Considere $\sqrt{3} = 1{,}7$.) Resposta: Aproximadamente 108,8 cm^3.

69. Esboce uma peça composta de dois prismas retos de sua escolha. Em seguida, de acordo com a peça esboçada, elabore um problema envolvendo os conteúdos estudados sobre volume. Por fim, peça a um colega que o resolva.

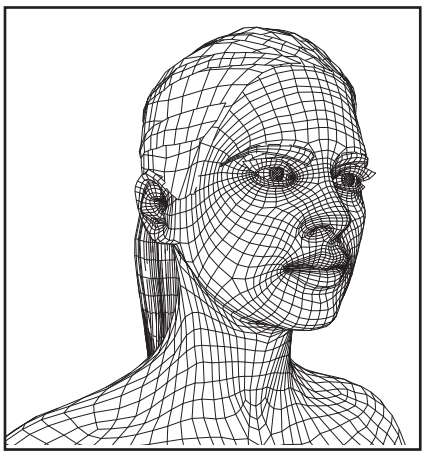
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

TRABALHO E JUVENTUDES

O que faz um artista 3D?

Os poliedros são figuras tridimensionais que não se limitam apenas ao campo da Matemática. Quando nos reportamos ao mundo virtual, constatamos que tais figuras geométricas também moldam esse meio. É nesse contexto que se destaca o trabalho do artista 3D, também conhecido como modelador 3D.

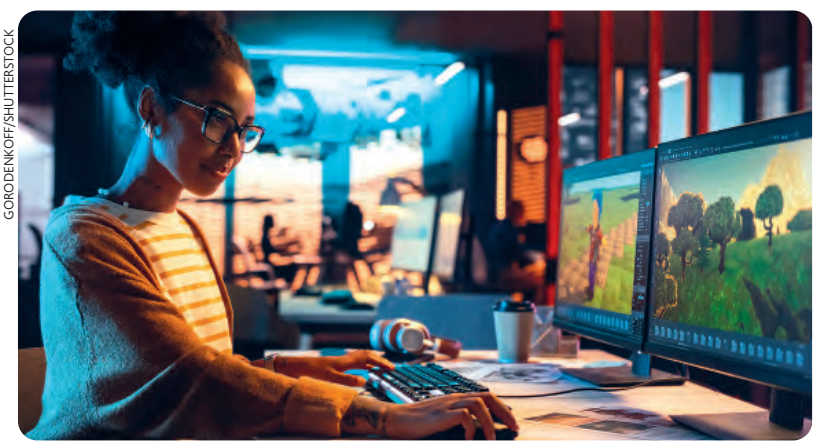
Os profissionais artistas 3D trabalham com a criação de imagens de personagens, cenários e objetos tridimensionais com um toque de realismo no ciberespaço. Para isso, utilizam *softwares* avançados de modelagem e programas de computação gráfica para criar elementos por meio da representação matemática de uma superfície ou de um objeto volumétrico. Eles utilizam ferramentas da computação para manipular, por exemplo, malhas poligonais a fim de criar animações e ilustrações digitais em três dimensões.



CHEREZOFF/SHUTTERSTOCK

Desenho de uma cabeça humana em 3D utilizando modelagem poligonal.

Por meio do seu trabalho, esses artistas buscam transformar ideias que estão no papel em elementos tridimensionais para desenvolver inúmeros trabalhos com finalidades diferentes, que englobam desde filmes, jogos de *videogames*, campanhas publicitárias, experiências visuais imersivas até a elaboração de desenhos industriais. Além disso, o artista 3D pode desenvolver projetos que auxiliam o trabalho de outros profissionais em diversas áreas, como Arquitetura, Engenharia, Propaganda e *Marketing* e Medicina.



GORODENKOFF/SHUTTERSTOCK

Artista 3D utilizando *softwares* de modelagem para adicionar detalhes a um ambiente virtual de um jogo de *videogame*.

Observação

Ainda não há um curso superior específico para se tornar um artista 3D. Para o exercício da profissão, os profissionais tornam-se aptos por meio de habilidades e conhecimentos adquiridos em cursos como Engenharia, Arquitetura, Computação gráfica, *Design* e Artes visuais, oferecidos em uma instituição que seja reconhecida pelo Ministério da Educação (MEC).

A arte 3D é uma tecnologia recente que trouxe grande inovação ao universo da modelagem tridimensional, exigindo dos profissionais habilidades artísticas, conhecimento em computação gráfica e domínio dos principais *softwares* de criação 3D.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Você já tinha ouvido falar sobre a profissão de artista 3D? O que mais chamou a sua atenção em relação a essa carreira? Converse com os colegas.

1. Resposta pessoal. Incentive os estudantes a expressar suas impressões sobre a profissão e a comentar algo que lhes chamou a atenção. Pode ser referente ao uso das tecnologias para o exercício da profissão, como os *softwares* de modelagem avançados e programas de computação gráfica para criação de imagens tridimensionais, ou ao trabalho que esses profissionais podem desempenhar em filmes, jogos de *videogames*, campanhas publicitárias etc.

2. A profissão de artista 3D está entre as opções de carreira que você gostaria de exercer no futuro? Justifique sua resposta.

Resposta pessoal. Solicite aos estudantes que exponham oralmente as explicações e razões pelas quais a profissão de artista 3D estaria ou não entre as opções de sua escolha futura. Depois da manifestação de todos, avalie com eles o interesse geral da turma pelo exercício da profissão.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Pirâmides

Neste tópico, estudaremos as pirâmides, que, como sabemos, constituem outro tipo de poliedro. Analise a seguir uma embalagem e algumas construções que lembram pirâmides.

Imagens não proporcionais entre si.



FRANK LEGROS/ALAMY/FOTOARENA

Museu do Louvre, em Paris, França, em 2024.



ALBERT IGOREVICH/SHUTTERSTOCK

Embalagem de presente.



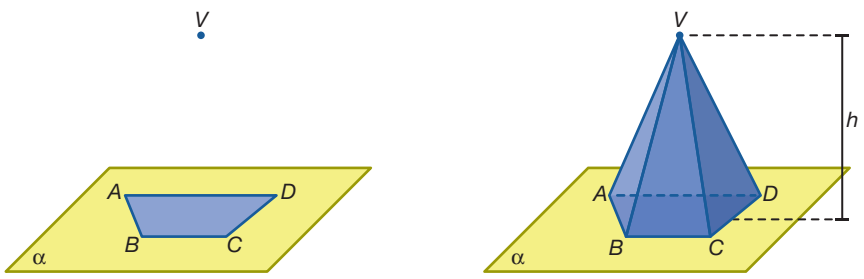
LAL NALLATH/SHUTTERSTOCK

Pirâmides egípcias, em Gizé, no Cairo, Egito, em 2024.

Para definir uma pirâmide, considere um plano α, um polígono convexo $A_1A_2...A_n$ e um ponto V não pertencente ao plano. Dois vértices consecutivos de $A_1A_2...A_n$ determinam com V um triângulo. A união de todos esses triângulos com o polígono $A_1A_2...A_n$ é chamada **pirâmide de base** $A_1A_2...A_n$ e **vértice** V.

Os segmentos $\overline{A_1V}, \overline{A_2V}, ..., \overline{A_nV}$ são chamados **arestas laterais**, e os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_nA_1}$, **arestas da base**. Já os triângulos $A_1A_2V, A_2A_3V, ..., A_nA_1V$ são chamados **faces laterais**.

Supondo o polígono convexo $ABCD$ contido em α e o ponto V não pertencente ao plano, temos:



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Nessa pirâmide, segue que:

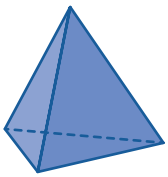
- a **base** é o polígono $ABCD$.
- o **vértice da pirâmide** é o ponto V.
- as **arestas laterais** são $\overline{AV}$, $\overline{BV}$, $\overline{CV}$ e $\overline{DV}$.
- as **arestas da base** são $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$.
- as **faces laterais** são os triângulos ABV, BCV, CDV e ADV.
- a **altura** é a distância h entre o plano α e o vértice V.

Observação

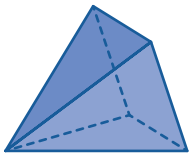
A **altura** de uma pirâmide é a distância entre o vértice da pirâmide e o plano que contém sua base.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

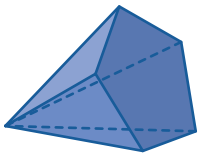
Uma pirâmide pode ser denominada de acordo com sua base. Se a base é um triângulo, a pirâmide é **triangular**; se a base é um quadrilátero, a pirâmide é **quadrangular**; e assim por diante. Analise alguns exemplos:



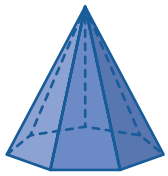
Pirâmide triangular.



Pirâmide quadrangular.



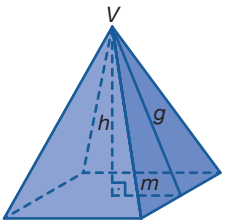
Pirâmide pentagonal.



Pirâmide heptagonal.

Professor, professora: Lembre os estudantes de que todo polígono regular pode circunscrever uma circunferência e que o raio de uma circunferência inscrita em um polígono regular corresponde ao apótema do polígono.

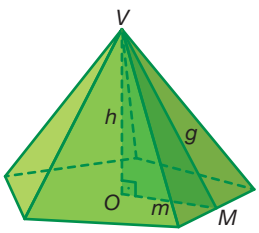
Uma pirâmide é dita **regular** quando sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal de seu vértice no plano que contém sua base coincide com o centro do polígono da base. Em toda pirâmide regular, as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes. Além disso, o apótema do polígono da base é o **apótema da base**, e a altura de uma face lateral é o **apótema da pirâmide**.



m: comprimento do apótema da base
g: comprimento do apótema da pirâmide
h: altura da pirâmide

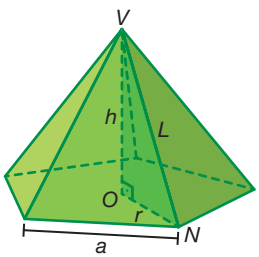
Em uma pirâmide regular, podemos destacar quatro triângulos retângulos e determinar algumas relações entre o comprimento de seus lados. Indicando por L, a, r, g, m e h, respectivamente, o comprimento da aresta lateral, da aresta da base, do raio da circunferência que circunscreve a base, do apótema da pirâmide, do apótema da base e a altura, temos:

a) $\triangle VOM$



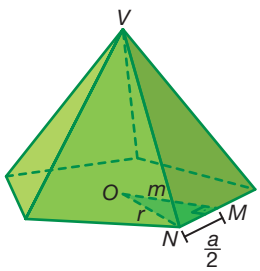
$g^2 = m^2 + h^2$

b) $\triangle VON$



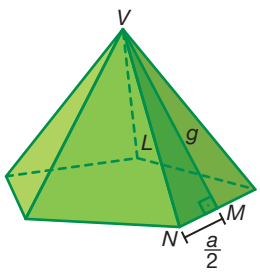
$L^2 = r^2 + h^2$

c) $\triangle OMN$



$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2$

d) $\triangle VMN$



$L^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + g^2$

Observação

O centro de um polígono regular é o centro das circunferências inscritas e circunscritas nesse polígono.

Observação

Como exemplo, destacamos os quatro triângulos retângulos em uma pirâmide pentagonal regular. Nessa pirâmide, *O* é o centro do polígono da base.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Área da superfície de uma pirâmide

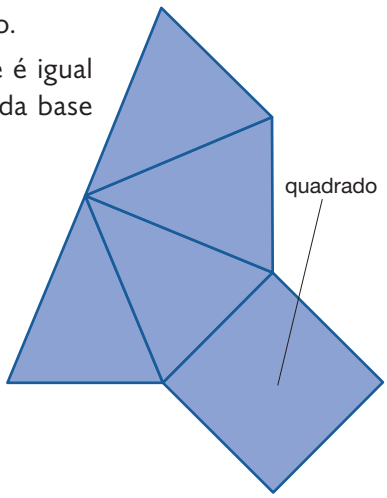
Professor, professora: Ao definir a área da superfície da pirâmide, comente que não se trata do volume da pirâmide, esclarecendo isso na análise da sua planificação. Pode ser conveniente, em momento oportuno, salientar que as unidades de medida de área são diferentes das unidades de medida de volume. Para a área, usa-se a unidade de medida de comprimento ao quadrado (m^2, por exemplo), enquanto para o volume, é utilizada a unidade ao cubo (m^3, por exemplo).

Assim como nos prismas, em uma pirâmide:

- a **superfície lateral** corresponde à reunião de todas as suas faces laterais, sendo a área dessa superfície a **área lateral** da pirâmide (A_l);
- a **área da base** corresponde à área do polígono que é a base da pirâmide (A_b);
- a **superfície total** corresponde à reunião da superfície lateral com a base, sendo a área dessa superfície a **área total** da pirâmide (A_t).

Assim, a área total de uma pirâmide corresponde à área lateral mais a área da base, isto é: $A_t = A_l + A_b$.

Analise a representação de uma pirâmide regular e sua planificação.



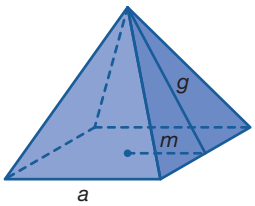
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Nesse caso, a área total da pirâmide é dada pela área lateral, que é igual a quatro vezes a área de uma face (triângulo isósceles) mais a área da base (quadrado).

$$A_t = A_l + A_b$$

$$A_t = 4 \cdot \frac{ag}{2} + a^2$$

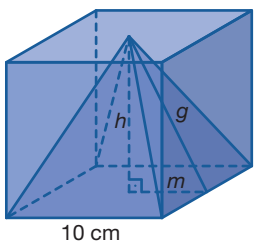
$$A_t = 2ag + a^2$$



Professor, professora: Explique aos estudantes que é possível compor outras planificações desta pirâmide.

Exercícios e problemas resolvidos

R10. A figura apresenta uma pirâmide quadrangular regular inscrita em um cubo de aresta 10 cm, de modo que a base e o vértice da pirâmide estão contidos nas bases do cubo.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

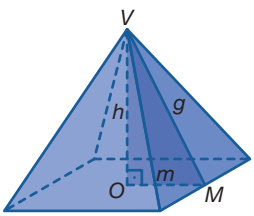
Em relação a essa pirâmide, calcule:

a) a altura.

b) o comprimento do apótema da base.

c) o comprimento do apótema da pirâmide.

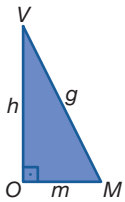
Resolução



a) A distância entre o vértice e a base da pirâmide corresponde ao comprimento da aresta do cubo. Logo, $h = 10$ cm.

b) O apótema da base da pirâmide e do cubo são coincidentes. Logo, $m = 5$ cm.

c) O apótema da base, a altura e o apótema da pirâmide formam, nessa ordem, os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo *VOM*, conforme a figura.



$$g^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 5^2 + 10^2 \Rightarrow g^2 = 125 \Rightarrow g = 5\sqrt{5}$$

Portanto, $g = 5\sqrt{5}$ cm.

Observação

Temos $g = 5\sqrt{5}$, pois $g > 0$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R11. O apótema de uma pirâmide hexagonal regular tem $4\sqrt{3}$ cm de comprimento, e a aresta da base, 4 cm. Calcule:

a) a área da base. **b)** a área lateral. **c)** a área total.

Resolução

a) A base hexagonal pode ser decomposta em 6 triângulos equiláteros de lado 4 cm. Assim:

$$A_b = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{16 \cdot \sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$$

Portanto, a área da base é $24\sqrt{3}$ cm².

b) A superfície lateral é formada por 6 triângulos isósceles de base 4 cm e altura $4\sqrt{3}$. Assim:

$$A_l = 6 \cdot \left(\frac{4^2\sqrt{3}}{2}\right) = 48\sqrt{3}$$

Logo, a área lateral é $48\sqrt{3}$ cm².

c) A área total da pirâmide é dada por:

$$A_t = A_l + A_b = 48\sqrt{4} + 24\sqrt{3} = 72\sqrt{3}$$

Portanto, a área total é $72\sqrt{3}$ cm².

Professor, professora: Na tarefa **73**, se necessário, explique aos estudantes que, em termos simples, a circunferência inscrita é a que fica dentro do polígono, e a circunscrita é a que fica na parte de fora.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

70. Qual relação existe entre o número de lados do polígono da base da pirâmide e o número:

- total de arestas da pirâmide?
- de faces da pirâmide? Respostas no final do **Livro do Estudante**.

71. Considere uma pirâmide hexagonal regular de aresta 4 cm. Sabendo que essa pirâmide tem 12 cm de altura, determine o comprimento:

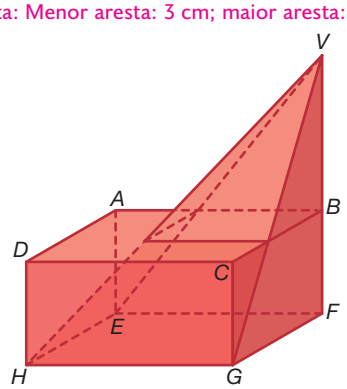
a) do raio da base. Resposta: 4 cm

b) da aresta lateral. Resposta: $4\sqrt{10}$ cm

c) do apótema da base. Resposta: $2\sqrt{3}$ cm

d) do apótema da pirâmide. Resposta: $2\sqrt{39}$ cm

72. Considere o paralelepípedo *ABCDEFGH*, com GH = 4 cm, AD = 3 cm e CG = 2 cm. Ao traçarmos o segmento $\overline{BV}$ com 3 cm, perpendicular ao plano que contém a face *ABCD*, e os segmentos $\overline{EV}$, $\overline{GV}$ e $\overline{HV}$, obtemos uma pirâmide de base quadrangular. Determine o comprimento da menor e da maior aresta dessa pirâmide.
Resposta: Menor aresta: 3 cm; maior aresta: $5\sqrt{2}$ cm.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

73. Uma pirâmide quadrangular regular tem em sua base uma circunferência inscrita de raio 2 cm. Qual é o comprimento do raio de uma circunferência que circunscreve a base dessa pirâmide?
Resposta: $2\sqrt{2}$ cm

74. Em geral, os dados têm forma de poliedros com gravações em suas faces, sendo muito utilizados para gerar resultados aleatórios em jogos tradicionais de tabuleiro ou em jogos de RPG (*Role-Playing Game*). Considere um dado com formato de tetraedro regular, cuja soma dos comprimentos das arestas é 12 cm. Em relação a ele, calcule:

a) a área lateral. Resposta: $3\sqrt{3}$ cm²

b) a área total. Resposta: $4\sqrt{3}$ cm²



Dado com formato de tetraedro regular.

TIMQUO/SHUTTERSTOCK

75. Se uma pirâmide quadrangular regular tem 10 dm de altura e apótema da base com 5 dm de comprimento, qual é:

a) o comprimento da aresta da base? Resposta: 10 dm

b) o comprimento do raio da circunferência que circunscreve a base? Resposta: $5\sqrt{2}$ dm

c) a área da base? Resposta: 100 dm²

d) a área total? Resposta: $100 \cdot (1 + \sqrt{5})$ dm²

76. Considerando uma pirâmide hexagonal regular com área total de $24(4 + \sqrt{3})$ cm², cuja circunferência que circunscreve a base tem raio com 4 cm de comprimento, calcule o comprimento do apótema dessa pirâmide. Resposta: 8 cm

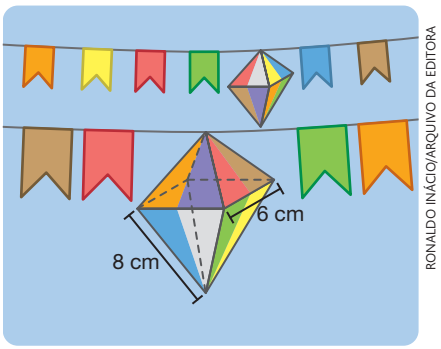
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

77. Pipoca, bolo de fubá, canjica, pé de moleque, quadrilha e bandeirinhas são algumas das comidas e elementos que fazem parte das festas juninas.

a) Para manter a tradição, na época de festa junina podem ser construídos balões decorativos por meio da arte do ***origami***. Considerando um balão com formato de octaedro, feito de *origami*, determine quantos centímetros quadrados de papel, no mínimo, foram utilizados para encapar sua parte inferior.

Resposta: $12\sqrt{55}$ cm²

Origami: do japonês *ori*, "dobra", e *kami*, "papel". Arte tradicional japonesa de dobrar papel em formas representativas de animais, objetos e outros.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Dica

Esse balão pode ser decomposto em duas pirâmides regulares.

b) Junte-se a um colega e construam um balão de *origami*. Se necessário, realizem uma pesquisa.

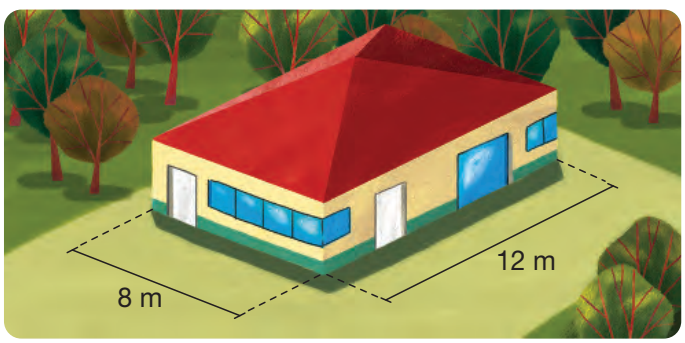
Resposta pessoal.

Observação

Os incêndios provocados por balões, principalmente em épocas de festa junina, causam vários prejuízos à natureza e à sociedade. Quando atingem certa altura, os balões saem do controle dos "baloeiros" e entram em correntes de ar que os levam para locais imprevisíveis, podendo cair sobre florestas, casas e até provocar a queda de aeronaves. Esses acidentes vêm diminuindo desde 1998, quando a legislação classificou a soltura de balões como crime ambiental. Portanto, qualquer cidadão que fabricar, vender, transportar ou soltar balões que possam provocar incêndios está sujeito a pena de detenção de três anos ou multa.

78. O telhado de uma casa será construído com formato de superfície lateral de pirâmide de base quadrangular, com as arestas laterais congruentes, cujo comprimento é $\sqrt{61}$ m.

Sabendo que são necessárias 16 telhas do modelo escolhido para cobrir 1 m² de telhado e supondo que serão desperdiçadas 195 telhas com quebras e emendas, calcule o número mínimo de telhas utilizadas na cobertura desse telhado. (Use $\sqrt{5} = 2{,}2$.)



LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: 2 000 telhas.

79. Em uma passeata realizada em uma grande cidade contra a poluição do ar, foram distribuídos pingentes com formato de octaedro regular (Poliedro de Platão associado ao ar). Sabendo que as arestas do octaedro tinham 1 cm de comprimento, determine a área da superfície de cada pingente distribuído na passeata.

Resposta: $2\sqrt{3}$ cm²

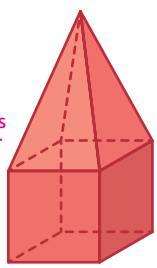
80. Usando um recorte retangular de papel de presente, com 15 cm por 25 cm, deseja-se encapar uma embalagem com formato de pirâmide quadrangular regular que tem 8 cm de altura e apótema da base com 6 cm de comprimento. Considerando que não haverá desperdício ao encapar a embalagem, podemos concluir que sobrará ou faltará papel? Quantos centímetros quadrados?

Resposta: Faltará; 9 cm².

81. Uma pirâmide quadrangular regular foi construída com a base apoiada sobre uma das faces de um cubo de aresta 6 cm.

Sabendo que as arestas laterais da pirâmide têm comprimento igual ao da diagonal do cubo, elabore um problema envolvendo os conteúdos estudados neste capítulo, até o momento. Em seguida, peça a um colega que o resolva.

Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

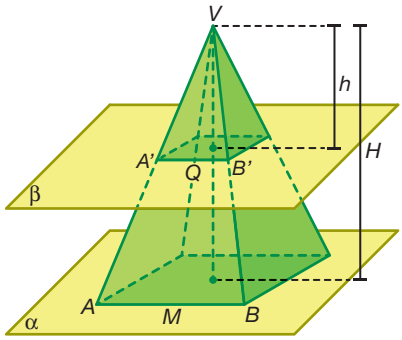
Não se esqueçam de verificar se as respostas obtidas estão corretas.

Professor, professora: A tarefa **81** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Volume de uma pirâmide

Considere uma pirâmide de vértice V, base M e altura H, apoiada em um plano α. Ao traçarmos um plano β paralelo a α, distando h do vértice V, obtemos, nessa pirâmide, uma seção Q.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

A fim de exemplificar a situação apresentada, ilustramos uma pirâmide quadrangular.

De acordo com essa situação, apresentaremos duas importantes propriedades.

a) As regiões M e Q são semelhantes, e a razão de proporcionalidade é $\frac{H}{h}$.

b) A razão entre as áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de proporcionalidade. Nesse caso, temos:

$$\frac{\text{área de } M}{\text{área de } Q} = \left(\frac{H}{h}\right)^2$$

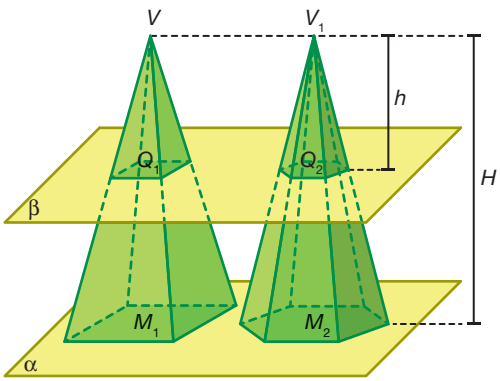
Essas propriedades podem ser demonstradas, porém não apresentaremos suas demonstrações neste livro.

Usando essas propriedades, demonstraremos o teorema a seguir.

> Pirâmides cujas áreas das bases são iguais e que têm a mesma altura têm também o mesmo volume.

Demonstração

Considere duas pirâmides apoiadas em um plano horizontal α, ambas de altura H e bases com áreas iguais. Considere também um plano β, paralelo a α, que determina duas seções.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Pela propriedade **b**, temos: $\frac{\text{área de } M_1}{\text{área de } Q_1} = \left(\frac{H}{h}\right)^2$ e $\frac{\text{área de } M_2}{\text{área de } Q_2} = \left(\frac{H}{h}\right)^2$.

Assim, $\frac{\text{área de } M_1}{\text{área de } Q_1} = \frac{\text{área de } M_2}{\text{área de } Q_2}$.

Como a área de M_1 é igual à área de M_2, então a área de Q_1 é igual à área de Q_2, para qualquer plano β paralelo a α.

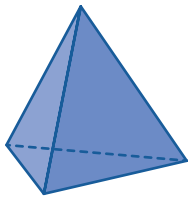
Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, se todo plano paralelo a α determina regiões planas de mesma área nas duas pirâmides, então os volumes das pirâmides são iguais.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Volume de uma pirâmide triangular

Até o momento, estudamos algumas propriedades e demonstramos um teorema. Nosso objetivo agora é investigar e obter uma fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide triangular.

Professor, professora: Se julgar conveniente, entregue aos estudantes representações de pirâmides triangulares congruentes (no mínimo três representações), para que eles possam realizar as investigações propostas nas questões **F**, **G** e **H**.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Questão F. É possível obter o volume de uma pirâmide triangular relacionando-a a um prisma. Junte-se a um colega, investiguem e determinem qual é esse prisma.

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que é um prisma de base triangular.

Questão G. De acordo com a resposta da questão **F**, qual estratégia você utilizaria para obter uma relação entre o volume desse prisma e o da pirâmide triangular?

Questão G. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que precisam decompor o prisma de base triangular em três pirâmides triangulares. Nesse caso, obteríamos três pirâmides triangulares com a mesma base do prisma e com alturas iguais à do prisma.

Questão H. Qual é a relação entre o volume da pirâmide triangular e o do prisma escolhido por vocês na questão **F**? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que o volume do prisma é igual ao triplo do volume da pirâmide triangular com a mesma base do prisma e com altura igual à do prisma.

Questão I. Mostre que o volume V de uma pirâmide triangular de altura h é: $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$ em que A_b indica a área da base da pirâmide. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Volume de uma pirâmide qualquer

Demonstrada a expressão de cálculo do volume de uma pirâmide triangular, falta pouco para obtermos o volume de qualquer pirâmide.

Questão J. Dada uma pirâmide de base qualquer, qual estratégia você utilizaria para obter o volume dela?

Questão J. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam que dividiriam, por meio de diagonais, a base da pirâmide em triângulos justapostos, sendo cada triângulo a base de uma nova pirâmide que tem vértice comum à pirâmide inicial.

De acordo com as informações obtidas no tópico anterior, vamos demonstrar o seguinte teorema.

> O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto entre a área de sua base e sua altura.

Demonstração

Considere uma pirâmide P de altura H e base de área A. Podemos decompor, por meio de diagonais, a base dessa pirâmide em n triângulos justapostos de áreas $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Nesse caso, a pirâmide P fica dividida em n pirâmides triangulares de altura H.

Assim, o volume V da pirâmide P é:

$$V = \frac{A_1 \cdot H}{3} + \frac{A_2 \cdot H}{3} + \cdots + \frac{A_n \cdot H}{3}$$

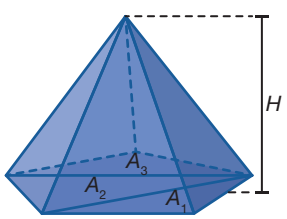
$$V = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3}A \cdot H$$

Como queríamos demonstrar.

Observação

Na imagem, é exemplificado o caso em que a base da pirâmide é um pentágono e $n = 3$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R12. Calcule o volume do tetraedro regular a seguir, sabendo que $h = 12\sqrt{2}$ cm e $a = 12\sqrt{3}$ cm.

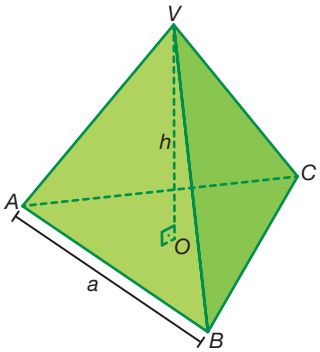
Resolução

A área de um triângulo equilátero de lado a é dada por $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Desse modo, o volume do tetraedro é dado por:

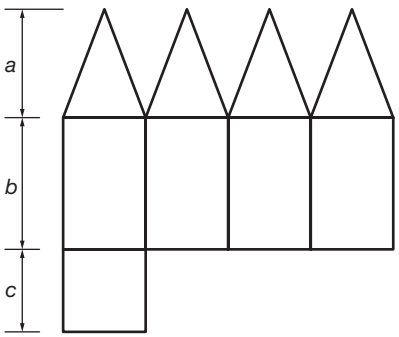
$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h}{3} = \frac{\frac{\left(12\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 12\sqrt{2}}{3} = \frac{\frac{432\sqrt{3}}{4} \cdot 12\sqrt{2}}{3} = 432\sqrt{6}$$

Portanto, o volume desse tetraedro é $432\sqrt{6}$ cm^3.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

R13. (Unicamp-SP, 2020) A figura abaixo exibe a planificação de um poliedro convexo, com faces triangulares congruentes e faces retangulares, em que são indicados os comprimentos a, b e c.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA/UNICAMP-SP 2020

Observação

Pode-se demonstrar que o volume de um tetraedro regular de aresta a é dado por $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

a) Determine o número de vértices e de arestas desse poliedro.

b) Para $a = 13$ cm, $b = 16$ cm e $c = 10$ cm, calcule o volume desse poliedro.

Resolução

a) Como as faces triangulares são congruentes, o poliedro é formado por uma pirâmide regular de base quadrada apoiada num paralelepípedo reto retângulo, em que duas de suas faces são quadradas.

Nesse caso, o número de vértices v desse poliedro é dado por:

$$v = v_P + v_R - 4 = 5 + 8 - 4 = 9$$

em que:

v_P: o número de vértices da pirâmide.

v_R: o número de vértices do paralelepípedo.

Já o número de arestas n desse poliedro é dado por:

$$n = n_P + n_R - 4 = 8 + 12 - 4 = 16$$

em que:

n_P: o número de arestas da pirâmide.

n_R: o número de arestas do paralelepípedo.

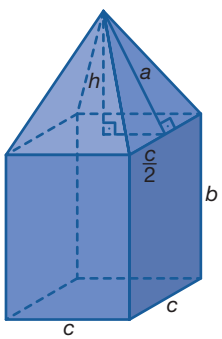
Portanto, esse poliedro tem 9 vértices e 16 arestas.

b) Indicando por h a altura da pirâmide, temos:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow 13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 12$$

Observação

Note que $h = 12$, pois $h > 0$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

O volume V desse poliedro é igual ao volume da pirâmide V_p mais o volume do paralelepípedo reto retângulo V_R. Assim:

$$V = V_P + V_R = \frac{c^2 \cdot h}{3} + c^2 \cdot b = \frac{10^2 \cdot 12}{3} + 10^2 \cdot 16 = 2\,000$$

Portanto, o volume desse poliedro é igual a 2 000 cm^3.

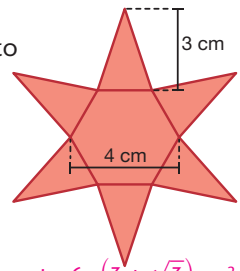
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

82. Uma pirâmide quadrangular regular tem 12 m de aresta da base e 8 m de altura. Se for realizada uma seção transversal paralelamente à sua base, à distância de 6 m, qual será o volume da pirâmide menor obtida? Resposta: 6 m³

83. O volume de uma pirâmide de 5 cm de altura é 20 cm³. Sabendo que o polígono da base dessa pirâmide é um retângulo, determine todos os possíveis comprimentos inteiros, em centímetros, que as arestas da base podem ter.
Resposta: 1 cm e 12 cm; 2 cm e 6 cm; 3 cm e 4 cm.

84. Analise a planificação de uma pirâmide hexagonal regular.



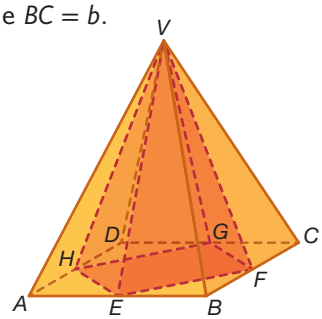
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Determine o comprimento do:
- apótema da pirâmide. Resposta: 3 cm
- apótema da base. Resposta: $\sqrt{3}$ cm

b) Calcule a área:
- da base. Resposta: $6\sqrt{3}$ cm²
- total. Resposta: $6 \cdot (3 + \sqrt{3})$ cm²

c) Quando construída, qual será o volume dessa pirâmide? Resposta: $6\sqrt{2}$ cm³

85. Considere a pirâmide quadrangular de vértice *V* com altura *h*, cuja base é o retângulo *ABCD* com $AB = a$ e $BC = b$.



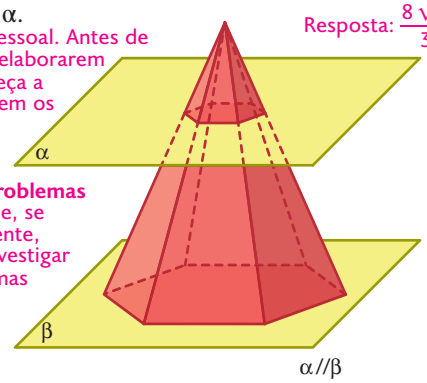
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que os pontos *E*, *F*, *G* e *H* são pontos médios das arestas da base da pirâmide *ABCDV*, calcule a razão entre os volumes das pirâmides *EFGHV* e *ABCDV*. Resposta: $\frac{1}{2}$

86. Para ostentar a grandiosidade de seu reino, o rei de uma antiga civilização ordenou a construção de uma pirâmide cuja base é um quadrado de lado 50 m e a altura é 60 m. Em média, para construir uma parte da pirâmide equivalente a 500 m 3, os trabalhadores levaram cerca de 1 mês. De acordo com essa média, quanto tempo foi necessário para a conclusão da obra? Resposta: 8 anos e 4 meses.

87. Crie uma peça cujo formato se pareça com uma composição de prismas e pirâmides. Em seguida, com base nela, elabore um problema envolvendo os conteúdos estudados sobre volume. Por fim, peça a um colega que o resolva.

88. O volume da pirâmide hexagonal regular, cujo comprimento da aresta da base é 4 cm e cuja base está contida no plano β, é $72\sqrt{3}$ cm³. Sabendo que a razão entre as alturas das pirâmides com base no plano α e com base no plano β é $\frac{1}{3}$, determine o volume da pirâmide com base no plano α. Resposta: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm³



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

87. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

89. Geralmente encontrado em aluviões e em veios de quartzo associados a rochas intrusivas ácidas, o ouro cristaliza-se em forma de cubos e octaedros, mas o mais comum é encontrá-lo na forma de escamas, fios irregulares ou pepitas (massas irregulares).



FRANTIC 00/SHUTTERSTOCK

Professor, professora: Se necessário, lembre os estudantes de que a densidade é a razão entre a massa e o volume.

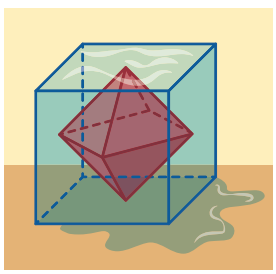
Pepita de ouro.

Sabendo que a densidade do ouro é de 19,3 g/cm³ determine a massa de uma pedra de ouro que tem formato de octaedro regular, com arestas medindo 3 cm. (Utilize $\sqrt{2} = 1{,}41$.)
Resposta: Aproximadamente 245 g.

90. Dentro de uma caixa cúbica de 20 cm de aresta, totalmente cheia de água, foi colocado um sólido maciço com a forma de um octaedro regular, de maneira que seus vértices ficassem exatamente nos centros das faces da caixa cúbica, fazendo parte da água derramar para fora da caixa. Analise a figura.

a) Qual é a área da superfície desse octaedro? Resposta: $400\sqrt{3}$ cm²

b) Calcule o volume de água, em litros, que permaneceu na caixa após o sólido ser colocado em seu interior. Resposta: $\frac{20}{3}$ L



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

91. Qual é o volume de um tetraedro regular que tem uma de suas faces inscrita em uma circunferência de raio 10 dm? Resposta: $250\sqrt{6}$ dm³

Professor, professora: A tarefa **87** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Proteção aos Patrimônios Mundiais

Oriente os estudantes a consultar mais informações sobre os **Objetivos do Desenvolvimento Sustentável** (ODS) no início do volume.

ODS 11

Você sabe o que são patrimônios? Patrimônios são conjuntos de bens naturais ou culturais que têm valor para uma sociedade ou pessoa. De acordo com a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco), eles podem ser de três tipos: cultural, natural ou misto.

A Unesco é o órgão responsável pelo estabelecimento de ações e critérios para que esses bens sejam reconhecidos como patrimônios da humanidade, desde 1972. No Brasil, o Instituto do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional (Iphan) é encarregado de indicar bens culturais candidatos a patrimônio, enquanto o Instituto Chico Mendes de Conservação da Biodiversidade (ICMBio) encarrega-se da indicação dos bens naturais.

O reconhecimento desses conjuntos de bens, naturais ou culturais, como patrimônios da humanidade é uma forma de manter viva a memória e a história a eles relacionadas, além de contribuir para a visibilidade local e de reforçar estratégias de salvaguarda para que esses patrimônios sejam preservados.

Um exemplo de patrimônio cultural da humanidade é o Complexo de Pirâmides de Gizé e Dachur, localizado no Egito, reconhecido pela Unesco desde 1979. O complexo de Gizé é formado por três pirâmides, construídas entre os anos 2550 a.C. e 2470 a.C. para servirem como tumba dos faraós Quéops, Quéfren e Miquerinos. Naquela época, os faraós eram enterrados com todos os seus pertences, incluindo roupas, joias e instrumentos domésticos.

A maior dessas três obras, denominada Grande Pirâmide, foi construída para o faraó Quéops e tem dimensões monumentais: 137 metros de altura – originalmente eram 147 – e 227 metros em cada lado da base.



NICK BRUNDLE PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK

Complexo de Pirâmides de Gizé, no Egito, em 2023.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A Grande Pirâmide

Revestimento externo

A parte externa da Grande Pirâmide era toda revestida com rocha calcária, que refletia com o Sol, podendo ser vista a quilômetros de distância. Esse revestimento foi saqueado há muitos anos, restando apenas alguns fragmentos no topo da pirâmide.

Blocos de pedra da pirâmide

Uma das hipóteses sobre a origem dos blocos utilizados nas pirâmides, com cerca de 2,5 toneladas cada, é a de que eles foram trazidos de barco de territórios próximos pelo Rio Nilo. Já outra diz que eles foram moldados no próprio canteiro de obras com concreto à base de calcário.



Representação de pessoas manipulando um bloco de rochas.

Construção da pirâmide

Entre as teorias que explicam o processo de construção da Grande Pirâmide, a mais aceita é a de que os blocos usados foram arrastados sobre troncos de madeira por uma rampa.

Professor, professora: Explique aos estudantes que, além de fotos, as apresentações produzidas na atividade **4** podem conter vídeos, esquemas, tabelas e mapas e ao final devem apresentar um resultado conclusivo que relacione o reconhecimento do patrimônio no alcance do **ODS 11**.



Representação de pessoas arrastando um bloco de rocha sobre troncos em uma rampa.

LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: DUARTE, Maria Dolores. Grande pirâmide. *Aventuras na história*, São Paulo, Caras, ano 18, n. 3, abr. de 2020. p. 22-23.

A Grande Pirâmide foi considerada a construção mais alta do mundo por mais de 4 mil anos, até a inauguração da Torre Eiffel, em Paris, em 1889. Reconhecer construções como essa e todo o complexo do qual ela faz parte como patrimônio é uma forma de preservar a memória de uma sociedade, além de contribuir para que esses bens sejam valorizados e enaltecidos como expressão histórica e cultural da humanidade.

Atividades

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

Anote as respostas no caderno.

1. Qual é a ideia principal do texto?
Resposta: Tratar sobre patrimônios culturais da humanidade e a importância de preservá-los, trazendo como exemplo o Complexo de Pirâmides de Gizé, no Egito, especificamente a Grande Pirâmide, apresentando algumas características dessa construção.

2. Supondo que a Grande Pirâmide de Gizé seja regular e tenha base quadrada, aproximadamente que área, em metros quadrados, foi revestida com rocha calcária polida?
Resposta: Aproximadamente 84 308 m^2.

3. Se a Grande Pirâmide de Gizé fosse maciça, qual seria seu volume original em metros cúbicos?
Resposta: 2 524 921 m^3

4. Junte-se a um colega e façam uma pesquisa a respeito dos patrimônios culturais, naturais e mistos, citando suas características e dois exemplos de cada tipo, sendo um deles localizado no Brasil. Em seguida, produzam uma apresentação de *slides* sobre eles. Nos *slides*, procurem apresentar fotos desses patrimônios, locais onde se encontram, de que tipo são, quando foram reconhecidos como tal e a importância desse reconhecimento.
Resposta pessoal. Organize os estudantes em grupos de quatro integrantes ou em quantidade conveniente para o tamanho da sala de aula. Estabeleça o prazo que julgar adequado para que eles realizem as pesquisas e preparem o material. Oriente-os a pesquisar em *sites* como o da Unesco: **World Heritage**, disponível em: https://whc.unesco.org/ (acesso em: 22 ago. 2024), o do **Instituto do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional (Iphan)**, disponível em: http://portal.iphan.gov.br/ (acesso em: 22 ago. 2024) e o do **Instituto Chico Mendes de Conservação da Biodiversidade**, disponível em: https://www.gov.br/icmbio/pt-br (acesso em: 22 ago. 2024).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Tronco de pirâmide reta

El Castillo, também chamada pirâmide de Kukulkán, é a mais importante estrutura de Chichén-Itzá, antiga cidade maia localizada onde atualmente está a península de Yucatán, no México. Essa edificação se parece com um tronco de pirâmide, poliedro que estudaremos neste tópico.



DIEGO CALABUIG/SHUTTERSTOCK

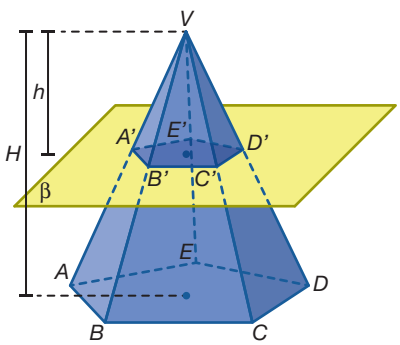
Pirâmide de Kukulkán, em Chichén-Itzá, México, em 2023.

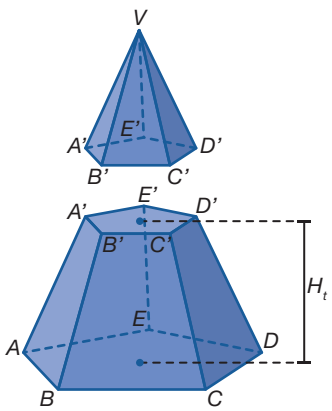
Observação

O auge do desenvolvimento do povo maia ocorreu entre os séculos IV e X.

Considere uma pirâmide de base $A_1A_2...A_n$ e vértice V. Ao traçarmos um plano paralelo à base, que corta as arestas laterais segundo o polígono $B_1B_2...B_n$, determinamos dois poliedros: uma pirâmide de base $B_1B_2...B_n$ e um poliedro denominado **tronco de pirâmide** de bases $A_1A_2...A_n$ (**base maior**) e $B_1B_2...B_n$ (**base menor**). Os trapézios $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, ..., $A_nB_nB_1A_1$ são as **faces laterais**.

Supondo uma pirâmide pentagonal, temos:





tronco de pirâmide

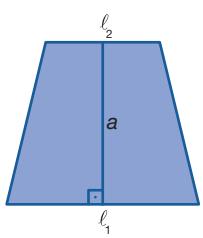
Observação

A **altura** de um tronco de pirâmide é a distância entre a base menor e a base maior.

Nesse tronco de pirâmide:

- a **base maior** é o polígono $ABCDE$.
- a **base menor** é o polígono $A'B'C'D'E'$.
- as **faces laterais** são os trapézios $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$ e $AEE'A'$.
- a **altura** é a distância H_t, entre a base menor e a base maior.

Dizemos que um tronco de pirâmide é regular se este é obtido partindo de uma pirâmide regular. Nesse caso, as bases são polígonos regulares semelhantes e as faces laterais são trapézios isósceles congruentes. Além disso, a altura de uma face lateral é chamada **apótema do tronco** (a).



a: comprimento do apótema do tronco
ℓ_1: comprimento da aresta da base maior
ℓ_2: comprimento da base menor

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Área da superfície de um tronco de pirâmide

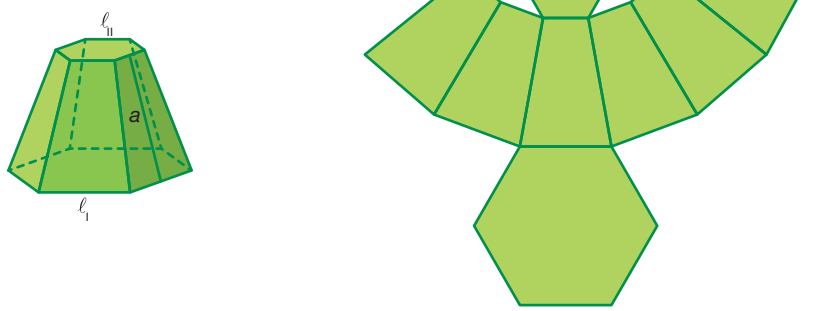
Assim como os prismas e as pirâmides, em um tronco de pirâmide:

- a **superfície lateral** corresponde à reunião de todas as suas faces laterais, sendo a área dessa superfície a **área lateral** do tronco (A_l);
- a **área da base maior** corresponde à área do polígono que é a base maior do tronco (A_B), e a **área da base menor**, à área do polígono que é igual à base menor (A_b);
- a **superfície total** corresponde à reunião da superfície lateral com as bases, sendo a área dessa superfície a **área total do tronco** (A_t).

Assim, a área total de um tronco de pirâmide é igual à área lateral mais a área de cada base, isto é:

$$A_t = A_l + A_b + A_B$$

Analise na imagem a representação de um tronco de pirâmide regular e sua planificação.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Explique aos estudantes que é possível compor outras planificações desse tronco de pirâmide.

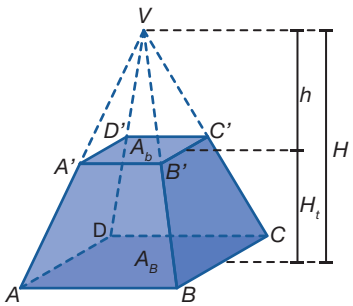
Nesse caso, a área total do tronco é dada pela área lateral, que é igual a seis vezes a área de uma face lateral (trapézio isósceles) mais a área das bases (hexágonos regulares):

$$A_t = \underbrace{A_l}_{6\cdot\frac{(\ell_I+\ell_{II})\cdot a}{2}} + \underbrace{A_b}_{6\cdot\frac{\ell_{II}^2\cdot\sqrt{3}}{4}} + \underbrace{A_B}_{6\cdot\frac{\ell_I^2\cdot\sqrt{3}}{4}} = 6\cdot\frac{(\ell_I+\ell_{II})\cdot a}{2} + 6\cdot\frac{\ell_{II}^2\cdot\sqrt{3}}{4} + 6\cdot\frac{\ell_I^2\cdot\sqrt{3}}{4}$$

Volume de um tronco de pirâmide

Na imagem está representado um tronco de pirâmide. Para obter o volume dele, podemos calcular a diferença entre os volumes das pirâmides *VABCD* e *VA'B'C'D'*, isto é:

$$V_{tronco} = V_{VABCD} - V_{VA'B'C'D'} =$$
$$= \frac{A_B\cdot H}{3} - \frac{A_b\cdot h}{3} =$$
$$= \frac{A_B\cdot H - A_b\cdot h}{3}$$



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

A_B: área da base maior
A_b: área da base menor
H: altura da pirâmide *VABCD*
h: altura da pirâmide *VA'B'C'D'*
H_t: altura do tronco

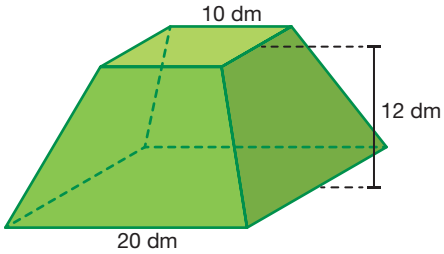
Desenvolvendo essa igualdade, deduzimos a fórmula do volume de um tronco de pirâmide, que é dado por:

$$V_{tronco} = \frac{H_t}{3}\cdot\left(\sqrt{A_b\cdot A_B} + A_b + A_B\right)$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R14. Um tronco de pirâmide regular de altura 12 dm tem como bases duas regiões quadradas de lados 10 dm e 20 dm, conforme a figura.



Em relação ao tronco, calcule a área:

a) da base menor. **b)** da base maior. **c)** lateral. **d)** total.

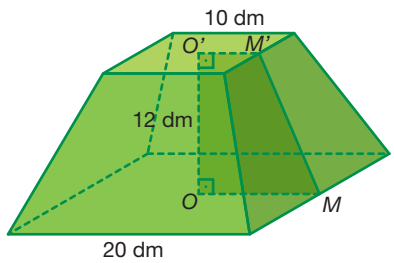
Resolução

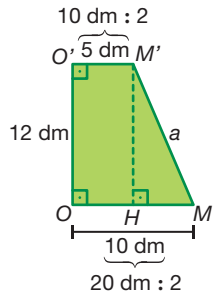
a) A base menor é um quadrado de lado 10 dm.
Logo: $A_b = 10^2 = 100$.
Portanto, a área da base menor é 100 dm^2.

b) A base maior é um quadrado de lado 20 dm. Logo: $A_B = 20^2 = 400$.
Portanto, a área da base maior é 400 dm^2.

c) As faces laterais são trapézios isósceles congruentes de bases 10 dm e 20 dm, cuja altura é o apótema do tronco. Calculamos o comprimento do apótema do tronco aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo MHM', conforme a figura a seguir.

$$(MM')^2 = (HM')^2 + (HM)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = \sqrt{169} = 13$$





Observação

Note que $a = 13$, pois $a > 0$.

Como a área lateral é a reunião dos quatro trapézios, temos:

$$A_l = 4 \cdot \frac{(\ell_1 + \ell_2) \cdot a}{2} = 4 \cdot \frac{(20 + 10) \cdot 13}{2} = 780$$

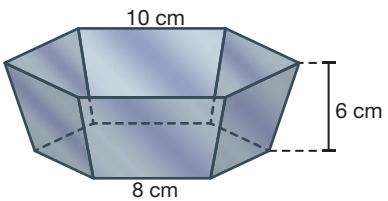
Portanto, a área lateral é 780 dm^2.

d) A área total é dada por:

$$A_t = A_l + A_b + A_B = 780 + 100 + 400 = 1\,280$$

Portanto, a área total é 1 280 dm^2.

R15. Uma forma de alumínio tem o formato de um tronco de pirâmide hexagonal regular, conforme a figura. Qual é a capacidade, em litros, dessa forma? (Considere $\sqrt{3} = 1{,}7$.)



Resolução

As bases são hexágonos regulares de lados 10 cm e 8 cm. Sendo A_B e A_b, respectivamente, as áreas das bases maior (superior) e menor (inferior), temos:

$$A_B = 6 \cdot \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot 25\sqrt{3} = 150\sqrt{3} \qquad A_b = 6 \cdot \frac{8^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot 16\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$$

Segue que o volume do tronco é dado por:

$$V_{tronco} = \frac{H_t}{3} \cdot \left(\sqrt{A_b \cdot A_B} + A_b + A_B\right) = \frac{6}{3} \cdot \left(\sqrt{96\sqrt{3} \cdot 150\sqrt{3}} + 96\sqrt{3} + 150\sqrt{3}\right) =$$
$$= 2 \cdot \left(120\sqrt{3} + 96\sqrt{3} + 150\sqrt{3}\right) = 2 \cdot 366\sqrt{3} = 732\underbrace{\sqrt{3}}_{1{,}7} = 732 \cdot 1{,}7 = 1\,244{,}4$$

Logo, o volume do tronco é 1 244,4 cm^3. Como 1 L = 1 000 cm^3, segue que:

$$\frac{1\,000}{1\,244{,}4} = \frac{1}{x} \Rightarrow x \simeq 1{,}2$$

Portanto, a capacidade dessa forma é, aproximadamente, 1,2 L.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

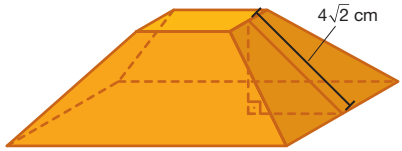
92. Resposta: $9 \cdot \left(8 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ m²

Anote as respostas no caderno.

92. Dois triângulos equiláteros, um com 9 m de lado e outro com 3 m de lado, são as bases de um tronco de pirâmide regular de aresta lateral 5 m. Calcule a área total desse tronco de pirâmide.

93. Um tronco de pirâmide quadrangular regular tem diagonal da base maior com $12\sqrt{2}$ cm de comprimento, aresta da base menor com 4 cm de comprimento e apótema com $4\sqrt{2}$ cm de comprimento.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



Com base nas informações apresentadas, determine:

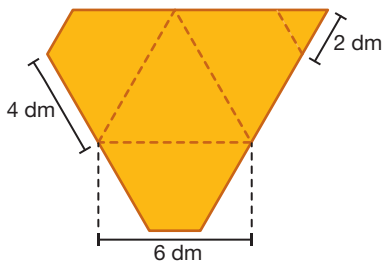
a) o comprimento da altura do tronco de pirâmide. Resposta: 4 cm

b) a área lateral. Resposta: $128\sqrt{2}$ cm²

c) a área total. Resposta: $32 \cdot \left(4\sqrt{2} + 5\right)$ cm²

94. A figura corresponde à planificação de um tronco de pirâmide regular, cuja base é um triângulo equilátero. Qual é a área lateral desse tronco de pirâmide? E a área total? Resposta: $24\sqrt{3}$ dm²; $34\sqrt{3}$ dm²

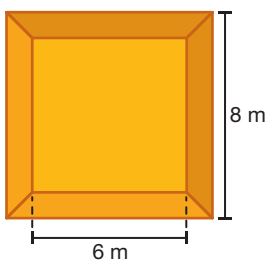
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



95. Sabendo que a área total de um tronco de pirâmide hexagonal regular é de $924\sqrt{3}$ cm² e que as áreas das bases menor e maior são, respectivamente, $150\sqrt{3}$ cm² e $384\sqrt{3}$ cm², determine o comprimento das arestas da base maior, o comprimento das arestas da base menor e a altura desse tronco de pirâmide.
Resposta: 16 cm; 10 cm; $4\sqrt{3}$ cm

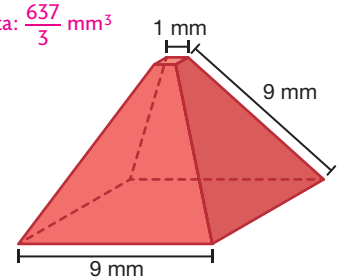
96. Analisando a figura, que ilustra a vista superior de um tronco de pirâmide de base quadrangular regular, e sabendo que o comprimento da aresta lateral do tronco da pirâmide é 3 m, determine sua área total. Resposta: $4 \cdot \left(25 + 14\sqrt{2}\right)$ m²

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



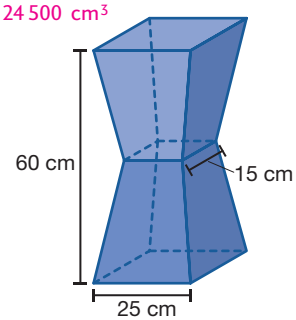
97. Considere o tronco de pirâmide de base quadrangular regular representado a seguir. Qual é o volume dele?
Resposta: $\frac{637}{3}$ mm³

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



98. Calcule o volume de concreto necessário para construir uma banqueta maciça, composta de dois troncos congruentes de pirâmide quadrangular regular sobrepostos pelas bases menores.
Resposta: 24 500 cm³

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

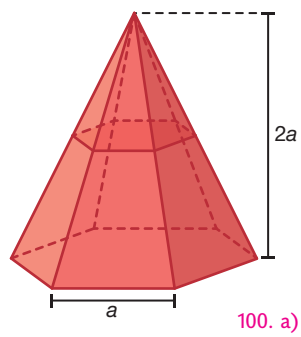


99. Em um tronco de pirâmide hexagonal regular, os raios das circunferências que circunscrevem as bases têm 3 cm e 5 cm de comprimento. Sabendo que as áreas das bases maior e menor são, respectivamente, $37{,}5\sqrt{3}$ cm² e $13{,}5\sqrt{3}$ cm², e que o volume é 233 cm³, determine o comprimento da aresta lateral desse tronco de pirâmide usando uma calculadora.
Resposta: Aproximadamente 5,9 cm.

100. Uma pirâmide hexagonal regular foi cortada por um plano paralelo à base, de modo que o tronco da pirâmide e a pirâmide, obtidos após a seção, tivessem a mesma altura.

Determine, em função de a:

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



100. a) Resposta: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$

a) a área da base da pirâmide obtida.

b) o volume da pirâmide obtida. Resposta: $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

c) o volume do tronco de pirâmide obtido.
Resposta: $\frac{7a^3\sqrt{3}}{8}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

101. Em 1932, entre os meses de julho e outubro, ocorreu no Brasil o movimento armado conhecido como Revolução Constitucionalista, que visava à derrubada do governo provisório de Getúlio Vargas e à instituição de um regime constitucional. Em homenagem aos que lutaram nessa revolução, foi construído, na cidade de São Paulo – em mármore travertino –, o Monumento ao Soldado Constitucionalista, mais conhecido como "obelisco do Ibirapuera". Em seu interior existe um mausoléu que guarda as cinzas dos estudantes Martins, Miragaia, Drausio e Camargo, mortos em combate, cujas iniciais MMDC formam a sigla usada como símbolo da revolução. A **cripta** também abriga as cinzas de outros ex-combatentes.

A obra, do escultor italiano Galileo Ugo Emendabili, começou a ser construída em 1947 e foi concluída apenas no ano de 1970. Das sepulturas, no subsolo, até o topo, são 81 m; e a altura do obelisco é 72 m.

Fonte de pesquisa: CIDADE de São Paulo. Secretaria Municipal de Cultura. *Inventário de Obras de Arte em Logradouros Públicos da Cidade de São Paulo*. 27 maio 2008. https://capital.sp.gov.br/web/cultura/w/patrimonio_historico/adote_obra/4524. Acesso em: 26 ago. 2024.

Cripta: dependência subterrânea utilizada para sepultamentos.

VINICIUS BACARIN/SHUTTERSTOCK



Obelisco do Ibirapuera, São Paulo (SP), em 2019.

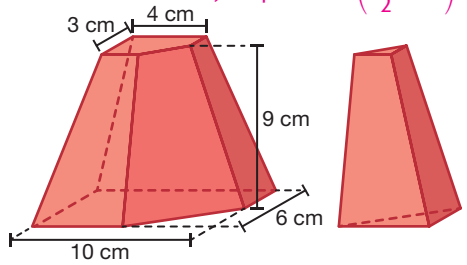
a) Qual é a altura do subsolo do monumento?
Resposta: 9 m

b) Considerando que o obelisco tem formato de tronco de pirâmide quadrangular regular, cujo comprimento do lado da base maior é 9 m e da base menor, 7 m, determine a quantidade de material necessária para construir uma réplica maciça dele (desconsiderando o subsolo) com 10% das dimensões originais.
Resposta: 4,632 m³

c) Junte-se a um colega e façam uma pesquisa sobre a Revolução Constitucionalista de 1932. Em seguida, apresentem à turma os resultados.
Resposta pessoal. Orientações sobre este item no **Suplemento para o professor**.

102. Um tronco de pirâmide obtido a partir de uma pirâmide cuja projeção de vértice coincide com o centro da base, que é um retângulo, foi selecionado por um plano de pontos médios de duas arestas da base menor e duas da base maior, como representado na figura.

102. c) Resposta: $9 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 3\right)$ cm³



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

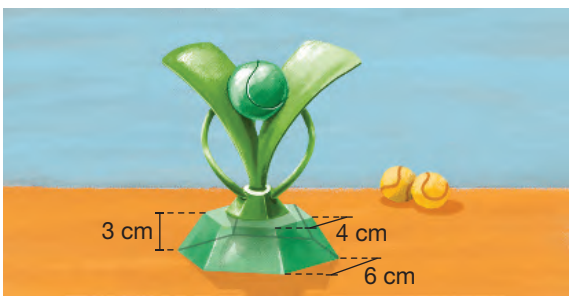
a) Determine a soma das áreas das bases do tronco de pirâmide maior, obtido após a seção.
Resposta: 63 cm²

b) Qual era o volume do tronco da pirâmide antes da seção? Resposta: $36 \cdot \left(\sqrt{5} + 6\right)$ cm³

c) Calcule o volume do tronco de pirâmide menor obtido após a seção.

103. A premiação de um torneio de tênis será realizada com troféus construídos usando materiais reciclados. A base desse troféu terá formato de tronco de pirâmide hexagonal regular maciça, e sua matéria-prima será o plástico.

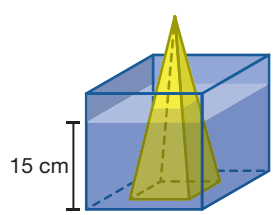
Qual será o volume de plástico utilizado na confecção desse troféu? Resposta: $114\sqrt{3}$ cm³



LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

104. Certo reservatório de 3 m de altura tem formato de tronco de pirâmide triangular regular com o comprimento das arestas internas das bases maior e menor igual a, respectivamente, 2 m e 1 m. Quantos litros, no máximo, esse reservatório é capaz de armazenar? (Utilize $\sqrt{3} = 1{,}7$.)
Resposta: 2 975 L

105. Em um tanque cúbico de 20 cm de aresta, contendo certo tipo de líquido, foi inserida uma pirâmide quadrangular regular de 30 cm de altura, com a base apoiada no fundo do tanque, o que elevou o nível do líquido em 4 cm. Determine o volume dessa pirâmide.
Resposta: $\frac{12\,800}{7}$ cm³



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

8. Sugestão de resposta: Início; 1. Leia o comprimento g do apótema da pirâmide.; 2. Leia o comprimento m do apótema da base.; 3. Calcule $g^2 - m^2$.; 4. Calcule a raiz positiva de $g^2 - m^2$.; Fim.

Anote as respostas no caderno.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos poliedro, prisma, pirâmide e tronco de pirâmide, além do cálculo da área da superfície e do volume de cada uma dessas figuras geométricas espaciais. Agora, chegou a hora de refletir sobre o que você aprendeu! Como estratégia de estudos, sugerimos que faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

9. Sugestão de resposta: Multiplicaria a medida do volume por três e dividiria esse resultado pela medida da altura.

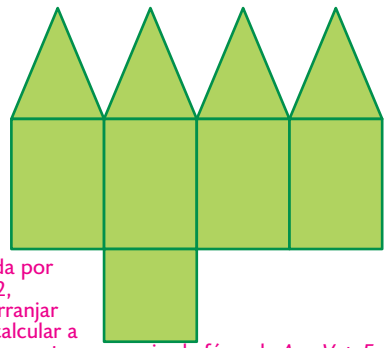
1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-o. Resposta pessoal. Orientações sobre essa questão no **Suplemento para o professor**.

2. A seguir estão apresentados os principais assuntos estudados neste capítulo.

- Poliedros convexos e poliedros não convexos.
- Relação de Euler.
- Poliedros de Platão.
- Poliedros regulares.
- Área da superfície de um prisma.
- Volume de um prisma.
- Princípio de Cavalieri.
- Volume do paralelepípedo reto retângulo.
- Área da superfície de uma pirâmide.
- Volume de uma pirâmide.
- Área da superfície de um tronco de pirâmide.
- Volume de um tronco de pirâmide.

Você teve dificuldades em algum deles? Não recorda algum desses conceitos? Ficou com dúvidas? Reflita sobre esses questionamentos e, se necessário, retome o que foi estudado. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

3. Analise a planificação de um poliedro convexo. Depois, determine a quantidade de vértices e arestas desse poliedro. Resposta: 9 vértices e 16 arestas.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

4. Resposta pessoal. Sugestão de resposta: Utilizaria a fórmula de Euler, que estabelece uma relação entre as quantidades de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. Como a fórmula é dada por $V - A + F = 2$, podemos rearranjar os termos e calcular a quantidade de arestas por meio da fórmula $A = V + F - 2$.

4. Qual estratégia você utilizaria para calcular a quantidade de arestas de um poliedro convexo, dadas as quantidades de vértices e faces?

5. Sabendo que determinado poliedro regular de 12 vértices é formado apenas por faces triangulares, responda às questões.

a) Quantas arestas e faces tem esse poliedro? Resposta: 30 arestas e 20 faces.
b) Qual é o nome desse poliedro? Resposta: Icosaedro regular.
c) Esse é um Poliedro de Platão? Justifique sua resposta. Resposta: Sim, todo poliedro regular é um Poliedro de Platão.

6. Considere dois poliedros convexos, **A** e **B**, em que **A** tem 8 vértices a mais que **B** e ambos têm a mesma quantidade de arestas. Sabendo que o poliedro **A** é formado apenas por faces pentagonais e que **B** é formado apenas por faces triangulares, determine a quantidade de faces, vértices e arestas de cada um deles. Resposta: Poliedro **A**: 12 faces, 20 vértices e 30 arestas; poliedro **B**: 20 faces, 12 vértices e 30 arestas.

7. Quais operações devem ser realizadas com as medidas do comprimento, da largura e da altura de um paralelepípedo reto retângulo para obter seu volume? Resposta: É preciso multiplicar as medidas do comprimento, da altura e da largura.

8. Escreva um algoritmo que possibilite calcular a medida da altura de uma pirâmide regular considerando o comprimento do apótema da pirâmide o comprimento do apótema de sua base.

9. Qual estratégia você utilizaria para calcular a medida da área da base de uma pirâmide considerando as medidas de seu volume e de sua altura?

10. Considere um tronco de pirâmide de base quadrada e altura 6 cm cuja aresta da base maior tem 9 cm e cuja base menor tem aresta de 5 cm. Determine o volume desse tronco de pirâmide em centímetros cúbicos. Resposta: 302 cm^3

11. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo-o. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta. 12. Resposta pessoal. Orientações sobre essa questão no **Suplemento para o professor**.

12. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo. Nela, use desenhos e dê exemplos.

11. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

6

CORPOS REDONDOS



T FOX FOTO/ISTOCK/GETTY IMAGES

Luz do sistema de injeção eletrônica acesa no painel de um carro em movimento.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes citem cuidados como escolher postos de combustíveis confiáveis, que tenham boa reputação e estejam devidamente inspecionados pela ANP, além de desconfiar de preços muito baixos, o que pode indicar adulteração.

A manutenção do automóvel está em dia, mas percebe-se um consumo superior ao habitual, além de falhas repentinas no motor? Esse veículo pode ter sido abastecido com combustível adulterado.

Para garantir a qualidade dos combustíveis, são realizados testes específicos com base em normas estabelecidas pela Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP). No caso da gasolina, por exemplo, ela é uma mistura de gasolina com etanol anidro, e a ANP é quem estabelece qual deve ser a proporção entre esses dois combustíveis.

Para nos precavermos legalmente em caso de defeitos no veículo por combustível adulterado, devemos exigir a nota fiscal a cada abastecimento. Além disso, no caso da gasolina, também podemos exigir o teste de proveta, que avalia se a porcentagem de etanol anidro está dentro dos limites estabelecidos pela ANP. Em agosto de 2024, por exemplo, esse valor era de 27%, com tolerância de até 1% para mais ou para menos.

Neste capítulo, você vai estudar:

- o cilindro;
- o cone;
- o tronco de cone reto;
- a esfera;
- área da superfície do cilindro reto;
- área da superfície do cone reto;
- área da superfície do tronco de cone reto;
- volume do cilindro;
- volume do cone;
- volume do tronco de cone reto;
- volume da esfera.

Professor, professora: Comente com os estudantes que é fundamental os consumidores estarem sempre atentos aos seus direitos para garantir que recebam produtos e serviços de qualidade. A reflexão sobre os direitos do consumidor auxilia na formação de cidadãos críticos e conscientes de suas responsabilidades e direitos.

Como é realizado o teste de teor de etanol (teste de proveta)

Para realizar o teste de proveta, é necessária uma solução de 100 g de cloreto de sódio (sal de cozinha) para cada 1 L de água.

1º. Em uma proveta de vidro transparente, com tampa e capacidade para 100 mL, graduada em subdivisões de 1 mL, despejam-se 50 mL de amostra de gasolina e 50 mL da solução de água e cloreto de sódio.

2º. Realizando 10 inversões sucessivas de proveta, a solução e a gasolina são misturadas.

3º. Deixa-se a mistura em repouso por 15 minutos. Após esse tempo, a gasolina estacionará separada em uma camada na parte superior da proveta, e a solução aquosa (água e etanol) ficará na parte inferior.

4º. Por fim, verifica-se o volume V de aumento na parte aquosa e, por meio da fórmula $T = 2V + 1$, obtém-se, em porcentagem, o teor T de etanol na gasolina.

Professor, professora: Se julgar necessário, apresente aos estudantes uma proveta ou providencie imagens desse recipiente para conhecimento de todos.

Observação

Se a luz da injeção eletrônica acender no painel do veículo, pode ter ocorrido adulteração do combustível, pois o sistema de injeção não conseguiu ajustar corretamente a mistura de combustível para a queima correta, causando mais emissão de poluentes e menos eficiência do veículo.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. No teste de proveta, se, ao final, forem obtidos 63 mililitros de solução aquosa, qual terá sido a porcentagem de etanol na gasolina testada? Resposta: 27%

2. Imagine que uma pessoa, por curiosidade, faça o teste de proveta utilizando um tubo cilíndrico transparente e não graduado, com 20 cm de altura e comprimento do raio da base igual a 1,5 cm. Inicialmente, a pessoa realizará duas marcações, indicando as medidas de 50 mililitros e 100 mililitros. Como você faria para determinar em quais alturas aproximadas do tubo, começando pela base, a pessoa deve fazer as marcações? Resposta no final do **Livro do Estudante**.

3. Faça uma pesquisa sobre alguns cuidados que podem evitar o abastecimento do veículo com combustível adulterado. Depois, compartilhe seus resultados com a turma.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Os corpos redondos

No comércio e na indústria, as embalagens não têm somente a finalidade de armazenar produtos, mas de manter suas propriedades originais (sabor, aroma, qualidade etc.), facilitar seu armazenamento e transporte e até mesmo conquistar o consumidor. As formas das embalagens são as mais diversas, elaboradas, de maneira geral, com base em critérios como custo, estética, *marketing* e especificações da legislação.

PARA EXPANDIR

Para ajudar a preservar o meio ambiente, os fabricantes estão se esforçando para reduzir o uso de recursos naturais na produção de embalagens, além de melhorar e reciclar os materiais utilizados. Embalagens que são recicláveis costumam exibir um símbolo específico, que orienta o descarte correto e o encaminhamento para a indústria recicladora. Essa prática favorece movimentos como o Lixo Zero. Que tal saber mais sobre esse movimento? Para isso, acesse o artigo *A importância do movimento Lixo Zero para um futuro sustentável*, publicado no *site* do Movimento Recicla Sampa, disponível em: https://www.reciclasampa.com.br/artigo/a-importancia-do-movimento-lixo-zero-para-um-futuro-sustentavel. Acesso em: 2 set. 2024.

Analise a seguir algumas embalagens de diferentes formatos. Imagens sem proporção entre si.



Embalagem de hidratante labial.



Caixa de lenços de papel.



Frasco de perfume.



Embalagem do jogo Pega-varetas.

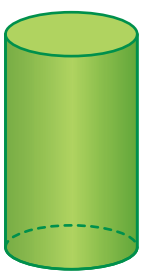


Caixa de sapatos.

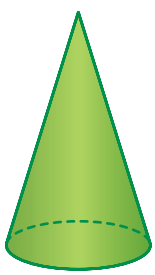
Entre as embalagens apresentadas, as de hidratante labial, do jogo Pega-varetas e do perfume lembram corpos redondos.

Neste capítulo, estudaremos o cilindro, o cone e a esfera, que são exemplos de corpos redondos.

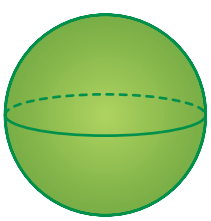
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



Cilindro.



Cone.



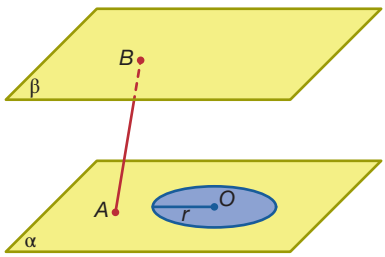
Esfera.

ILUSTRAÇÕES: FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Cilindro

Em nosso dia a dia, nos deparamos com diversos objetos cuja forma lembra a do cilindro, sendo necessário, em certos casos, conhecer algumas características deles, como a quantidade de material necessário para sua construção ou sua capacidade de armazenamento.

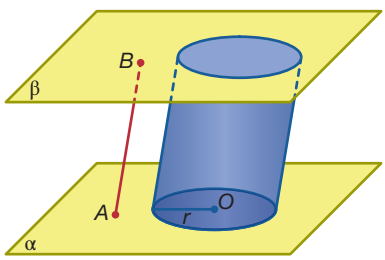
Para definir um cilindro circular, considere dois planos paralelos α e β, um círculo C_1 de centro O e raio r, contido em α, e um segmento de reta AB, com $A \in \alpha$ e $B \in \beta$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Ao traçarmos todos os segmentos paralelos e congruentes a $\overline{AB}$ com uma extremidade na circunferência que determina C_1 e outra extremidade em β, obtemos, em β, uma circunferência que determina o círculo C_2.

A união de todos esses segmentos paralelos, juntamente com os círculos C_1 e C_2, é chamada **cilindro circular**.



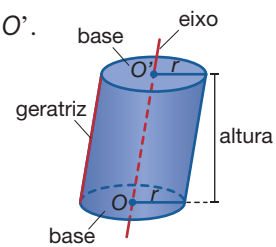
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Neste livro, trataremos apenas dos cilindros circulares. Assim, a fim de simplificar a escrita, chamaremos esses cilindros circulares simplesmente de "cilindros".

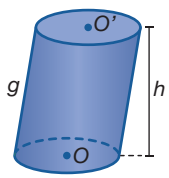
Em um cilindro, podemos destacar os seguintes elementos.

- As **bases** são os círculos paralelos de raio r e centros O e O'.
- As **geratrizes** são os segmentos de reta paralelos a $\overline{OO'}$ com extremidades nas circunferências das bases.
- O **eixo** é a reta $\overleftrightarrow{OO'}$.
- A **altura** é a distância entre os planos das bases.
- A **superfície lateral** é a reunião de todas as geratrizes.

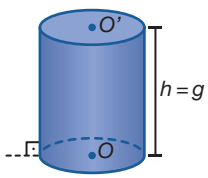


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Quando as geratrizes do cilindro são oblíquas às bases, temos um **cilindro oblíquo**. Já quando as geratrizes são perpendiculares às bases, temos um **cilindro reto**.



Cilindro oblíquo.



Cilindro reto.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O cilindro reto também é denominado **cilindro de revolução**, visto que pode ser gerado pela rotação de um retângulo em torno do eixo que contém um de seus lados (figura **A**), em um giro completo.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

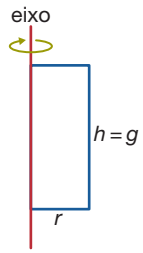
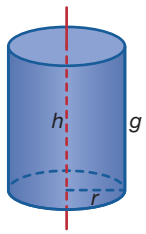


Figura **A**.

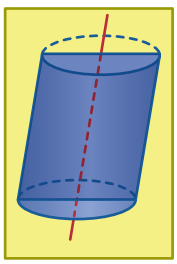


Cilindro reto.

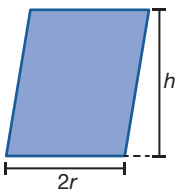
Denominamos **seção meridiana** de um cilindro a região determinada pela interseção do cilindro e de um plano que contém seu eixo.

Em um cilindro oblíquo, a seção meridiana é determinada por um paralelogramo.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

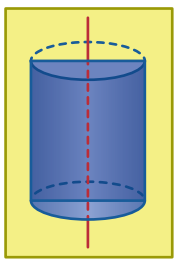


Interseção entre um cilindro oblíquo e um plano que contém seu eixo.

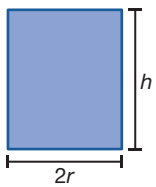


Seção meridiana.

Em um cilindro reto, a seção meridiana é determinada por um retângulo.



Interseção entre um cilindro reto e um plano que contém seu eixo.



Seção meridiana.

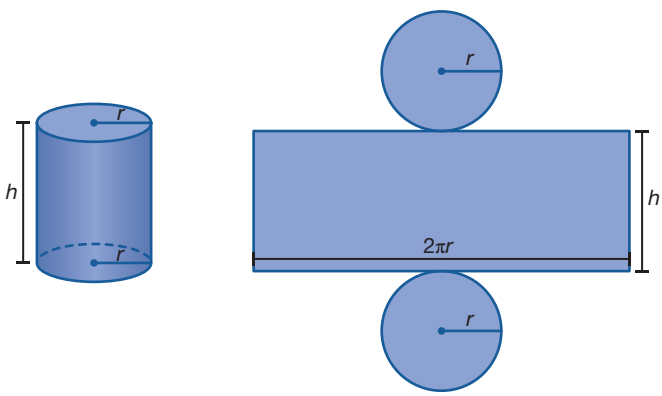
Observação

Quando a seção meridiana de um cilindro é determinada por um quadrado, ou seja, $2r = h$, o cilindro é denominado "cilindro equilátero".

Área da superfície de um cilindro reto

Analise um cilindro reto e sua respectiva planificação.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



As bases do cilindro são círculos congruentes de raio r, e a superfície lateral é um retângulo de dimensões h e $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base). Com base nessas informações, podemos calcular a área da superfície, ou seja, a área total do cilindro.

a) Área da base: $A_b = \pi r^2$

b) Área lateral: $A_l = 2\pi rh$

c) Área total da superfície: $A_t = 2A_b + A_l = 2\pi r^2 + 2\pi rh \Rightarrow A_t = 2\pi r(r + h)$

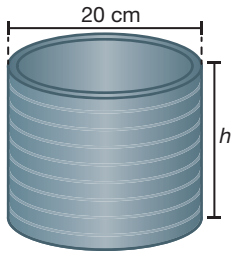
Observação

Lembre-se de que a área de um círculo de raio r é πr^2, e o comprimento da circunferência que o determina é $2\pi r$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R1. Determine a altura de um recipiente em forma de cilindro reto sabendo que sua base tem 20 cm de diâmetro e sua superfície externa total (incluindo a tampa) foi coberta por 1632,8 cm^2 de alumínio.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Para resolver este problema, vamos considerar que esse recipiente seja um cilindro reto cuja base tenha 20 cm de diâmetro. Como o comprimento do raio r é igual à metade do comprimento do diâmetro, temos $r = 10$ cm. Assim:

$$A_b = \pi r^2$$
$$A_b = 3{,}14 \cdot 10^2$$
$$A_b = 314$$

$$A_l = 2\pi rh$$
$$A_l = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot h$$
$$A_l = 62{,}8h$$

Observação

Nesta resolução, considerou-se $\pi = 3{,}14$.

Logo, a área da base é 314 cm^2, e a área da superfície lateral é $62{,}8h$ cm^2.

Como a área total da superfície é 1632,8 cm^2, fazemos:

$$A_t = 2A_b + A_l$$
$$1632{,}8 = 2 \cdot 314 + 62{,}8h$$
$$62{,}8h = 1632{,}8 - 628$$
$$h = \frac{1004{,}8}{62{,}8} = 16$$

Observação

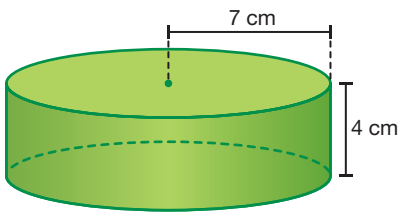
Outra maneira de resolver este problema é substituir os valores na fórmula $A_t = 2\pi r(r + h)$.

Portanto, a altura do recipiente é, aproximadamente, 16 cm.

R2. Considere um retângulo de lados 4 cm e 7 cm. Calcule a área total do cilindro obtido pela rotação do retângulo em torno de um de seus lados menores (considere $\pi = 3{,}14$).

Resolução

Ao rotacionar o retângulo em torno de um de seus lados menores, obtemos o seguinte cilindro.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Esse cilindro tem altura 4 cm e raio da base 7 cm. Logo:

$A_t = 2\pi r(r + h)$

$A_t = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 7 \cdot (7 + 4)$

$A_t = 483{,}56$

Portanto, a área total do cilindro é, aproximadamente, 483,56 cm^2.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R3. Considere um cilindro reto cuja área total é 20π cm^2. Sabendo que a área da seção meridiana dele é 12 cm^2, determine o comprimento do raio da base desse cilindro.

Resolução

Como o cilindro é reto, então sua seção meridiana é um retângulo cujas dimensões são $2r$ e h, em que h é a altura do cilindro e r é o comprimento do raio da base. Assim:

$$2r \cdot h = 12 \Rightarrow rh = 6$$

Como a área total desse cilindro é 20π cm^2, segue que:

$$20\pi = 2\pi r(r + h) \Rightarrow 10 = r^2 + rh$$

Substituindo rh por 6, obtemos:

$$10 = r^2 + rh \Rightarrow 10 = r^2 + 6 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

Portanto, o comprimento do raio da base desse cilindro é 2 cm.

Observação

Neste caso, $r = 2$, pois $r > 0$.

Exercícios e problemas

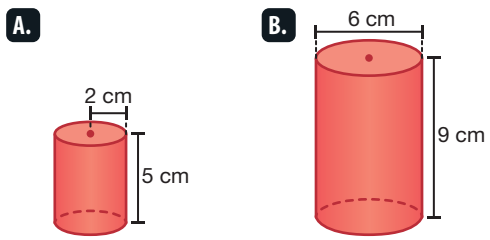
Anote as respostas no caderno.

Dica

Quando necessário, na resolução das tarefas deste capítulo, considere $\pi = 3{,}14$.

1. A. Resposta: $A_b \simeq 12{,}56$ cm^2; $A_l \simeq 62{,}8$ cm^2; $A_t \simeq 87{,}92$ cm^2

1. Calcule a área da base, a área da superfície lateral e a área total de cada cilindro reto.

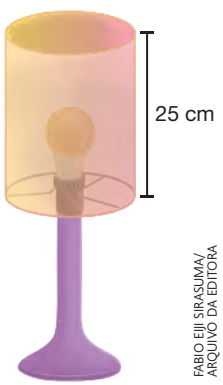


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

1. B. Resposta: $A_b \simeq 28{,}26$ cm^2; $A_l \simeq 169{,}56$ cm^2; $A_t \simeq 226{,}08$ cm^2

2. Calcule a área total de um cilindro reto com 40 cm de altura e comprimento do diâmetro da base igual a 25 dm. Resposta: Aproximadamente 129 525 cm^2 ou 1 295,25 dm^2.

3. Na confecção da cúpula de um abajur, é construída uma armação com formato de cilindro reto que, em seguida, tem sua lateral totalmente coberta por um tecido retangular. Para que a cúpula de um abajur com 25 cm de altura tenha 1 570 cm^2 de tecido em sua superfície lateral, é necessário que a armação tenha quantos centímetros de raio? Resposta: Aproximadamente 10 cm.



FABIO EIJI SIRASUMA/ ARQUIVO DA EDITORA

4. Um reservatório de água, com tampa, tem formato de cilindro reto e área total da superfície igual a 314 m^2. Determine a altura desse reservatório sabendo que o comprimento do diâmetro da sua base é 10 m. Resposta: Aproximadamente 5 m.

5. O cilindro compactador de uma máquina compactadora de asfalto, comumente chamada de "rolo compressor", localiza-se na parte dianteira dela.



ANDREW OSTRY/SHUTTERSTOCK

Máquina compactadora de asfalto.

Sabendo que o cilindro compactador dessa máquina tem 1,3 m de diâmetro e 1,7 m de comprimento, responda às questões.

a) Qual é a área da superfície lateral do cilindro compactador dessa máquina?
Resposta: Aproximadamente 6,94 m^2.

b) No asfaltamento de uma rua, se essa máquina se deslocar em linha reta e contínua, que área, em metros quadrados, será compactada quando o cilindro realizar 50 voltas completas?
Resposta: Aproximadamente 346,97 m^2.

6. Considere em um plano cartesiano um retângulo com vértices nos pontos de coordenadas $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(5, 3)$ e $(5, 0)$. Calcule a área total da superfície do cilindro obtido ao se rotacionar esse retângulo em torno do:

a) eixo x. Resposta: Aproximadamente 150,72 unidades de área.

b) eixo y. Resposta: Aproximadamente 251,2 unidades de área.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Professor, professora: Antes de os estudantes elaborarem o problema da tarefa **10**, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

7. A agroindústria familiar é uma oportunidade para que os pequenos agricultores beneficiem sua produção, ou parte dela, de maneira a agregar valor aos seus produtos. Em geral, a produção das agroindústrias familiares pode ser encontrada em feiras livres, supermercados, entre outros lugares, e constitui ao consumidor uma alternativa de acesso a produtos que passam por um processo de produção mais sustentável e com pouco uso de produtos químicos.

Em certo sítio, são fabricados diversos tipos de compotas com frutas cultivadas na propriedade. O envasamento desses doces é realizado em potes com formado de cilindro reto com 15 cm de altura e 5 cm de raio da base. Após o envase, cada pote recebe um rótulo retangular, cujo comprimento corresponde à circunferência do pote, e a altura, a 60% da altura do pote.



FABIO FUJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Qual é a área de cada um desses rótulos?

Resposta: Aproximadamente 282,6 cm^2.

8. Certa empresa produz, utilizando material reciclado, embalagens com formato de cilindro equilátero com 35 cm de altura. Após produzida, cada embalagem passa por um processo de pintura. Sabendo que 350 mL da tinta utilizada pinta, no máximo, 2,5 m^2, determine a quantidade mínima de tinta necessária para pintar 125 dessas embalagens.

Resposta: Aproximadamente 10 097,5 mL.

9. Para sustentar a cobertura de uma construção, serão utilizados sete pilares de madeira com formato de cilindro reto, todos com 30 cm de diâmetro, sendo seis com 3,5 m de altura e um com 5 m. Para protegê-los da umidade, suas superfícies laterais receberão uma camada de impermeabilizante. Sabendo que 900 mL de impermeabilizante cobrem uma área de 9 m^2, quantos litros dessa substância aproximadamente serão necessários para realizar o trabalho?

Resposta: Aproximadamente 2,45 L.

10. Realize uma pesquisa sobre objetos cotidianos cujo formato lembre um cilindro reto. Em seguida, de acordo com os resultados obtidos, elabore um problema envolvendo o cálculo da área total de um cilindro reto. Por fim, peça a um colega que o resolva.

Resposta pessoal. A resposta depende do resultado da pesquisa realizada pelos estudantes.

11. O AquaDom foi um dos aquários mais interessantes do mundo. Localizado em um hotel de Berlim, na Alemanha, esse aquário, que tinha formato de cilindro reto, sofreu uma ruptura em 2022, provocando uma inundação no hotel e nas ruas próximas. Com capacidade para cerca de 1 000 000 de litros de água e mais de 1 500 peixes, o AquaDom tinha uma base com cerca de 34,54 m de circunferência e altura de 25 m.

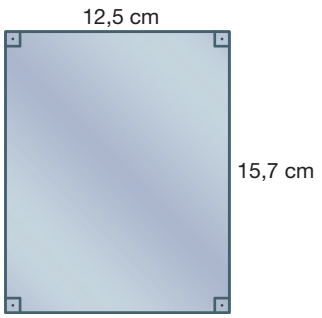

DARMER/ROP/ZUMA PRESS/IMAGEPLUS

Aquário AquaDom, no dia do incidente que o destruiu, em 16 de dezembro de 2022.

Qual era a área da superfície lateral desse aquário?

Resposta: Aproximadamente 863,5 m^2.

12. A superfície lateral de um recipiente cilíndrico será produzida com a chapa de metal representada a seguir, sem que haja desperdício de material.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

No máximo, quantos centímetros quadrados de área terá o fundo do recipiente?

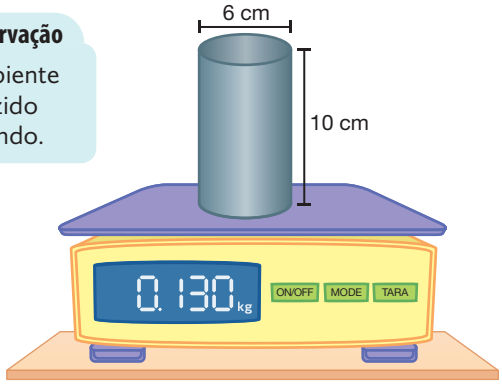
Resposta: Aproximadamente 19,625 cm^2.

13. O recipiente a seguir, que tem forma de cilindro reto e não tem tampa, foi produzido com uma chapa de metal. Quantos gramas de metal há em um centímetro quadrado dessa chapa?

Resposta: Aproximadamente 0,6 g.

Observação

O recipiente produzido tem fundo.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: A tarefa **10** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo, assim, para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

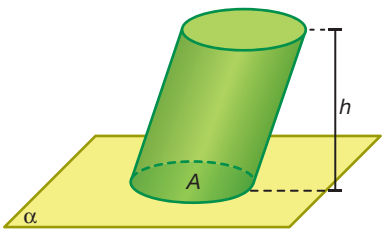
Volume do cilindro

No cálculo da quantidade de água que pode ser armazenada em um reservatório cilíndrico, podemos utilizar conhecimentos acerca do volume do cilindro.

No entanto, qual é a expressão que possibilita calcular o volume de um cilindro? Imagine um cilindro qualquer de altura h, cuja base seja um círculo de área A, contido em um plano α.



FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Pode-se mostrar que, em um cilindro, toda seção paralela à base é congruente a essa base.

Questão A. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam que construiriam um prisma apoiado no plano α, ao lado do cilindro, com altura h e área da base igual a A.

Questão A. Qual estratégia você utilizaria para calcular o volume desse cilindro?

Questão B. Mostre que, para determinar o volume de um cilindro qualquer, multiplica-se a área da base por sua altura.

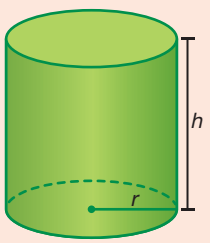
Questão B. Resposta: Utilizando a estratégia descrita na questão **A**, temos um prisma e um cilindro apoiados em um plano α, ambos de altura h e área da base igual a A. Vamos supor um plano horizontal β, paralelo a α, que produz seções de áreas A' e A'' no prisma e no cilindro, respectivamente. Como figuras congruentes têm áreas iguais, então $A' = A = A''$. Consequentemente, pelo Princípio de Cavalieri, o prisma e o cilindro têm volumes iguais. Como estudamos anteriormente, o volume do prisma é igual a $A \cdot h$. Assim, o volume do cilindro também é igual a $A \cdot h$, ou seja, o produto da área da base por sua altura.

Dica

Use o Princípio de Cavalieri para relacionar um cilindro com outra figura geométrica espacial que você conheça e seja adequada para comparar seus volumes.

O volume V de um cilindro é obtido multiplicando a área da base por sua altura. No caso do cilindro de altura h e raio da base r, temos:

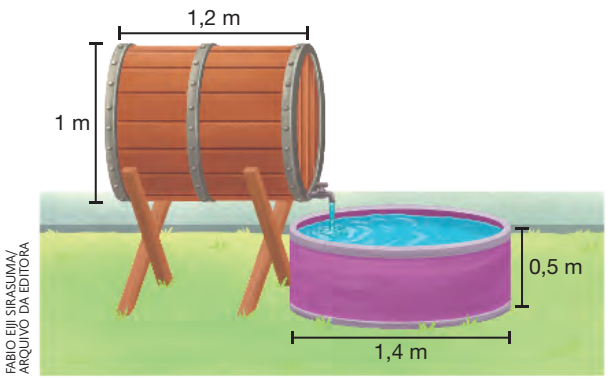
$$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \pi r^2 h$$



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas resolvidos

R4. Um barril de forma cilíndrica com 1,2 m de altura interna e diâmetro interno da base com 1 m de comprimento está completamente cheio de água. Para esvaziá-lo, foi utilizada uma torneira que despeja água à vazão média de 6 L por minuto em um recipiente com formato de cilindro reto, conforme a figura.



FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

As medidas correspondentes ao recipiente referem-se às dimensões internas.

a) Considerando essa vazão média, quanto tempo é necessário para esvaziar totalmente o barril?

b) A capacidade do recipiente será suficiente para conter toda a água do barril?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolução

Inicialmente, calculamos o volume V de água no barril.

$$V = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1{,}2 = 0{,}942$$

Assim, o volume de água no barril é, aproximadamente, 0,942 m^3.

Como a vazão é dada em litros e 1 $m^3 = 1000$ L, fazemos:

$$0{,}942 \cdot 1000 = 942$$

Logo, a capacidade do barril, em litros, é, aproximadamente, 942 L.

a) Indicando por x o tempo necessário para esvaziar o barril e usando a regra de três, temos:

Quantidade de água (em litros)		Tempo (em minutos)
6		1
942		x

$$\frac{6}{942} = \frac{1}{x} \Rightarrow 6x = 942 \Rightarrow x = 157$$

Portanto, serão necessários aproximadamente 157 minutos ou 2 horas e 37 minutos para esvaziar totalmente o barril.

b) Calculando a capacidade V_r do recipiente cilíndrico, temos:

$$V_r = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot \left(\frac{1{,}4}{2}\right)^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}7693$$

Assim, a capacidade do recipiente é, aproximadamente, 0,7693 m^3.

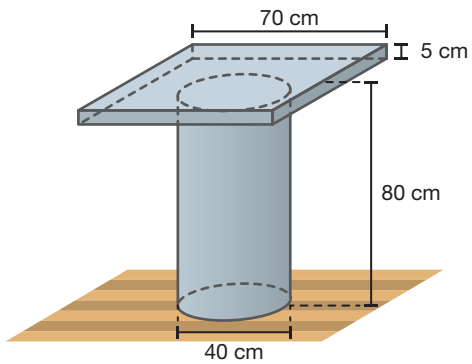
Como a capacidade do recipiente é menor do que o volume de água no barril $(0{,}7693 < 0{,}942)$, então ela não será suficiente.

Observação

Nos itens **a** e **b**, utilizou-se $\pi = 3{,}14$.

R5. A prefeitura de certa cidade vai construir, em uma praça, cinco mesas de concreto, como a apresentada, com 80 cm de altura. Cada mesa será composta de duas partes maciças: uma com formato de cilindro reto com 40 cm de diâmetro de base (pé da mesa) e outra com formato de paralelepípedo reto retângulo de base quadrada (tampo da mesa).

De acordo com as medidas indicadas na imagem e desconsiderando desperdícios, determine a quantidade mínima de concreto, em metros cúbicos, necessária para a construção dessas cinco mesas (considere $\pi = 3{,}14$).



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Como a mesa é composta de duas partes, inicialmente, calculamos a quantidade de concreto necessária para a produção de cada uma delas, ou seja, calculamos seus volumes.

Volume do pé da mesa

$$V_P = \pi r^2 h$$
$$V_P = 3{,}14 \cdot \left(\frac{40}{2}\right)^2 \cdot (80 - 5)$$
$$V_P = 94\,200$$

Portanto, são necessários, aproximadamente, 94 200 cm^3 de concreto para produzir o pé de uma mesa.

Volume do tampo da mesa

$$V_P = A_b \cdot h$$
$$V_P = 70^2 \cdot 5$$
$$V_P = 24\,500$$

Logo, são necessários 24 500 cm^3 de concreto para produzir o tampo de uma mesa.

Adicionando os volumes obtidos, determinamos a quantidade necessária aproximada de concreto para construir uma mesa.

$$94\,200 \text{ cm}^3 + 24\,500 \text{ cm}^3 = 118\,700 \text{ cm}^3$$

Por fim, determinamos a quantidade de concreto necessária aproximada para a construção das cinco mesas.

$$5 \cdot 118\,700 \text{ cm}^3 = 593\,500 \text{ cm}^3 = 0{,}5935 \text{ m}^3$$

Portanto, são necessários, no mínimo, aproximadamente 0,5935 m^3 de concreto para construir as cinco mesas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reconheçam que o trabalho do serralheiro contribui significativamente para a vida das pessoas, principalmente no que diz respeito à segurança e ao *design* personalizado de casas e estabelecimentos. A criação e o reparo de portões e grades ajuda a garantir a proteção dos locais, proporcionando segurança aos moradores e proprietários.*

O trabalho do serralheiro

O cálculo de volume é apenas uma das muitas aplicações matemáticas que um serralheiro usa diariamente em seu trabalho, empregando-o, por exemplo, para criar produtos de acordo com a necessidade dos clientes.

*Além disso, eles podem mencionar que a serralheria decorativa é responsável por criar peças personalizadas que tornam os espaços únicos e esteticamente agradáveis.

O que exatamente faz um serralheiro? Esse profissional é especializado no trabalho com metais, e uma de suas funções é moldá-los em diferentes formas e tamanhos, criando estruturas duráveis, funcionais e decorativas, ou mesmo reparando uma variedade de objetos, desde portões até estruturas metálicas complexas. No reparo e na composição desses objetos, o serralheiro utiliza máquina de solda e instrumentos de medição, calcula ângulos e dimensiona materiais para assegurar a precisão e a segurança de suas criações. Por isso, nessa profissão, é preciso unir conhecimentos matemáticos, habilidades manuais, precisão e criatividade.

Professor, professora: Ao visitar uma oficina de serralheria, alguns cuidados de proteção são importantes para a integridade dos estudantes, como protetor auricular e óculos especiais para solda. Se julgar conveniente, substitua a visita presencial a esse local pela exibição de um vídeo explicativo projetado na sala de aula.



BAUHAUZE/SHUTTERSTOCK

Serralheiro soldando peça de metal.

PARA EXPANDIR

Que tal conhecer o local de trabalho de serralheiros? Nessa visita, aproveite para conhecer mais sobre o dia a dia desses profissionais. Não se esqueça de usar EPIs adequados durante a visita.

3. Resposta pessoal. Sugestões de resposta: Óculos de proteção, para preservar os olhos e o rosto do risco de altas temperaturas e fagulhas; luvas, para evitar acidentes com objetos pontiagudos e infecções; avental, para cobrir o tronco e as pernas, impedindo acidentes; máscara de solda, para proteger contra queimaduras; protetor auricular, para evitar o desconforto auditivo com os ruídos decorrentes do trabalho, entre outros equipamentos.

Observação

Ainda não há curso superior específico para se tornar serralheiro. Para exercer essa profissão, é possível fazer um curso técnico ou profissionalizante de serralheria ou ainda graduar-se em Desenho Industrial ou *Design* de Produto. O aprendizado prático é muito importante para o desempenho desse ofício.

O mercado de trabalho na área de serralheria é amplo e atende às necessidades de diversos setores, desde a construção civil até a indústria de móveis e decoração. A importância desse ofício reside na segurança e na funcionalidade que os serralheiros conferem a estruturas metálicas como portas, janelas, grades e outras peças. A *expertise* desses profissionais garante a durabilidade e resistência desses elementos, contribuindo para lugares mais seguros e com *designs* personalizados.

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam de acordo com seus conhecimentos prévios. Eles podem citar que uma pessoa interessada em se tornar serralheira precisa desenvolver habilidades manuais precisas e criatividade, além de ter interesse por conhecimentos matemáticos.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Você já conhecia a profissão de serralheiro? Que habilidades uma pessoa interessada em exercer essa profissão precisa desenvolver?

2. Em sua opinião, como o trabalho do serralheiro contribui para a vida das pessoas? Converse com os colegas sobre o assunto.

Professor, professora: Após realizar a pesquisa, oriente os estudantes a listar os equipamentos e descrever seus usos, compartilhando com os colegas o que encontraram com o objetivo de comparar os resultados.

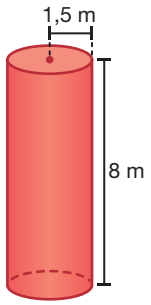
3. Os serralheiros precisam garantir a própria segurança durante a realização de seu trabalho. Pesquise e liste quais são os equipamentos de proteção individual (EPIs) usados na rotina desses profissionais, anote em quais etapas esses equipamentos são utilizados e compartilhe com os colegas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Professor, professora: Se necessário, oriente os estudantes a considerar, quando necessário, $\pi = 3{,}14$ na resolução das tarefas. Anote as respostas no caderno.

14. Calcule o volume de cada cilindro reto.

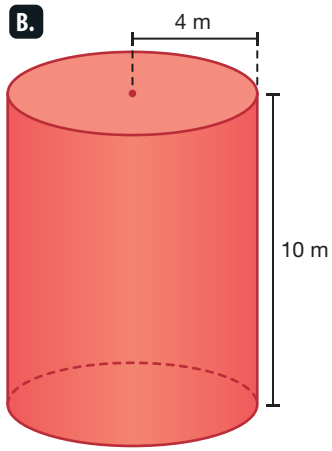
A.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: Aproximadamente 56,52 m³.

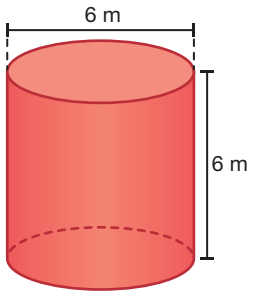
B.



TAMIRES ROSE AZEVEDO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: Aproximadamente 502,4 m³.

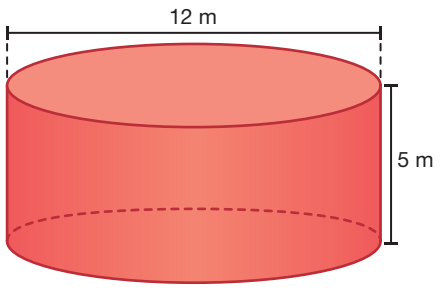
C.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: Aproximadamente 169,56 m³.

D.



TAMIRES ROSE AZEVEDO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: Aproximadamente 565,2 m³.

15. Calcule o volume de parafina usada na confecção de uma vela cilíndrica cujo comprimento do diâmetro da base é 4 cm e a altura é 20 cm.
Resposta: Aproximadamente 251,2 cm³.

16. Determine o comprimento do raio da base de um cilindro reto cujo volume é 15π cm³ e a altura é 3 cm. Resposta: $\sqrt{5}$ cm

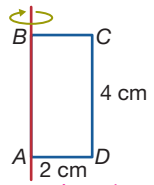
17. O reservatório de água de um condomínio tem o formato de um cilindro reto com 3 m de raio da base e 4 m de altura. Qual é a capacidade, em litros, desse reservatório? Resposta: Aproximadamente 113 040 L.

Dica

Lembre-se de que 1 m³ = 1000 L.

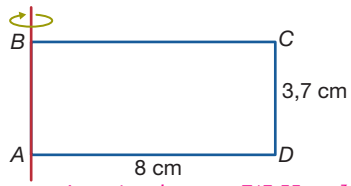
18. Em cada item, determine o volume do cilindro obtido pela rotação do retângulo em torno do eixo que contém seu lado $\overline{AB}$.

A.



Resposta: Aproximadamente 50,24 cm³.

B.



Resposta: Aproximadamente 743,55 cm³.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

19. Até que altura, em centímetros, deve-se encher uma jarra cilíndrica cujo raio da base interna tem 5 cm de comprimento para que ela fique com 628 mL de água? Resposta: Aproximadamente 8 cm.

20. (Enem, 2015) Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m³ de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura atual. Após a inauguração da nova cisterna, a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π.

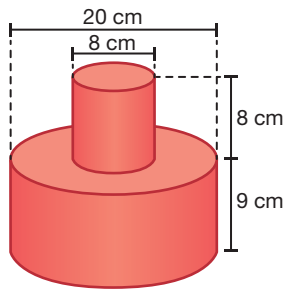
Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

a) 0,5 **c)** 2,0 **e)** 8,0

b) 1,0 **d)** 3,5

Resposta: Alternativa **c**.

21. O sólido a seguir é composto de duas peças, ambas com formato de cilindro reto.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

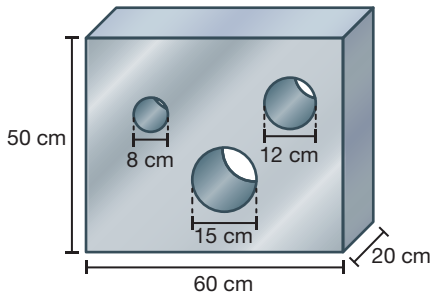
21. a) Resposta: Aproximadamente 1394,16 cm².

a) Qual é a área da superfície desse sólido?

b) Determine o volume desse sólido.
Resposta: Aproximadamente 3 227,92 cm³.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

22. Para confeccionar uma peça, um torneiro mecânico vai fazer três furos em formato de cilindro reto em uma chapa metálica com forma de paralelepípedo reto retângulo, como indicado no esquema.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual é o volume total de metal retirado da chapa na realização dos furos? Resposta: Aproximadamente 6 798,1 cm^3.

b) Qual é o volume da peça obtida?
Resposta: Aproximadamente 53 201,9 cm^3.

23. (UFRGS-RS, 2018) Um tanque no formato de um cilindro circular reto, cujo raio da base mede 2 m, tem o nível da água aumentado em 25 cm após uma forte chuva. Essa quantidade de água corresponde a 5% do volume total de água que cabe no tanque.

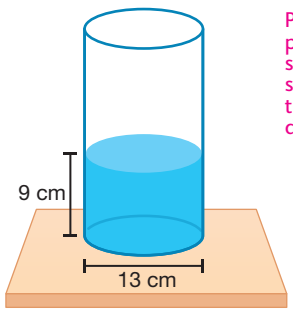
Qual é a alternativa que melhor aproxima o volume total de água que cabe no tanque, em m^3?

a) 57 **b)** 60 **c)** 63 **d)** 66 **e)** 69

Resposta: Alternativa **c**.

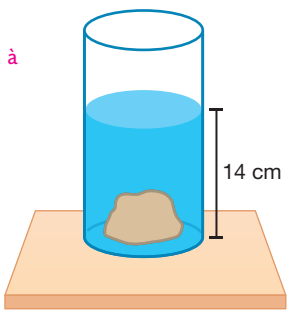
24. Para medir o volume de um sólido irregular, Berenice o submergiu totalmente em um recipiente com formato de cilindro reto com água, conforme o esquema.

1º momento: Recipiente sem o sólido irregular.



Professor, professora: Verifique a possibilidade de realizar uma tarefa semelhante à **24** na prática. Para isso, leve à sala de aula um recipiente cilíndrico transparente, com graduação de 1 cm, e diversos objetos maciços.

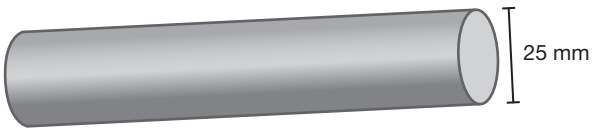
2º momento: Recipiente com o sólido irregular.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Qual é o volume desse sólido em centímetros cúbicos?
Resposta: Aproximadamente 663,33 cm^3.

25. Certa indústria produz um tipo de cilindro maciço de alumínio cujo comprimento do diâmetro da base é 25 mm.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que com 0,058875 m^3 de alumínio é possível produzir 1000 unidades desse produto, qual é a altura desse cilindro em centímetros? Resposta: Aproximadamente 12 cm.

26. Para abastecer a caixa-d'água de uma empresa, foi contratado um caminhão-pipa. O reservatório do caminhão tem formato de cilindro reto, com comprimento interno de 6 metros e diâmetro interno da base de 1,8 metro. Após o abastecimento, restou no reservatório do caminhão $\frac{4}{7}$ de sua capacidade.

Quantos metros cúbicos de água, aproximadamente, foram usados no abastecimento da caixa-d'água da empresa, sabendo que o reservatório do caminhão estava cheio antes do abastecimento?

a) 8,72 **c)** 6,54 **e)** 15,3

b) 1,79 **d)** 0,6

Resposta: Alternativa **c**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

27. Considere os cilindros C_1 e C_2 com alturas indicadas por, respectivamente, h_1 e h_2. Sabendo que os cilindros têm volumes iguais e que a área da base de C_1 é igual ao dobro da área da base de C_2, pode-se afirmar que:
Resposta: Alternativa **c**.

a) $h_1 = h_2$

b) $h_1 = 2 \cdot h_2$

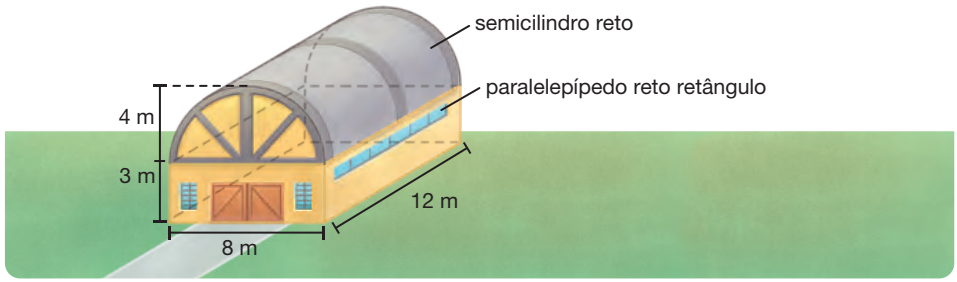
c) $h_2 = 2 \cdot h_1$

d) $h_2 = \pi \cdot h_1$

e) $h_1 = \frac{h_2}{4}$

28. O galpão representado a seguir foi construído para guardar a produção de certa indústria. Para conservar as propriedades originais dos produtos armazenados, será instalado um sistema de refrigeração no qual estarão dispostos, em locais estratégicos, pontos de entrada de ar.

FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA



Observação
Na imagem, são apresentadas medidas internas do galpão.

Determine quantos desses pontos serão instalados sabendo que, para cada 120 m^3 de espaço interno do galpão, será instalado um ponto. Resposta: 5 pontos.

29. Para armazenar combustível, um posto revendedor utiliza um reservatório em formato de cilindro reto cuja altura interna e comprimento do diâmetro interno da base estão indicados no esquema.

FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

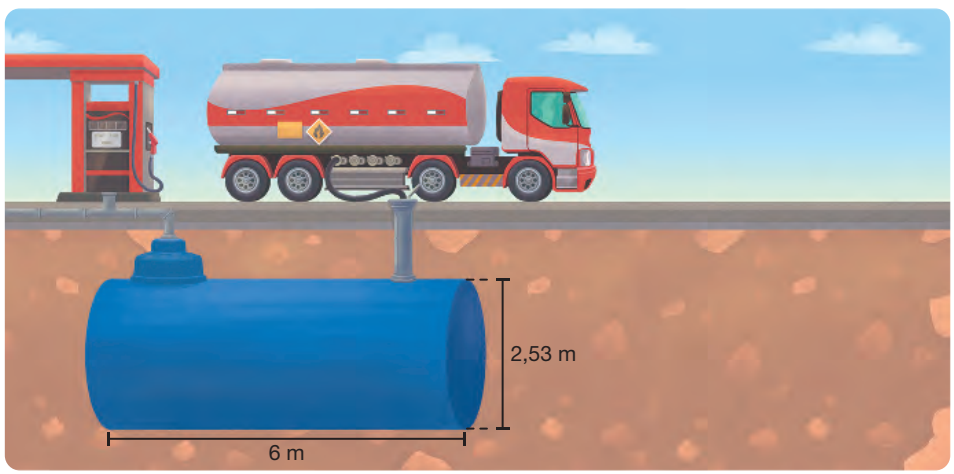
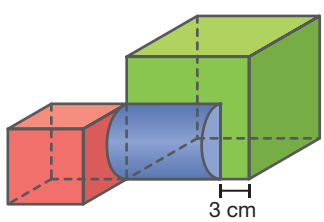


Imagem com elementos sem proporção entre si.

Considerando que o reservatório esteja vazio e que será abastecido com 80% de sua capacidade por um caminhão-tanque, a uma vazão de 10 L por segundo, em aproximadamente quantos minutos o reservatório será abastecido? Resposta: 40 min

30. Um artesão construiu uma peça composta de três partes: duas em formato de cubo e uma em formato de semicilindro reto.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



Observação
O diâmetro do semicilindro coincide com a aresta do cubo vermelho.

Sabendo que o semicilindro tem 10 cm de altura e o cubo em vermelho tem 8 cm de aresta, determine o volume dessa peça. Resposta: Aproximadamente 2 960,2 cm^3.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Professor, professora: Oriente os estudantes a consultar mais informações sobre os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS) no início do volume.

31. O manejo florestal sustentável consiste na utilização dos recursos da floresta de forma planejada, propiciando atividades econômicas, como extração madeireira e não madeireira, em um sistema de rodízio, que garante a conservação e o desenvolvimento da floresta. No manejo da madeira, para cada árvore derrubada, outras da mesma espécie são plantadas, a fim de regenerar a cobertura vegetal. Quando uma árvore é transformada em tora, seu volume pode ser obtido por meio do método de Francon, que desconsidera partes da tora que não são aproveitadas pela serraria por serem ocas e podres ou apresentarem outros defeitos. Além do método de Francon, pode-se utilizar o método geométrico para calcular o volume de uma tora de árvore. Esse método avalia o volume V de uma tora pela fórmula:

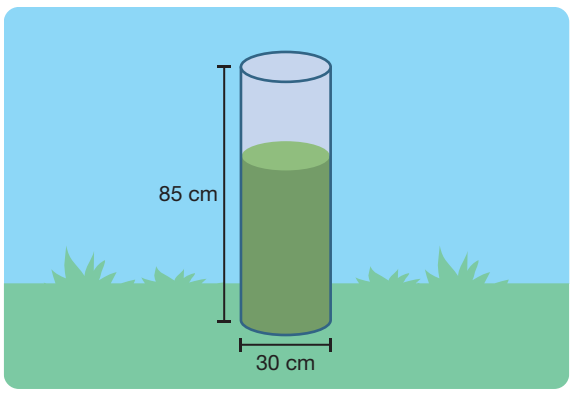
$$V = \frac{\pi D^2 h}{4}$$

em que h é o comprimento da tora e D é a média aritmética entre o comprimento do diâmetro da base D_1 e do topo D_2 da tora.

Utilizando o método geométrico, determine o volume de uma tora com 20 m de comprimento cujo diâmetro da base e do topo têm, respectivamente, 1,2 m e 80 cm de comprimento.
Resposta: Aproximadamente 15,7 m^3.

32. No recipiente em formato de cilindro reto representado a seguir, foi armazenada uma substância homogênea cuja massa é 1,3 kg por litro.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



Observação

As medidas apresentadas referem-se às dimensões internas do recipiente.

Sabendo que essa substância ocupa o espaço correspondente a 65% do volume interno do recipiente e que o recipiente vazio tem 5 kg, determine a massa do recipiente após o armazenamento da substância.
Resposta: Aproximadamente 55,7 kg.

33. O pluviômetro é um instrumento utilizado para medir a quantidade de chuva ocorrida em certa região. De maneira geral, essa quantidade é expressa em milímetros. Quando dizemos, por exemplo, que choveu 10 mm em certa região, equivale a dizer que, nessa região, choveu 10 L de água por metro quadrado. Considere que um agricultor, a fim de verificar a precipitação ocorrida em sua propriedade, tenha instalado em uma área aberta um balde cilíndrico com 12,5 cm de raio e 35 cm de altura. Se, após uma chuva, o balde, que estava vazio, passou a ter água no nível de 8 cm, qual foi a precipitação, em milímetros, ocorrida nessa propriedade?
Resposta: 80 mm.



DU ZUPPANI/PULSAR IMAGENS

Pluviômetro.

34. A pupunha é um legume retirado do caule de algumas palmeiras. Além de pouco calórico, é benéfico à saúde, pois fortalece o sistema imunológico, auxilia no combate a doenças cardíacas, previne de doenças degenerativas, ajuda na cicatrização, entre outros.

Qual é a altura de uma pupunha cujo volume é 84,78 cm^3 e o comprimento do diâmetro da base é 3 cm? Resposta: Aproximadamente 12 cm.

Dica

Para resolver a questão, considere que a pupunha tenha formato de cilindro.

35. Utilizando um balde em formato de cilindro cuja altura é 35 cm e o comprimento do diâmetro da base é 28 cm, Neide pretende encher uma caixa-d'água com 64 cm de altura cuja capacidade é 250 L. Qual será, desconsiderando possíveis desperdícios, a altura do nível da água na caixa-d'água após Neide despejar o conteúdo de 5 baldes completamente cheios nesse recipiente?
Resposta: Aproximadamente 28 cm.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

36. Considere um cilindro reto e um prisma hexagonal regular de mesmo volume e altura. Sabendo que o polígono da base do prisma tem 5 cm de lado, utilizando uma calculadora, determine o comprimento do raio da base do cilindro. Resposta: Aproximadamente 4,55 cm.

37. Certo fabricante está em dúvida entre qual formato de embalagem com tampa deve utilizar para armazenar um de seus produtos. Foram apresentados os seguintes tipos.

- Embalagem **A**: formato de cilindro com 34 cm de altura e comprimento do raio da base igual a 9 cm.
- Embalagem **B**: formato de paralelepípedo reto retângulo cujas dimensões são 30,5 cm, 19,3 cm e 14,432 cm.
- Embalagem **C**: formato de cilindro com 19,125 cm de altura e comprimento do raio da base igual a 12 cm.

a) Após realizar alguns cálculos, o fabricante percebeu que duas das embalagens têm volumes iguais. Quais são elas? Resposta: Embalagens **A** e **C**.

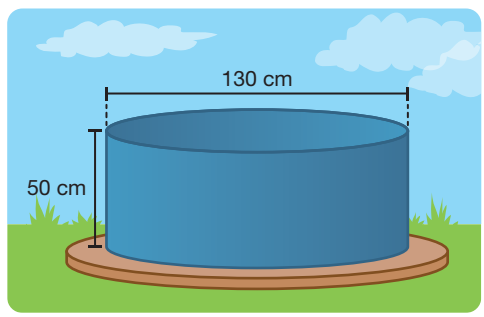
b) Sabendo que o metro quadrado do material utilizado na fabricação dessas embalagens custa R$ 32,50 e que, entre as de mesmo volume, o fabricante optou pela de menor custo, determine qual foi a embalagem escolhida. Resposta: Embalagem **C**.

c) Qual será o gasto com material para produzir 1500 embalagens? Resposta: Aproximadamente R$ 11435,00.

Dica

Para responder ao item **c**, considere a embalagem escolhida pelo fabricante.

38. Um reservatório em formato de cilindro reto será abastecido com água por meio de uma torneira que tem vazão constante de 0,66 litros por segundo. Analise as dimensões internas desse reservatório.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Qual será a altura, em centímetros, do nível da água após 5 minutos de abastecimento?
Resposta: Aproximadamente 15 cm.

41. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Professor, professora: A tarefa **41** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo, assim, para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

39. O quilate das ligas de ouro é uma unidade de pureza, que indica a quantidade de ouro e de outros metais presente no material. Cada quilate indica $\frac{1}{24}$ do todo. Assim, uma peça com 18 partes em massa de ouro e 6 partes em massa de algum outro metal é um ouro de 18 quilates. Portanto, uma peça de ouro de 18 quilates tem $\frac{3}{4}$ da massa em ouro e $\frac{1}{4}$ da massa em outro metal.

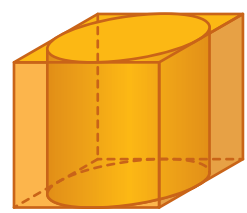
Imagine que a taça de uma competição seja maciça e composta apenas de ouro 18 quilates, cuja composição é de ouro com densidade 19,3 g/cm ^{3} e outro metal com densidade 6,1 g/cm ^{3}. Sabendo que ela tem formato de cilindro reto com 36 cm de altura e 5 cm de raio da base, sua massa seria de:

a) 30 kg a 36 kg
b) 10 kg a 16 kg
c) 15 kg a 20 kg
d) 20 kg a 26 kg
e) 40 kg a 45 kg

Resposta: Alternativa **a**.

40. Um objeto em formato de cilindro equilátero deverá ser acondicionado em uma embalagem com formato de paralelepípedo reto retângulo de maneira que as "folgas" entre o objeto e a parte interna da embalagem sejam mínimas.

Sabendo que o volume do objeto é 3215,36 cm^3, qual deverá ser o volume interno da embalagem? Resposta: Aproximadamente 4096 cm^3.

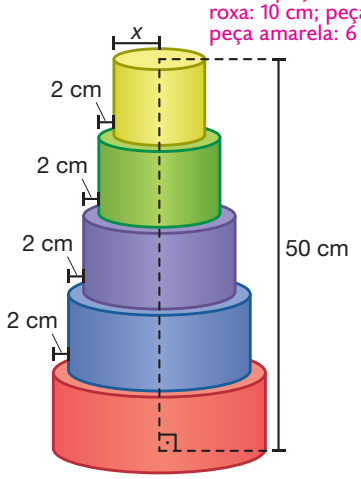

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

41. De acordo com os resultados obtidos na pesquisa realizada na tarefa **10** deste capítulo, elabore um problema envolvendo o cálculo do volume de um cilindro. Por fim, peça a um colega que o resolva.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

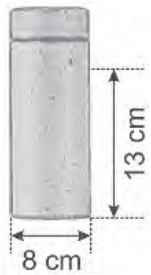
42. Cinco peças em formato de cilindro reto de mesma altura, porém com diferentes volumes, foram empilhadas. Sabendo que os centros das bases dessas peças estão alinhados e que a pilha de peças tem um volume igual a 16 956 cm^3, determine o comprimento aproximado do raio da base de cada uma dessas peças.

Resposta: Peça vermelha: 14 cm; peça azul: 12 cm; peça roxa: 10 cm; peça verde: 8 cm; peça amarela: 6 cm.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

43. (Fatec-SP, 2019) Uma garrafa térmica tem formato de cilindro circular reto, fundo plano e diâmetro da base medindo 8 cm. Ela está em pé sobre uma mesa e parte do suco em seu interior já foi consumido, sendo que o nível do suco está a 13 cm da base da garrafa, como mostra a figura.



FATEC-SP 2019

O suco é despejado num copo vazio, também de formato cilíndrico e base plana, cujo diâmetro da base é 4 cm e a altura é 7 cm. O copo fica totalmente cheio de suco, sem desperdício.

Nessas condições, o volume de suco restante na garrafa é, em cm^3, aproximadamente:

Resposta: Alternativa **c**.

a) 250
b) 380
c) 540
d) 620
e) 800

Dica

Adote $\pi = 3$.

Despreze a espessura do material da garrafa e do copo.

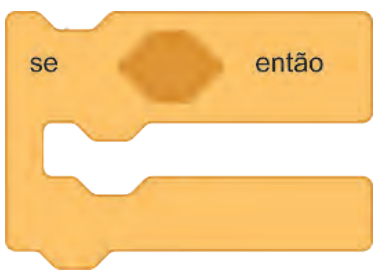
Professor, professora: Se julgar necessário, informe aos estudantes que, no problema, foi utilizado o termo "diâmetro da base medindo 8,0 cm" para se referir à medida do comprimento do diâmetro da base que, nesse caso, é 8,0 cm.

Acessando tecnologias

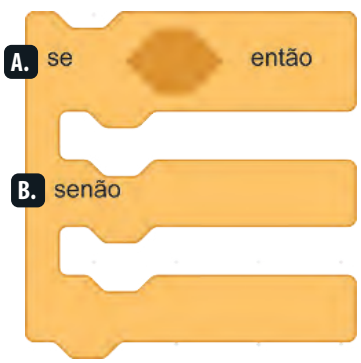
Scratch

Em diversas situações cotidianas, formulamos proposições do tipo: se Luiz obtiver uma nota superior a 7,5, então ele será aprovado em Matemática; se eu receber meu salário hoje, irei ao cinema, se não, lerei um livro. Essa estrutura, além de estar presente em nosso cotidiano, é útil e, muitas vezes, necessária em programação. Ela indica para o sistema se o programa deve ou não executar certa sequência de instruções, dependendo se a condição atribuída for verdadeira ou falsa. Para isso, no Scratch, podemos utilizar os seguintes blocos.

Esse bloco tem por finalidade tomar uma decisão e executar determinada sequência de instruções caso a condição descrita seja verdadeira. Se for falsa, a sequência de instruções deve ser desprezada.



Esse bloco tem por finalidade tomar uma decisão e realizar um desvio no processamento. Se a condição descrita for verdadeira, a sequência de instruções indicada em **A** será executada e a sequência de instruções indicada em **B** será descartada. Caso a condição seja falsa, a sequência de instruções indicada em **A** será desprezada e a sequência de instruções indicada em **B** será executada.



FOTOS: REPRODUÇÃO/SCRATCH

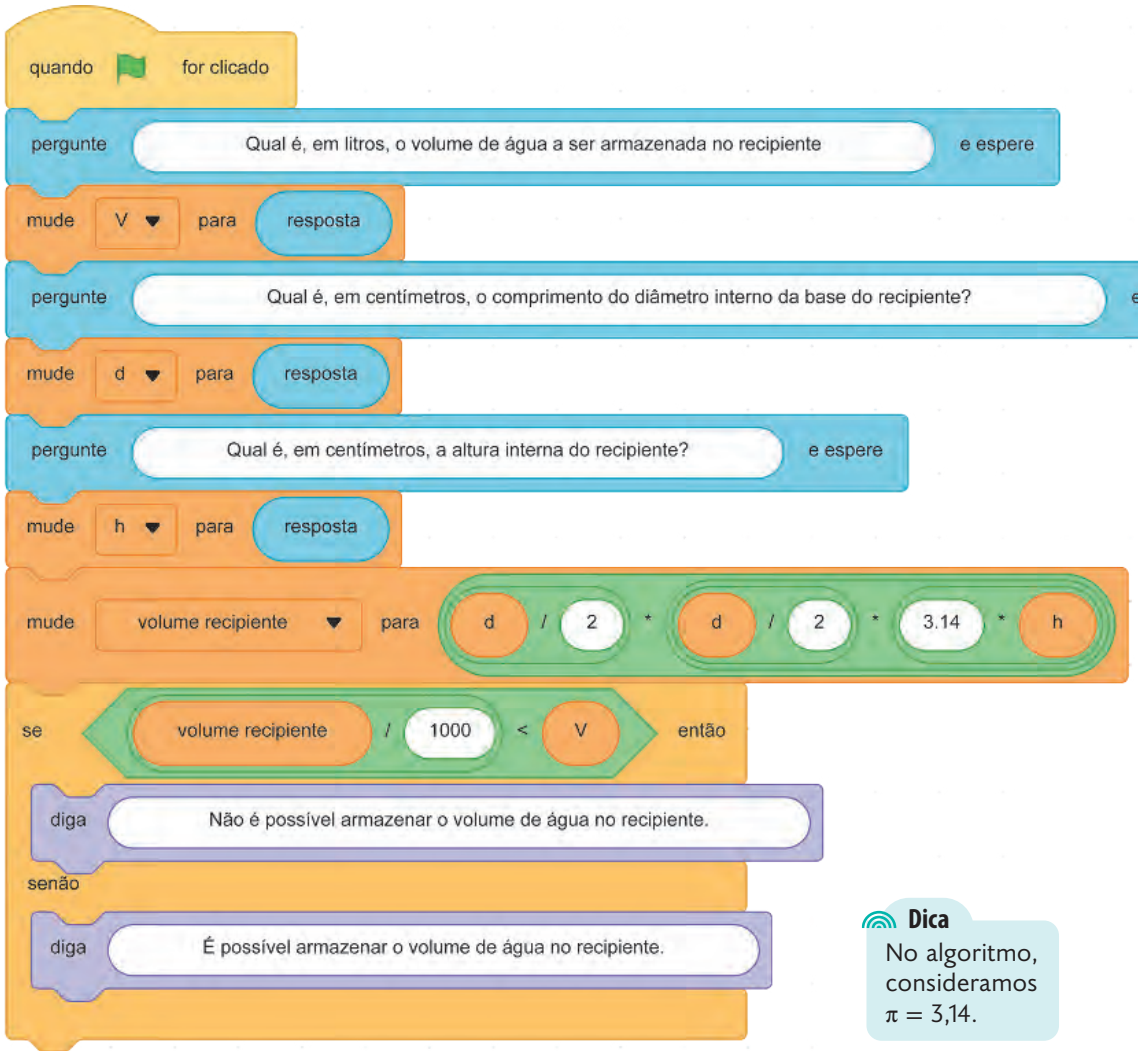
Para testar a relação entre dois ou mais termos nas condições em Scratch, são usados os blocos verdes com formato de hexágonos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

É possível armazenar certo volume de água em um recipiente com formato cilíndrico?

O algoritmo a seguir, que foi construído no Scratch, possibilita verificar se é possível armazenar certo volume de água, em litros, em um recipiente com formato de cilindro reto, dados o comprimento do diâmetro interno da base e a altura interna do recipiente, ambos em centímetros.

Dica
No Scratch, para escrever números decimais, é usado ponto em vez de vírgula.



Dica
No algoritmo, consideramos $\pi = 3{,}14$.

Vários dos blocos presentes nesse algoritmo foram usados anteriormente. Nesse caso, apresentaremos algumas informações sobre os novos blocos usados.

-  : indica uma divisão.
-  : indica uma comparação, neste caso, se o valor representado na lacuna da esquerda for menor do que o valor representado na lacuna da direita.

FOTOS: REPRODUÇÃO/SCRATCH

Agora é sua vez!

1. Qual condição deve ser verdadeira para que o programa diga "Não é possível armazenar o volume de água no recipiente."? Resposta: O volume do recipiente, em centímetros cúbicos, dividido por 1000 deve ser menor do que o volume de água, em litros, que se deseja armazenar no recipiente.

2. Construa um programa em Scratch que determine se é possível armazenar certo volume de água, em litros, em um recipiente com formato de cilindro reto, dados o comprimento do diâmetro interno da base e a altura interna do recipiente, ambos em metros. Se não for possível o acesso ao *software*, descreva-o com suas palavras. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O cone

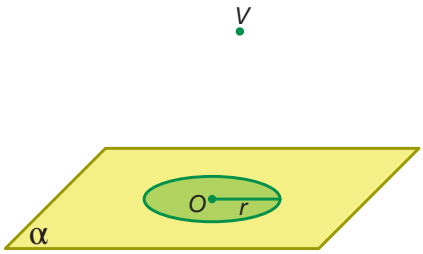
Parte do funil assemelha-se a um cone. Para determinarmos a quantidade de material necessário para sua fabricação ou a capacidade que ele pode comportar, é necessário que estudemos os elementos que compõem o cone, assim como a área de sua superfície e seu volume.



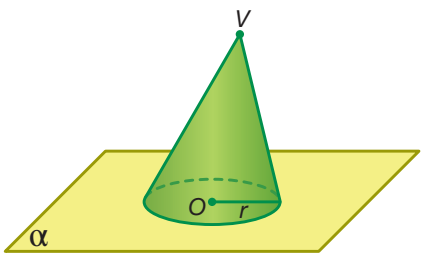
ADDKM/SHUTTERSTOCK

Funil.

Para definirmos o cone circular, consideramos um plano α, um círculo C de centro O contido nele e um ponto V não pertencente a α.



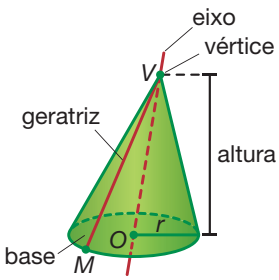
A união de todos os segmentos com uma extremidade na circunferência que determina C e a outra extremidade em V, juntamente com o círculo C, é chamada **cone circular**.



Observação

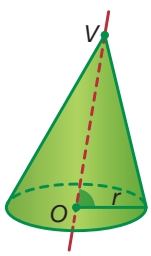
Neste livro, trataremos apenas dos cones circulares. Assim, a fim de simplificar a escrita, chamaremos o cone circular simplesmente de "cone".

Em um cone, podemos destacar os seguintes elementos.

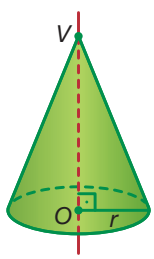


- A **base** é o círculo de raio r e centro O.
- O **vértice** é o ponto V.
- As **geratrizes** são os segmentos com uma extremidade no vértice e outra na circunferência da base. Nesse cone, $\overline{VM}$ é um exemplo de geratriz.
- O **eixo** é a reta $\overleftrightarrow{OV}$.
- A **altura** é a distância entre os planos paralelos que contêm a base e o vértice V.
- A **superfície lateral** é a reunião de todas as geratrizes.

O cone é denominado **cone oblíquo** quando tem eixo oblíquo à base. Já quando tem eixo perpendicular à base, recebe o nome de **cone reto**.



Cone oblíquo.



Cone reto.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O cone reto pode ser obtido ao rotacionarmos um triângulo retângulo em torno do eixo até uma volta completa, com um dos catetos contidos no eixo (Figura **B**). Dessa maneira, ele também é denominado **cone de revolução**.

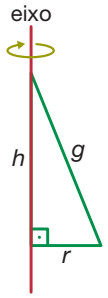
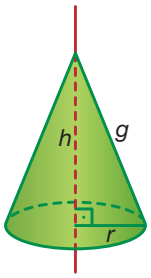


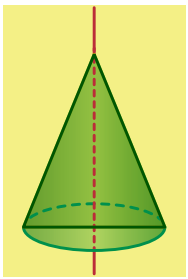
Figura **B**.

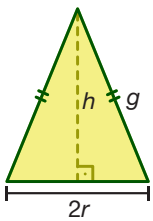


Cone reto.

A **seção meridiana** de um cone, região determinada pela interseção do cone com um plano que contém seu eixo, é um triângulo.

Em um cone reto, a seção meridiana é determinada por um triângulo isósceles.


Interseção entre um cone reto e um plano que contém seu eixo.



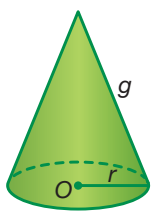
Seção meridiana.

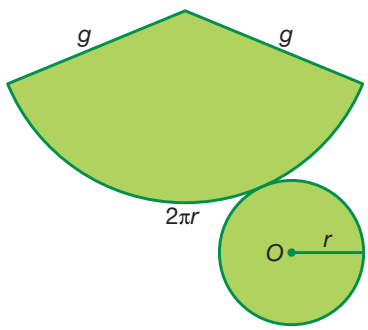
Observação

Quando a seção meridiana de um cone é determinada por um triângulo equilátero, este é denominado **cone equilátero**. Neste caso, $2r = g$.

Área da superfície de um cone reto

Analise a seguir um cone reto e sua respectiva planificação.





ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com a planificação, é possível notar que a base do cone reto é um círculo de raio r e a superfície lateral é um setor circular de raio g e comprimento $2\pi r$. Com base nessas informações, podemos calcular a área da superfície, ou seja, a área total do cone.

a) Área da base: $A_b = \pi r^2$

b) Área lateral:

Como a área do setor circular é proporcional ao comprimento do respectivo arco, podemos determinar a área lateral A_l por meio de uma regra de três.

Comprimento do arco		Área do setor
$2\pi g$	———	πg^2
$2\pi r$	———	A_l

$$\frac{\cancel{2\pi}g}{\cancel{2\pi}r} = \frac{\pi g^2}{A_l} \Rightarrow A_l \cdot g = r \cdot \pi g^2 \Rightarrow A_l = \pi rg$$

Observação

g é o comprimento do raio do setor circular.

c) Área total da superfície: $A_t = A_b + A_l = \pi r^2 + \pi rg \Rightarrow A_t = \pi r(r + g)$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R6. Um chapéu de festa, feito de cartolina, tem o formato de um cone reto cujo comprimento do raio da base é 10 cm e o da geratriz é 20 cm. Sabendo que a aba de encaixe de cada chapéu tem 5 cm^2 de área, determine quantos centímetros quadrados de cartolina são necessários para produzir 50 unidades desse chapéu.

Resolução

Após ser montado, o chapéu tem formato de cone reto de raio 10 cm e geratriz de 20 cm. Assim:

$$A_l = \pi rg = 3{,}14 \cdot 10 \cdot 20 = 628$$

Logo, a área da superfície lateral do chapéu é, aproximadamente, 628 cm^2.

Calculando a área q de cartolina necessária para produzir 50 unidades, temos:

$$q = 50 \cdot 628 + 50 \cdot 5 = 31650$$

Portanto, para produzir 50 unidades do chapéu são necessários, aproximadamente, 31650 cm^2 de cartolina.

Observação

Nestes cálculos, consideramos $\pi = 3{,}14$.

R7. A altura de um cone reto mede 12 cm, e o diâmetro da base, 10 cm. Em relação a esse cone, calcule:

a) o comprimento da geratriz.

b) a área total.

c) a medida do ângulo do setor circular.

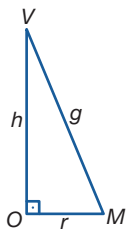
Resolução

a) O raio da base r, a altura h e a geratriz g do cone são, nessa ordem, os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo VOM, conforme mostra a figura.

Como $r = 5$ cm e $h = 12$ cm, calculamos o comprimento da geratriz do cone utilizando o Teorema de Pitágoras.

$$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow g^2 = 169 \Rightarrow g = 13$$

Portanto, o comprimento da geratriz é 13 cm.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

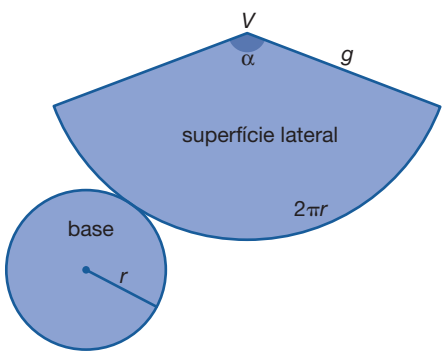
Nesse caso, $g = 13$ cm, pois $g > 0$.

b) Considerando $\pi = 3{,}14$ e calculando a área total do cone, temos:

$$A_t = \pi r(r + g) = 3{,}14 \cdot 5 \cdot (5 + 13) = 15{,}7 \cdot 18 = 282{,}6$$

Portanto, a área total do cone é, aproximadamente, 282,6 cm^2.

c) Ao planificar a superfície lateral do cone, obtemos um setor circular de ângulo α cujo arco tem comprimento $2\pi r$. Considerando a circunferência completa $(360°)$ de raio g, seu comprimento é $2\pi g$. Logo, calculamos a medida do ângulo α do setor circular utilizando regra de três.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Ângulo (em graus)		Comprimento (em centímetro)
360	———	$2\pi g$
α	———	$2\pi r$

$$\frac{360}{\alpha} = \frac{2\pi g}{2\pi r} \Rightarrow \alpha \cdot \underbrace{g}_{13} = 360 \cdot \underbrace{r}_{5} \Rightarrow \alpha \simeq 138{,}5°$$

Portanto, $\alpha \simeq 138{,}5°$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Professor, professora: Se necessário, oriente os estudantes a considerar $\pi = 3{,}14$ na resolução das tarefas.

Anote as respostas no caderno.

44. Considerado o décimo monumento em altura no mundo e o segundo na América do Sul, a Catedral de Maringá é, sem dúvida, um cartão-postal do Paraná. Construída no período de julho de 1959 a maio de 1972, essa igreja tem formato cônico, com 50 m de diâmetro externo da base e 114 m de altura.

ADRIANO KIRIHARA/PULSAR IMAGENS



Catedral de Maringá, Paraná, em 2023.

Calcule a área lateral dessa catedral considerando apenas sua parte cônica.

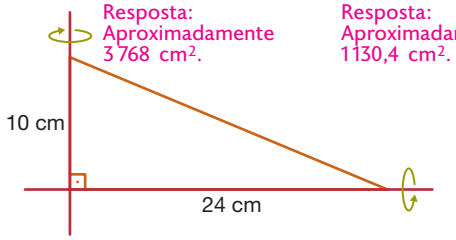
Resposta: Aproximadamente 9 161 m².

45. Calcule a área total da superfície da figura obtida ao rotacionar o triângulo a seguir em torno do:

a) menor cateto. Resposta: Aproximadamente 3 768 cm².

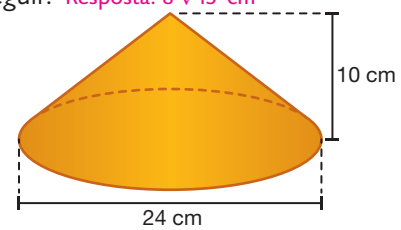
b) maior cateto. Resposta: Aproximadamente 1 130,4 cm².

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



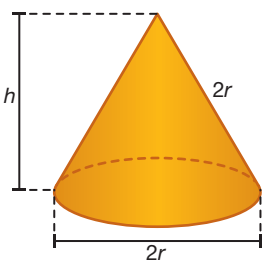
46. Determine a altura de um cone reto para que ele tenha a mesma área da base e o dobro da área da superfície lateral do cone reto representado a seguir. Resposta: $8\sqrt{13}$ cm

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

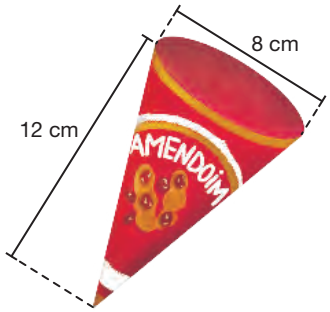


47. Mostre que, em um cone equilátero de altura h e raio r, temos $h = r\sqrt{3}$. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



48. Uma pequena empresa prepara amendoins torrados e os acondiciona em embalagens cônicas fechadas de dois tamanhos, conforme as imagens.



FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Nessas condições, é correto afirmar que a diferença entre as áreas das superfícies dessas embalagens:

a) é maior do que 140 cm².

b) está entre 110 cm² e 140 cm².

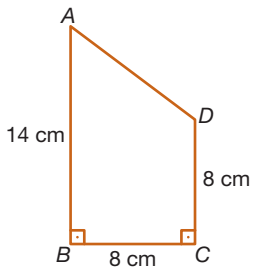
c) está entre 90 cm² e 110 cm².

d) é menor do que 90 cm².

Resposta: Alternativa **c**.

49. Qual é a área total da superfície da figura obtida pela rotação do trapézio a seguir em torno do lado $\overline{AB}$? Resposta: Aproximadamente 854,08 cm².

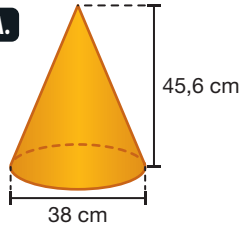
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



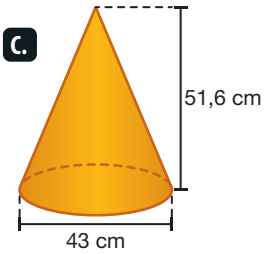
50. Qual dos cones a seguir tem a área total da superfície maior do que a de um cilindro reto com raio da base igual a 15 cm e altura igual a 40 cm e menor do que a de um cubo com 30 cm de aresta?

Resposta: Alternativa **C**.

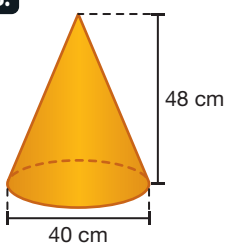
A.



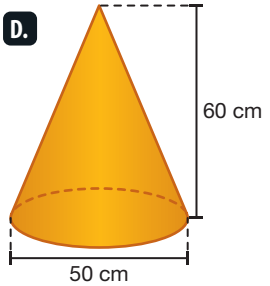
C.



B.



D.

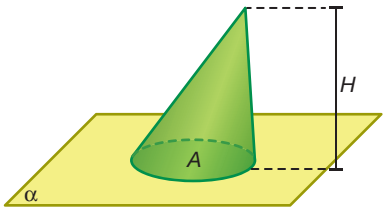


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Volume do cone

Assim como feito para as outras figuras geométricas espaciais, vamos determinar uma expressão de cálculo para o volume de um cone. Imagine um cone qualquer de altura H cuja base seja um círculo de área A contido em um plano α.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

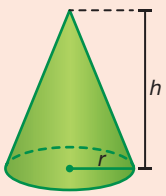
Considere um plano paralelo a α que intersecta o cone a uma distância h de seu vértice, determinando, no cone, uma seção Q. É possível demonstrar que Q e a base do cone são regiões semelhantes cuja razão de proporcionalidade é $\frac{h}{H}$.

Questão C. Que estratégia você utilizaria para calcular o volume desse cone? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam que construiriam uma pirâmide apoiada no plano α, ao lado do cone, com altura H e área da base igual a A.

Questão D. Mostre que o volume de um cone qualquer é igual a um terço do produto da área da base pela altura. Professor, professora: Ao trabalhar a questão **D**, se julgar conveniente, lembre os estudantes de que a razão entre a área de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de proporcionalidade.

O volume V de um cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura. No caso do cone de altura h e raio da base r, temos:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

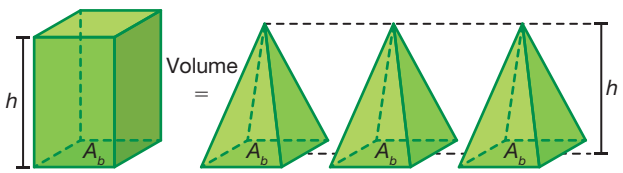


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Dica

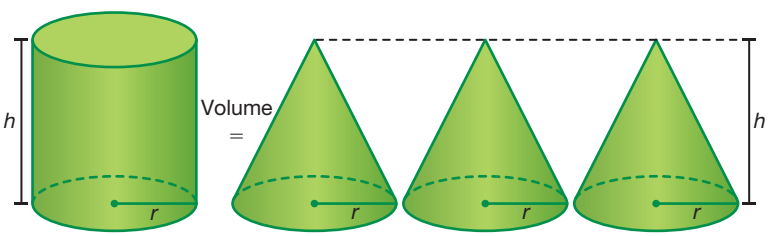
Use o Princípio de Cavalieri para relacionar um cone com outra figura geométrica espacial que você conheça e seja adequada para comparar seus volumes.

Provavelmente você já utilizou o seguinte resultado: se um prisma e uma pirâmide de mesma altura têm bases de áreas iguais, então o volume da pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do volume do prisma, ou seja: $V_{\text{pirâmide}} = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}$.



O volume do prisma de altura h e área da base A_b é igual à soma dos volumes de três pirâmides de altura h e área da base A_b.

Também é possível verificar que, se um cone e um cilindro de mesma altura têm bases com áreas iguais, então o volume do cone é igual a $\frac{1}{3}$ do volume do cilindro, ou seja: $V_{\text{cone}} = \frac{V_{\text{cilindro}}}{3}$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

O volume do cilindro de altura h e raio da base r é igual à soma dos volumes de três cones de altura h e raio da base r.

Essa relação foi demonstrada há cerca de 2 400 anos pelo astrônomo e matemático grego Eudoxo (408 a.C.-355 a.C.).

Questão D. Resposta: Utilizando a estratégia descrita na questão **C**, temos um cone e uma pirâmide apoiados em um plano α, ambos de altura H e área da base igual a A. Se um plano horizontal β, paralelo a α, distando h do vértice dessas figuras, intersecta ambas produzindo seções de áreas A' e A'', então:

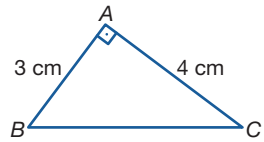
$\frac{A'}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A''}{A}$.

Ou seja, $A' = A''$. Pelo Princípio de Cavalieri, o cone e a pirâmide têm volumes iguais. Como estudamos anteriormente, o volume da pirâmide é igual a $\frac{A \cdot H}{3}$. Assim, o volume do cone também é igual a $\frac{A \cdot H}{3}$, ou seja, um terço do produto da área da base pela altura.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R8. Considere o triângulo retângulo de catetos 3 cm e 4 cm.

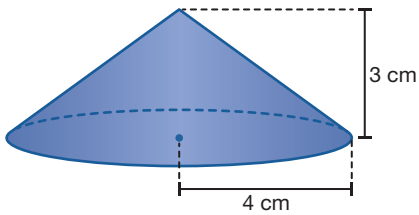


Calcule o volume da figura obtida pela rotação do triângulo em relação a cada um de seus catetos.

Resolução

Cateto menor: 3 cm

A figura obtida pela rotação do triângulo em torno do cateto menor é um cone reto de altura 3 cm e raio da base 4 cm. Calculando seu volume, temos:



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 3}{3} = 50{,}24$$

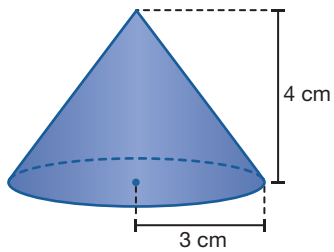
Dica

No cálculo do volume dos cones obtidos, considerou-se $\pi = 3{,}14$.

Portanto, o volume do cone obtido é, aproximadamente, 50,24 cm^3.

Cateto maior: 4 cm

A figura obtida pela rotação do triângulo em torno do cateto maior é um cone reto de altura 4 cm e raio da base 3 cm. Logo:



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = \frac{113{,}04}{3} = 37{,}68$$

Portanto, o volume do cone obtido é, aproximadamente, 37,68 cm^3.

R9. Sabendo que a geratriz de um cone equilátero tem 8 cm de comprimento, determine o volume desse cone (considere $\pi = 3{,}14$ e $\sqrt{3} = 1{,}73$).

Resolução

Como o cone é equilátero, indicando por g o comprimento da geratriz e por r o comprimento do raio da base, temos:

$$g = 2r \Rightarrow 8 = 2r \Rightarrow r = 4$$

Assim, o raio da base do cone tem 4 cm de comprimento. Aplicando o Teorema de Pitágoras, determinamos a altura desse cone.

$$8^2 = 4^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 64 - 16 \Rightarrow h^2 = 48 \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$$

Observação

Nesse caso, $h = 4\sqrt{3}$, pois $h > 0$.

Por fim, calculamos o volume V do cone.

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3}}{3} \simeq 116$$

Portanto, o volume desse cone é, aproximadamente, 116 cm^3.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

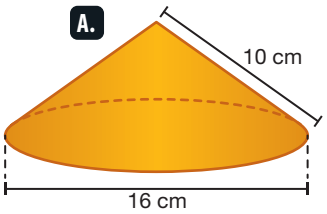
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Se necessário, oriente os estudantes a considerar $\pi = 3{,}14$ na resolução das tarefas.

Anote as respostas no caderno.

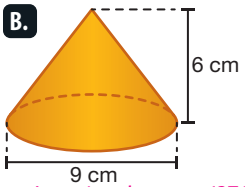
51. Calcule o volume de cada cone reto.

A.



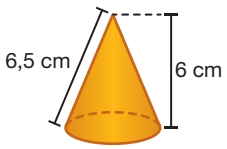
Resposta: Aproximadamente 401,92 cm³.

B.



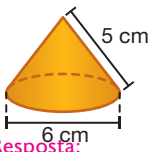
Resposta: Aproximadamente 127,17 cm³.

C.



Resposta: Aproximadamente 39,25 cm³.

D.



Resposta: Aproximadamente 37,68 cm³.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

52. Determine qual deve ser a altura de um cone reto cujo raio da base tem 8 cm de comprimento, para que seu volume seja 1004,8 cm³.

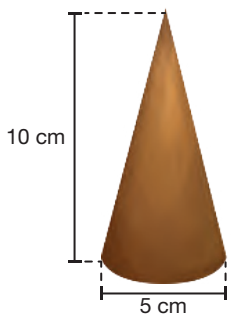
Resposta: Aproximadamente 15 cm.

53. Dois recipientes, um cilíndrico e um cônico, cujos formatos se assemelham a um cilindro reto e a um cone reto, têm a mesma altura e bases com raios de mesmo comprimento. Se a capacidade do recipiente cilíndrico é 600 mL, então qual é a capacidade do recipiente cônico?

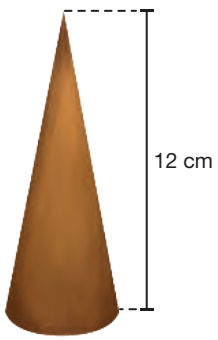
Resposta: 200 mL

54. O comprimento da circunferência da base de um cone reto é 37,68 cm. Determine o volume desse cone sabendo que sua altura é igual ao dobro do comprimento do diâmetro da base. Resposta: Aproximadamente 904,32 cm³.

55. Em determinada loja há dois modelos de adorno de madeira maciça, ambos em formato de cone reto, conforme representado a seguir.



Modelo **1**.



Modelo **2**.

ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que esses adornos têm volumes iguais, determine o comprimento do diâmetro da base do cone ao qual o adorno do modelo **2** se assemelha.

Resposta: Aproximadamente 4,56 cm.

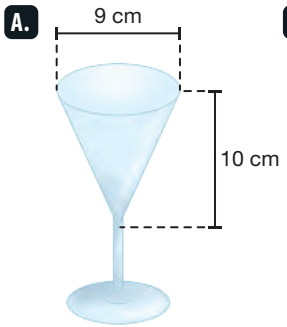
56. Qual é o volume de um cone equilátero cuja área da base mede 50,24 cm²?

Resposta: Aproximadamente 134 cm³.

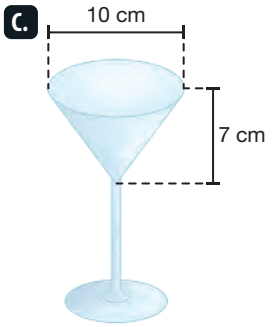
57. Uma indústria de artefatos de vidro pretende fabricar taças com 210 mL de capacidade cujo formato interno se assemelhe a um cone reto. Entre as opções a seguir, qual é aquela cuja capacidade mais se aproxima da taça que se deseja fabricar?

Resposta: Alternativa **A**.

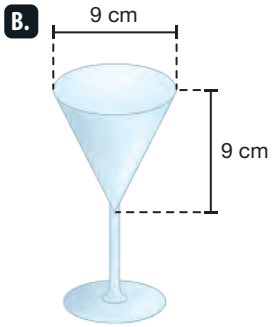
A.



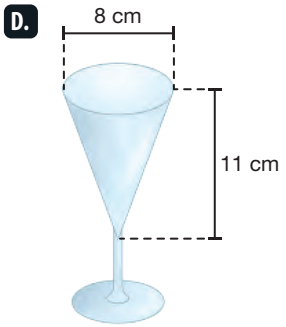
C.



B.

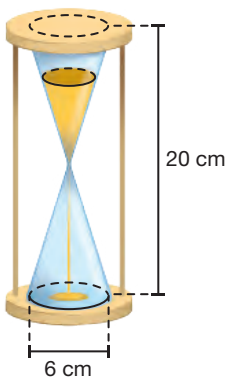


D.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

58. A ampulheta é um dos mais antigos instrumentos utilizados para medir o tempo. Ela consiste em dois recipientes transparentes que se unem por meio de um pequeno orifício, por onde a areia que está no recipiente superior escorre para o inferior a uma vazão constante. O período marcado corresponde ao tempo necessário para que toda a areia de um recipiente desça para o outro.



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

A ampulheta representada é formada por duas partes que se assemelham a cones retos idênticos, e a quantidade de areia em seu interior corresponde a 30% da capacidade de um desses cones. Para que toda a areia escoe de um cone para o outro, são necessários 30 minutos.

a) Qual é o volume de areia, em centímetros cúbicos, no interior da ampulheta? Resposta: Aproximadamente 28,26 cm³.

b) É preciso acrescentar quantos centímetros cúbicos de areia na ampulheta para que ela registre períodos de 40 minutos?

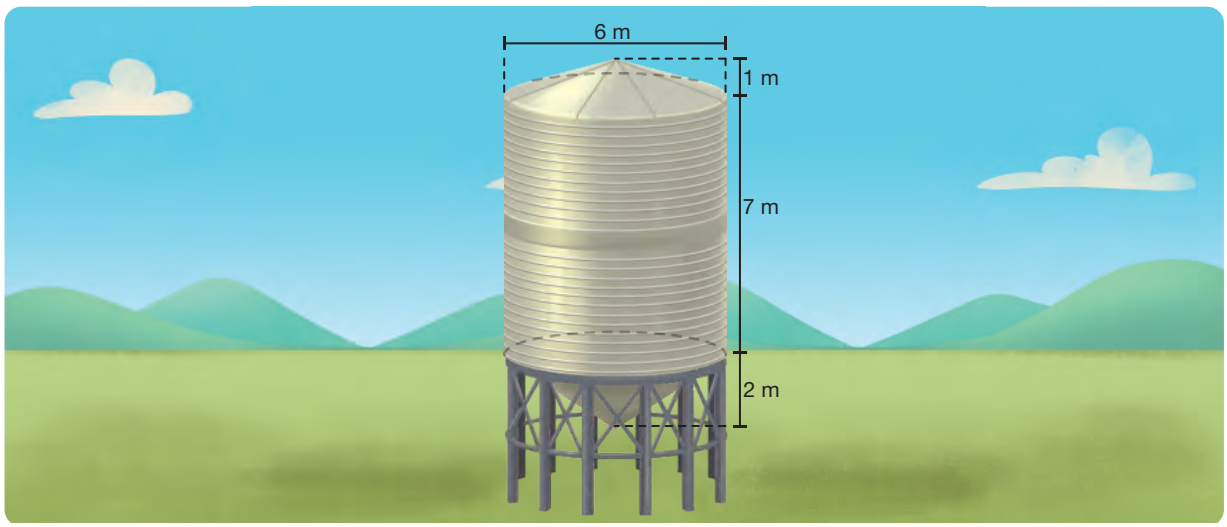
Resposta: Aproximadamente 9,42 cm³.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

59. O comprimento do diâmetro da base de um cone reto é 30 cm, e sua área lateral é igual ao triplo da área de sua base. Qual é o volume desse cone? Resposta: Aproximadamente 9 992,3 cm^3.

60. Dois cones são obtidos pela rotação de um triângulo retângulo em torno de seus catetos: o cone *A* é obtido pelo giro em torno do cateto menor, e o cone *B*, em torno do cateto maior. Qual é a razão entre os volumes do cone *A* e do cone *B*? Resposta: $\frac{b}{a}$, em que *a* e *b* indicam, respectivamente, o comprimento do menor e do maior cateto do triângulo.

61. A imagem a seguir representa um silo de armazenamento de grãos completamente cheio de soja. Considerando que cada metro cúbico dessa soja corresponde a 700 kg, calcule quantas sacas de 50 kg de soja correspondem à quantidade armazenada no silo. Resposta: Aproximadamente 3 165 sacas.



FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

62. Faça uma pesquisa sobre objetos e construções que se assemelham a cones retos. Em seguida, de acordo com os resultados obtidos, elabore um problema envolvendo a área total e o volume de um cone reto. Por fim, peça a um colega que o resolva.
Resposta pessoal. A resposta depende do resultado da pesquisa feita pelos estudantes.

63. (Fuvest-SP, 2017) Um reservatório de água tem o formato de um cone circular reto. O diâmetro de sua base (que está apoiada sobre o chão horizontal) é igual a 8 m. Sua altura é igual a 12 m. A partir de um instante em que o reservatório esteja completamente vazio, inicia-se seu enchimento com água a uma vazão constante de 500 litros por minuto. O tempo gasto para que o nível de água atinja metade da altura do reservatório é de, aproximadamente: Resposta: Alternativa **c**.

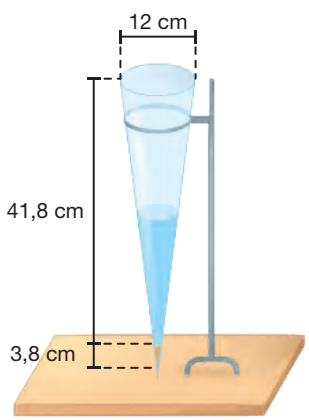
a) 4 horas e 50 minutos.
b) 5 horas e 20 minutos.
c) 5 horas e 50 minutos.
d) 6 horas e 20 minutos.
e) 6 horas e 50 minutos.

Dados: π é aproximadamente 3,14.
O volume do cone circular reto de altura *h* e raio da base *r* é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Professor, professora: A tarefa **62** propõe a elaboração de um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para ampliar o repertório de reflexões e questionamentos dos estudantes acerca de determinadas situações. Antes de elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

64. Para analisar a qualidade da água de acordo com a quantidade de resíduos sólidos existentes, um método que pode ser utilizado é o do Cone de Imhoff, em que uma amostra da água, em geral 1 L, é colocada em um cone graduado e deixada em repouso por 1 h, sedimentando as partículas em suspensão pela ação da gravidade.

Considere um Cone de Imhoff em que foi colocada uma amostra de água e, após 1 h, verificou-se que as partículas sólidas depositadas no fundo atingiram 3,8 cm de altura, conforme a imagem. Admita que não há espaços entre as partículas e que sua densidade é 2,5 g/cm^3.



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

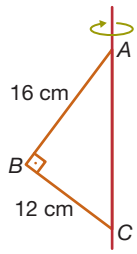
a) Calcule o valor aproximado da massa, em gramas, das partículas sólidas sedimentadas nessa amostra. Resposta: 2,49 g

b) 25 g dessas mesmas partículas sólidas atingem aproximadamente que altura nesse mesmo Cone de Imhoff? Resposta: 8,2 cm

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

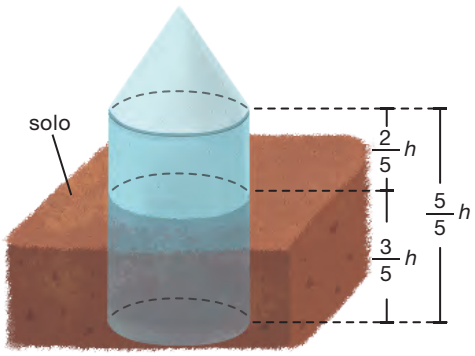
65. Calcule o volume da figura obtida pela rotação do triângulo *ABC* em torno do maior lado.

Resposta: Aproximadamente 1929,2 cm^3.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

66. A captação de água das chuvas por meio do uso de cisternas tem sido uma alternativa sustentável para contribuir com a redução do consumo de água. A imagem a seguir representa uma cisterna composta de uma parte em formato de cone reto com 1 m de raio e 1,5 m de altura, e outra em formato de cilindro reto com $\frac{3}{5}$ da sua altura h enterrada no solo.



FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

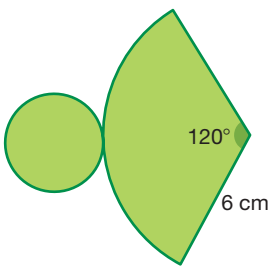
Sabendo que o armazenamento de água nessa cisterna ocorre apenas na parte cilíndrica e que seu volume é equivalente ao sêxtuplo do volume da parte cônica, determine a altura da cisterna que aparece sobre a superfície do solo.

Resposta: Aproximadamente 1,2 m.

67. Escreva um algoritmo que indique se é possível armazenar determinado volume de água, em litros, em um recipiente com formato de cone reto, dados o comprimento do raio da base e a altura do recipiente, ambos em centímetros. Em seguida, organize-o em um fluxograma.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

68. Analise a planificação de um cone reto e algumas de suas medidas.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: Aproximadamente 23,61 cm^3.

Qual é o volume do cone correspondente a essa planificação (considere $\sqrt{2} = 1{,}41$)?

69. Leia o problema a seguir.

> Um reservatório cilíndrico tem 50 000 L de capacidade. Para que um reservatório cônico tenha a mesma capacidade, qual deve ser a altura dele?

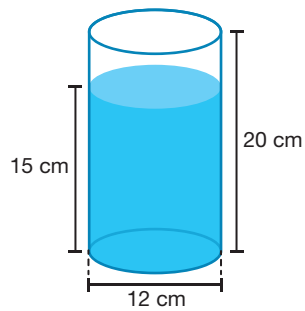
Com os dados apresentados, é possível resolver o problema? Em caso afirmativo, resolva-o.

Resposta: Não. Espera-se que os estudantes compreendam que, para calcular a altura do reservatório cônico, é necessário apresentar o comprimento do diâmetro ou do raio da base.

Observação

Caso não seja possível resolver o problema com os dados apresentados, justifique sua resposta.

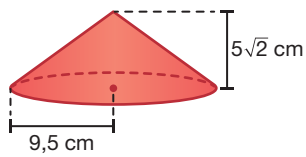
70. Pedro realizará um experimento, no qual ele vai submergir totalmente alguns objetos maciços no recipiente com formato de cilindro reto, representado na imagem.



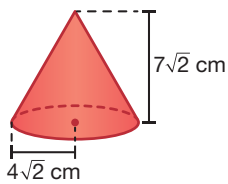
Entre os objetos com formato de cone reto, qual, ao ser submerso, fará a água transbordar do recipiente? (Considere $\sqrt{2} = 1{,}41$.)

Resposta: Alternativa **A**.

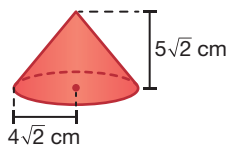
A.



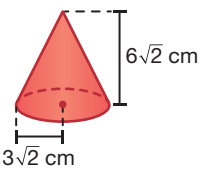
C.



B.



D.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

71. Considere um cone reto e um cilindro reto, ambos com área da base igual a 48π m^2. Sabendo que o volume do cilindro é 1152π m^3 e que sua altura é igual ao triplo do comprimento da geratriz do cone, determine:

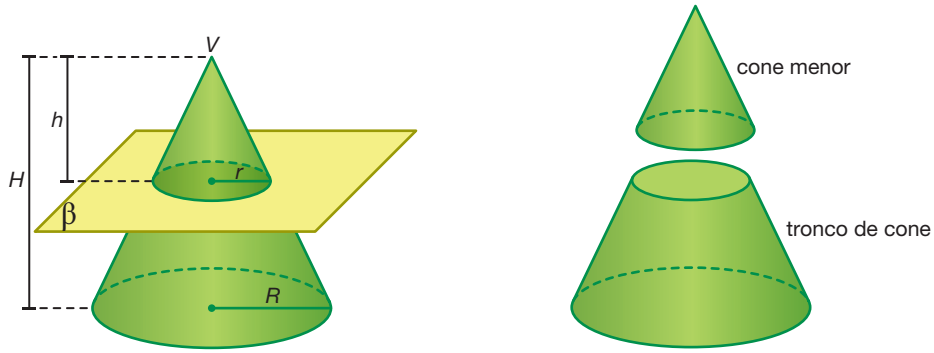
a) o comprimento do raio da base do cone. Resposta: $4\sqrt{3}$ m

b) o volume do cone. Resposta: 64π m^3

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

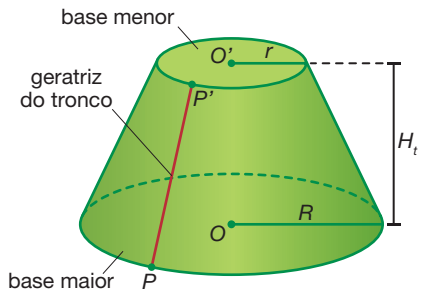
Tronco de cone reto

Na figura a seguir, está representado um cone reto de altura H e raio da base R, seccionado por um plano β paralelamente à sua base. Esse plano determina um cone menor, de altura h e raio da base r, e um sólido denominado **tronco de cone**.



Em um tronco de cone, podemos destacar os seguintes elementos.

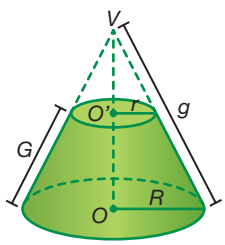
- A **base maior** é o círculo de centro O e raio R.
- A **base menor** é o círculo de centro O' e raio r.
- A distância H_t entre a base maior e a base menor é a **altura** do tronco de cone.
- A **geratriz do tronco** corresponde a cada segmento contido na geratriz do cone cujas extremidades pertencem às bases do tronco, e o comprimento é igual à diferença entre os comprimentos das geratrizes dos cones maior e menor. Nesse tronco, $\overline{PP'}$ é um exemplo de geratriz do tronco.

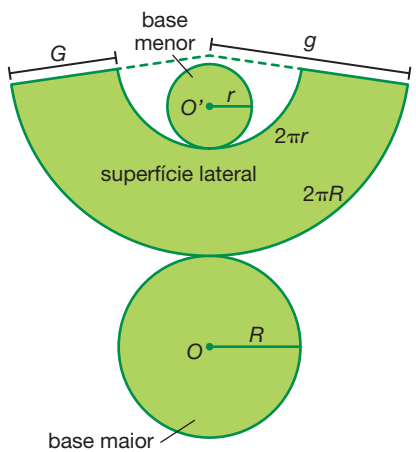


- A **superfície lateral** corresponde à reunião de todas as geratrizes do tronco.

Área da superfície de um tronco de cone reto

Analise um tronco de cone reto e sua respectiva planificação.





a) Área da base maior: $A_B = \pi R^2$.

b) Área da base menor: $A_b = \pi r^2$.

c) Área lateral:

Podemos obter a área lateral de um tronco de cone calculando a diferença entre as áreas laterais dos cones de vértice V e bases de centro O e O'.

$$A_l = A_O - A_{O'} = \pi Rg - \pi r(g - G)$$

Escrevendo a expressão com g em função de G, R e r, obtemos a área lateral do tronco de cone.

$$A_l = \pi G(R + r)$$

d) Área total da superfície: $A_t = A_B + A_b + A_l$.

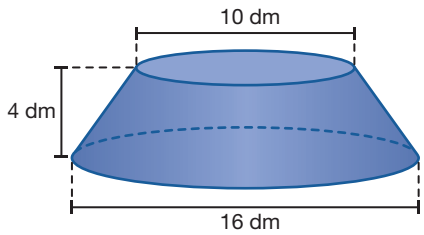
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas resolvidos

R10. Em relação ao tronco de cone reto, calcule a área da:

a) base menor. **b)** base maior. **c)** superfície lateral.



Resolução

a) A base menor é um círculo de raio 5 dm. Então:

$$A_b = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 5^2 = 78{,}5$$

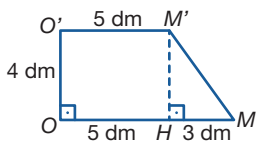
Portanto, a área da base menor é aproximadamente 78,5 dm^2.

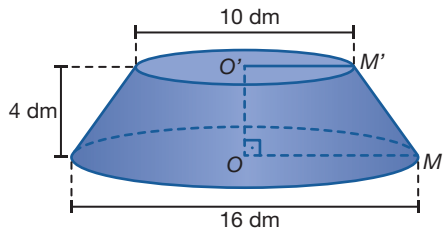
b) A base maior é um círculo de raio 8 dm. Então:

$$A_B = \pi R^2 = 3{,}14 \cdot 8^2 = 200{,}96$$

Portanto, a área da base maior é aproximadamente 200,96 dm^2.

c) Inicialmente, calculamos o comprimento da geratriz do tronco utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo MHM', conforme a figura a seguir.





$$(MM')^2 = (HM')^2 + (HM)^2 \Rightarrow G^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow G = 5$$

Assim, $G = 5$ dm.

Observação

Nesse caso, $G = 5$, pois $G > 0$.

Consequentemente:

$$A_l = \pi G(R + r)$$
$$A_l = 3{,}14 \cdot 5 \cdot (8 + 5)$$
$$A_l = 15{,}7 \cdot 13$$
$$A_l = 204{,}1$$

Observação

Nos itens **a**, **b** e **c**, considerou-se $\pi = 3{,}14$.

Portanto, a área da superfície lateral é aproximadamente 204,1 dm^2.

R11. (Unicamp-SP, 2006) Um abajur de tecido tem a forma de um tronco de cone circular reto, com bases paralelas. As aberturas do abajur têm 25 cm e 50 cm de diâmetro, e a geratriz do tronco de cone mede 30 cm. O tecido do abajur rasgou e deseja-se substituí-lo.

a) Determine os raios dos arcos que devem ser demarcados sobre um novo tecido para que se possa cortar um revestimento igual àquele que foi danificado.

b) Calcule a área da região a ser demarcada sobre o tecido que vai revestir o abajur.

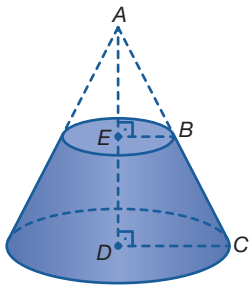
Professor, professora: Se julgar necessário, informe aos estudantes que, no problema, foi utilizado o termo "a geratriz do tronco de cone mede 30 cm" para se referir à medida do comprimento da geratriz, que, neste caso, é 30 cm.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolução

a) Considere o tronco de cone representado a seguir como o abajur descrito no problema.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Neste caso, precisamos determinar os comprimentos de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Por semelhança de triângulos, segue que:

$$\frac{CD}{BE} = \frac{\overset{AC}{\overbrace{AB + BC}}}{AB} \Rightarrow \frac{\frac{50}{2}}{\frac{25}{2}} = \frac{AB + 30}{AB} \Rightarrow 2 = \frac{AB + 30}{AB} \Rightarrow 2(AB) = AB + 30 \Rightarrow AB = 30$$

Substituindo $AB = 30$ em $AC = AB + BC$, obtemos:

$$AC = AB + BC = 30 + 30 = 60$$

Portanto, os comprimentos dos raios que devem ser demarcados sobre o tecido são 30 cm e 60 cm.

b) A região demarcada corresponde à superfície lateral do tronco de cone. Assim:

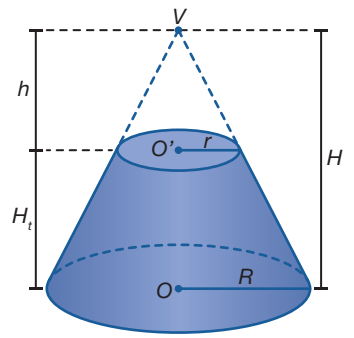
$$A_l = \pi G(R + r) = \pi \cdot 30 \cdot \left(\frac{50}{2} + \frac{25}{2}\right) = 30\pi \cdot 37{,}5 = 1125\pi$$

Portanto, a área da região a ser demarcada é 1125π cm^2.

Volume de um tronco de cone reto

Determinamos o volume de um tronco de cone reto, como o apresentado, calculando a diferença entre os volumes dos cones de vértice V e bases de centro O e O'.

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3} - \frac{\pi r^2 h}{3}$$



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

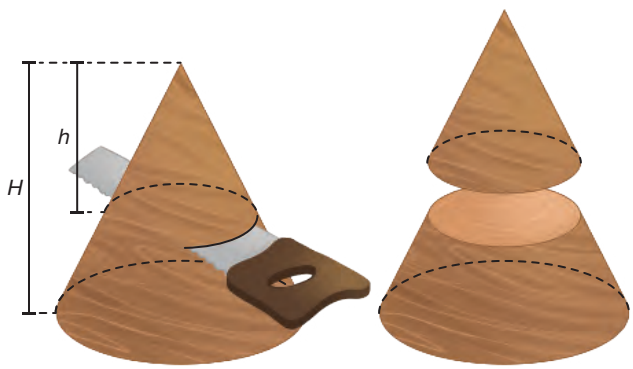
Escrevendo H e h em função de H_t, R e r, obtemos o volume do tronco de cone.

$$V = \frac{\pi H_t}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

Exercícios e problemas resolvidos

R12. Um cone reto de madeira maciça tem massa igual a 27 kg e foi serrado para serem obtidas duas peças: um cone reto menor e um tronco de cone reto.

Considerando a massa de madeira proporcional a seu volume, calcule a massa de cada peça obtida, sabendo que a razão entre as alturas H e h é $\frac{3}{2}$.



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Nesta situação, desconsidere a massa do pó de serra gerado no corte.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolução

Sejam V e V_C os volumes do cone inicial e do cone menor, respectivamente. Como os dois cones são semelhantes e a razão entre suas alturas é $\frac{3}{2}$, então a razão de proporcionalidade entre os volumes desses cones é $\left(\frac{3}{2}\right)^3$. Assim:

$$\frac{V}{V_C} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow \frac{V}{V_C} = \frac{27}{8} \Rightarrow V_C = \frac{8}{27}V$$

Desse modo, calculamos a massa x do cone menor utilizando regra de três.

Observação

Dois cones são semelhantes se têm medidas correspondentes semelhantes (comprimento do raio da base, altura e comprimento da geratriz). Pode-se demonstrar que, se a razão de proporcionalidade entre suas medidas for k, então a razão de semelhança entre seus volumes será k^3.

Volume (unidade de volume)	**Massa (quilograma)**
V	27
V_C	x

$$\frac{V}{V_C} = \frac{27}{x} \Rightarrow \frac{V}{\frac{8}{27}V} = \frac{27}{x} \Rightarrow x = \frac{8}{27} \cdot 27 = 8$$

A massa do tronco de cone é dada por: $27 - 8 = 19$.

Portanto, a massa do cone menor é 8 kg e a do tronco de cone é 19 kg.

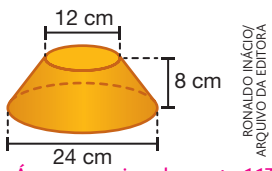
Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

Professor, professora: Se necessário, oriente os estudantes a considerar $\pi = 3{,}14$ na resolução das tarefas.

72. Determine a área total da superfície e o volume de cada tronco de cone reto.

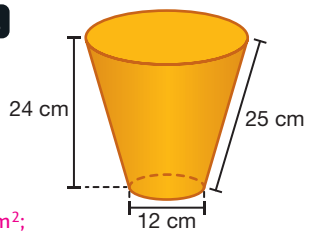
A.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: Área: aproximadamente 1 130,4 cm²; volume: aproximadamente 2 110,08 cm³.

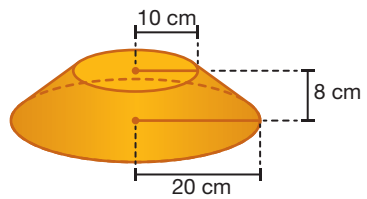
B.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

72. B. Resposta: Área: aproximadamente 2 135,2 cm²; volume: aproximadamente 7 108,96 cm³.

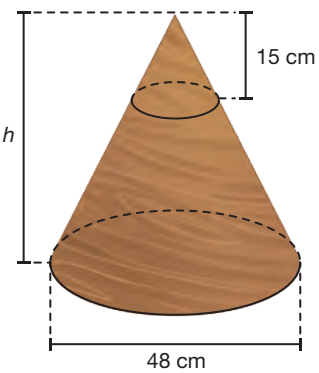
C.



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: Área: aproximadamente 2 776,7 cm²; volume: aproximadamente 5 861,33 cm³.

73. Um marceneiro cortou uma peça de madeira de 45 cm de altura (h) em formato de cone reto paralelamente à base, conforme a figura, obtendo um cone menor e um tronco de cone reto.



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

a) Calcule os comprimentos dos raios das bases menor e maior do tronco de cone.

Resposta: raio menor: 8 cm; raio maior: 24 cm

b) Qual é a área total da superfície do cone menor? E a do tronco de cone?

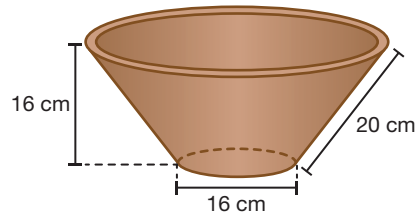
Resposta: Aproximadamente 628 cm²; aproximadamente 5 425,92 cm².

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

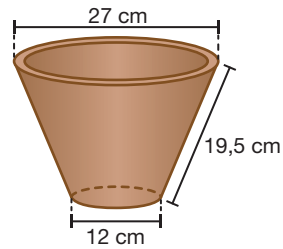
74. Fernando é artesão e produz vasos de barro em formato de tronco de cone reto. O preço de venda de cada vaso está associado à sua área de superfície, de maneira que vasos com maior área de superfície externa têm também preços maiores.

Analise a seguir alguns modelos de vasos produzidos por Fernando.

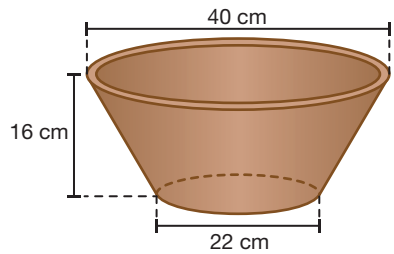
A.



B.



C.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Em relação aos modelos apresentados, a ordem correta dos vasos, do maior preço para o menor, é:

Resposta: Alternativa **e**.

a) A, B e C.

b) A, C e B.

c) B, A e C.

d) B, C e A.

e) C, A e B.

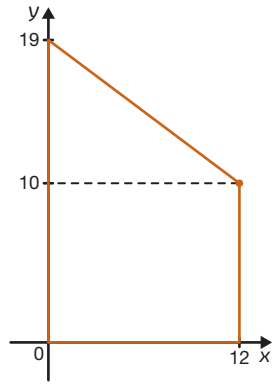
75. Considere um tronco de cone reto cuja área lateral é 405π cm², o comprimento da geratriz é 15 cm e o comprimento do raio da base maior é igual ao dobro do da base menor.

a) Qual é o comprimento do raio da base maior? E o da base menor? Resposta: 18 cm; 9 cm

b) Qual é a altura desse tronco de cone? Resposta: 12 cm

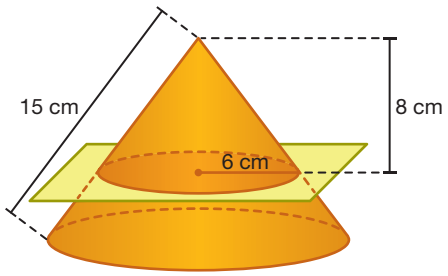
c) Calcule a área total da superfície desse tronco de cone. Resposta: 810π cm²

76. Calcule a área total da superfície da figura obtida ao se rotacionar em torno do eixo *x* o polígono a seguir. Resposta: Aproximadamente 2 813,44 u.a.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

77. Considere um cone reto com o comprimento da geratriz igual a 15 cm. Ao seccionar esse cone por um plano paralelo à sua base e distando 8 cm de seu vértice, determina-se um círculo de raio 6 cm. Calcule a área total da superfície do tronco de cone obtido. Resposta: Aproximadamente 602,88 cm².



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

78. O rebolo cônico é um instrumento musical de percussão cuja forma é a de um tronco de cone reto, feito de madeira ou alumínio, vazado na base menor e geralmente revestido de couro na base maior.

Um artesão vai confeccionar a superfície lateral de um instrumento desses com 50 cm de altura e raios das bases menor e maior com, respectivamente, 10 cm e 15 cm de comprimento. Qual será a área lateral da superfície desse instrumento?
Resposta: Aproximadamente 3 948,55 cm².

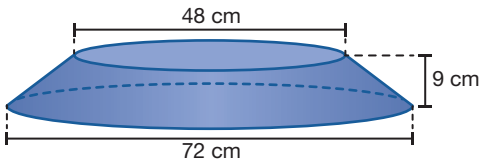


FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

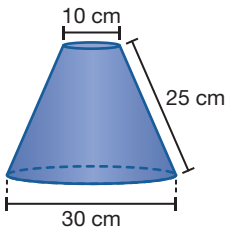
79. Determine o volume de cada tronco de cone reto.

A.



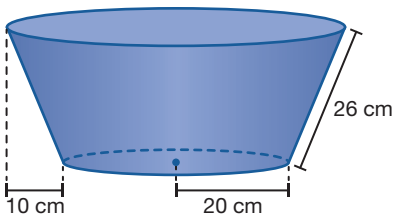
Resposta: Aproximadamente 25 773 cm^3.

B.



Resposta: Aproximadamente 7 790 cm^3.

C.



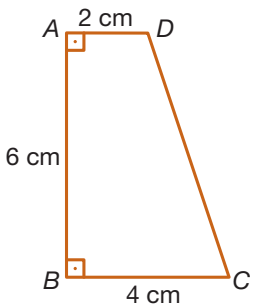
Resposta: Aproximadamente 47 728 cm^3.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

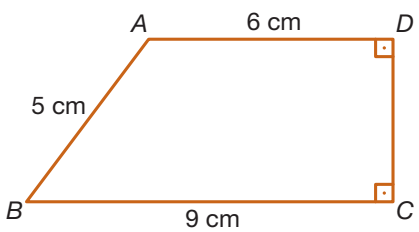
80. Sabendo que a geratriz de um tronco de cone reto tem 25 cm de comprimento e que os raios das bases têm 6 cm e 13 cm de comprimento, determine o volume desse tronco de cone.
Resposta: Aproximadamente 7 108,96 cm^3.

81. Determine o volume da figura obtida ao se rotacionar o trapézio em torno do:

a) lado $\overline{AB}$. Resposta: Aproximadamente 175,84 cm^3.



b) lado $\overline{CD}$. Resposta: Aproximadamente 715,92 cm^3.

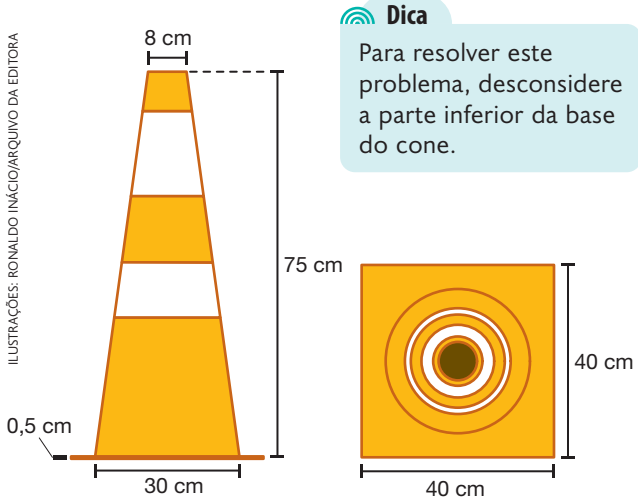


ILUSTRAÇÕES: TAMIRES ROSE AZEVEDO/ARQUIVO DA EDITORA

82. Analise as vistas frontal e superior de um cone de sinalização. Note que ele é composto de um tronco de cone e uma base cujo formato se assemelha a um prisma reto quadrangular. Calcule, em centímetros quadrados, a área da superfície externa desse cone de sinalização.
Resposta: Aproximadamente 5 496 cm^2.

Dica

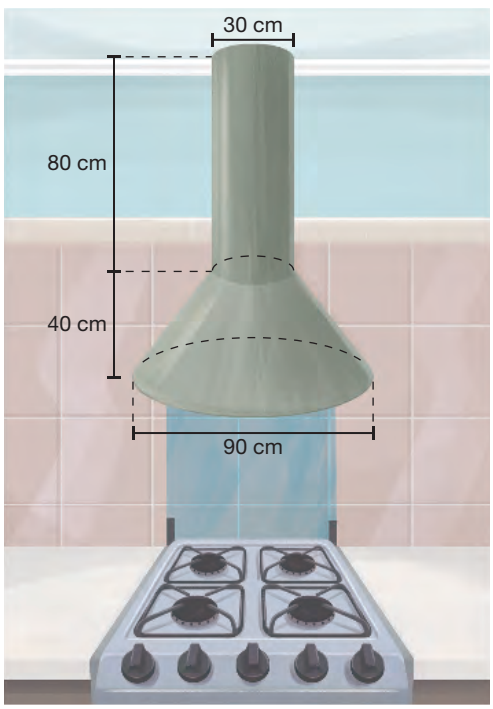
Para resolver este problema, desconsidere a parte inferior da base do cone.



Vista frontal. Vista superior.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

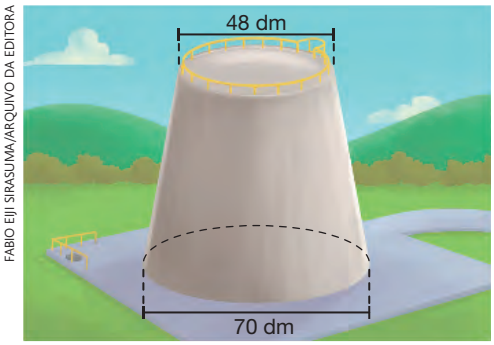
83. Jeremias comprou uma coifa formada por duas partes que lembram um tronco de cone reto e um cilindro reto. Ele deseja pintar a parte lateral externa do alumínio que reveste essa coifa com certa tinta, de modo que a cor escolhida combine com a decoração do ambiente. Quantas latas de tinta com 500 mL serão necessárias sabendo que 100 mL da tinta que Jeremias escolheu permitem cobrir 900 cm^2 de alumínio? Resposta: 4 latas.



FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

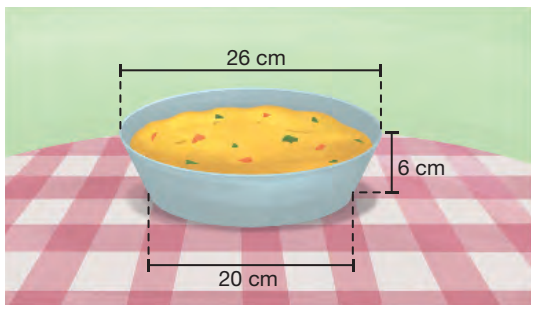
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

84. Um reservatório de água tem formato de um tronco de cone reto cujos diâmetros internos das bases maior e menor são, respectivamente, 70 dm e 48 dm. Sabendo que sua capacidade é de 165 854,8 L, determine a altura interna desse reservatório. Resposta: Aproximadamente 60 dm.



FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

85. Uma assadeira tem o formato de um tronco de cone reto, sendo o fundo sua base menor. A fim de reservar espaço para que a massa de uma torta cresça ao assar, é acondicionada nessa assadeira uma quantidade de massa correspondente a 75% de sua capacidade.

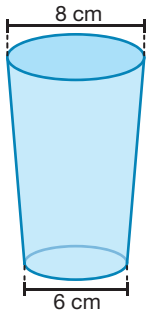


FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual é a capacidade dessa assadeira?
Resposta: Aproximadamente 2 505,72 cm^3.

b) No preparo da torta citada, qual é o volume máximo de massa, em mililitros, que deve ser acondicionado na assadeira?
Resposta: Aproximadamente 1 879,29 mL.

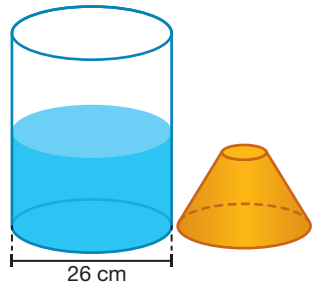
86. O copo representado tem a forma de um tronco de cone reto, e sua capacidade é de 464,72 mL. Quantos centímetros de altura tem esse copo?
Resposta: Aproximadamente 12 cm.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora:
A tarefa **90** propõe aos estudantes que elaborem uma questão utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de elaborarem a questão, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

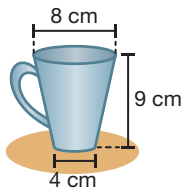
87. Ao submergir totalmente a peça maciça com forma de tronco de cone reto indicada a seguir no recipiente cilíndrico, o nível da água aumenta 4 cm. Determine a altura dessa peça, sabendo que os raios das bases têm $\sqrt{13}$ cm e $3\sqrt{13}$ cm de comprimento. Resposta: 12 cm



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

88. Um reservatório tem o formato de tronco de cone reto cujo comprimento da geratriz é $2\sqrt{3}$ m. Sabendo que esse reservatório tem 3 m de altura interna e $\sqrt{3}$ m de raio interno da base menor, qual é sua capacidade em litros?
Resposta: Aproximadamente 65 940 L.

89. Em certo restaurante, após a refeição e como cortesia, os clientes ganham um café, que é servido em uma xícara cujo interior tem formato de cone reto, como a representada a seguir.



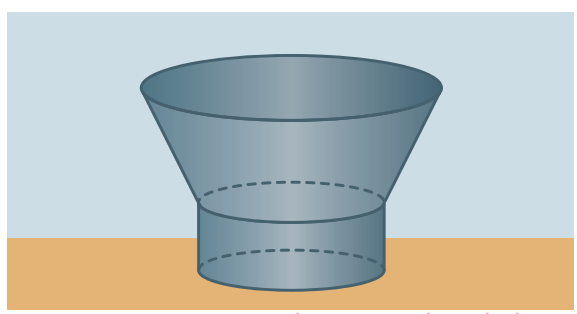
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação
As medidas apresentadas referem-se às dimensões internas da xícara.

a) De acordo com as medidas indicadas, determine o volume máximo, em mililitros, de café que essa xícara pode conter.
Resposta: Aproximadamente 263,76 mL.

b) Sabendo que no bule há 1 L de café e que, ao servi-lo, o garçom coloca aproximadamente $\frac{2}{3}$ da capacidade da xícara, determine quantas xícaras iguais a essa, no máximo, podem ser servidas com a quantidade de café que há no bule.
Resposta: 5 xícaras.

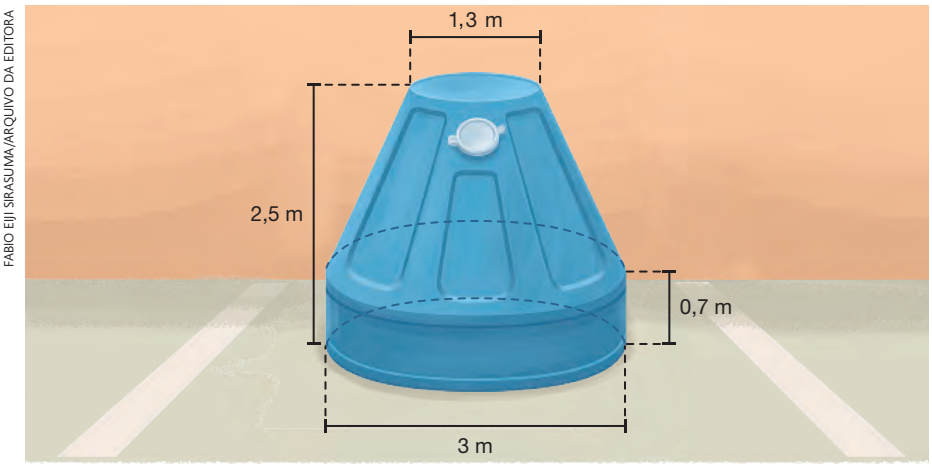
90. Com base na imagem a seguir, elabore uma questão relacionada ao volume do tronco de cone. Depois, troque a questão com um colega e, ao final, verifique se ambos as resolveram corretamente.


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta pessoal. A resposta depende das questões elaboradas pelos estudantes.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

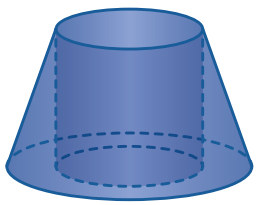
91. Madalena pretende armazenar certa solução para a produção de um produto de sua empresa. Para isso, ela encomendou um reservatório composto de duas partes: uma em formato de cilindro reto e outra em formato de tronco de cone reto. Analise as dimensões internas desse reservatório.



FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Qual é, em litros, a capacidade desse reservatório? Resposta: Aproximadamente 11 817,4 L.

92. Certa empresa fabrica peças em formato de tronco reto com uma cavidade em formato de cilindro reto, conforme apresentado.



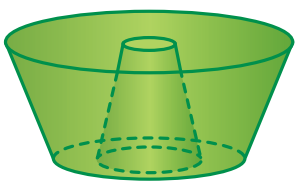
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

A seguir, são apresentadas algumas informações acerca dessa peça:

- a altura do cilindro coincide com a altura do tronco de cone;
- o raio da base menor e o da base maior da peça têm, respectivamente, 9 cm e 15 cm de comprimento;
- o comprimento da geratriz do tronco de cone é 18 cm.

De acordo com as informações, determine o volume dessa peça.
Resposta: Aproximadamente 3 517 cm^3.

93. De acordo com a imagem, que representa uma assadeira de bolo, elabore um problema envolvendo os conteúdos estudados até o momento. Em seguida, peça a um colega que o resolva.
Resposta pessoal. A resposta depende de cada problema elaborado pelos estudantes.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

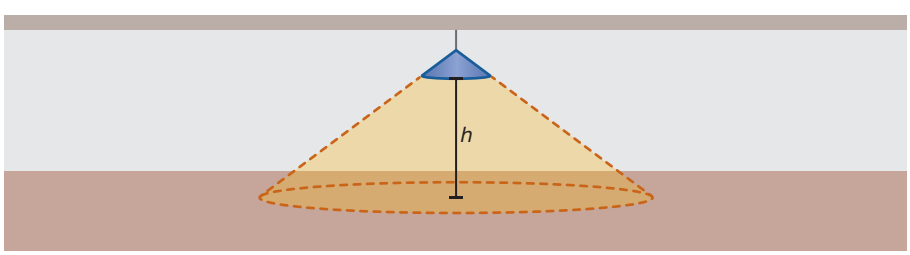
94. Os raios das bases de um tronco de cone têm 8 dm e 4 dm de comprimento.

a) Determine o comprimento da geratriz desse tronco para que a área total seja igual ao dobro da área lateral.

b) Qual é o volume desse tronco de cone?
Resposta: Aproximadamente 625,21 dm^3.

94. a) Resposta: $\frac{20}{3}$ dm

95. Um pendente em formato de cone reto com 30 cm de altura e raio da base com 40 cm de comprimento foi instalado no teto de uma sala. Em certo momento, a lâmpada desse pendente projeta no chão um círculo com $52\,900\pi$ cm^2 de área.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Qual é, em centímetros, a distância h entre o pendente e o chão? Resposta: 142,5 cm

Professor, professora: A tarefa **93** propõe aos estudantes que elaborem uma questão utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de elaborarem a questão, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Esfera

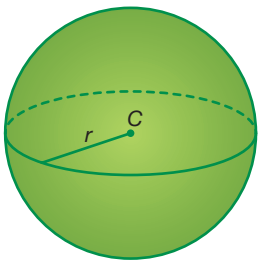
No voleibol, assim como em outros esportes, a bola oficial tem medidas específicas. De acordo com as normas da Confederação Brasileira de Vôlei, essa bola, que tem formato de esfera, deve ter raio com, aproximadamente, 10,5 cm de comprimento.



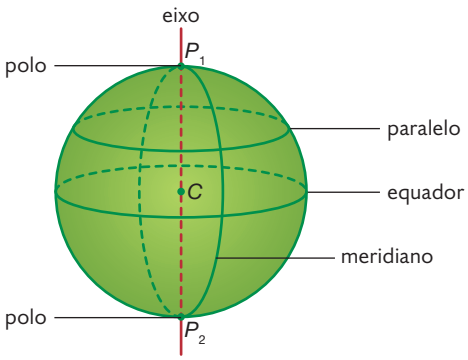
IRIN-K/SHUTTERSTOCK

Bola de voleibol.

Para definirmos a esfera, consideramos um número real positivo r e um ponto C. Denomina-se **esfera** de centro C e raio r o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância de C é igual a r.



Em uma esfera, podemos destacar os seguintes elementos.



Considerando a figura apresentada, podemos destacar os seguintes elementos.

- O **centro** é o ponto C.
- O **eixo** é qualquer reta que contém o centro da esfera.
- Em relação a esse eixo, definimos os polos, o equador, os paralelos e os meridianos.
- Os **polos** são os pontos de interseção da esfera com o eixo. Na figura, os polos são P_1 e P_2.
- O **equador** é a circunferência obtida ao seccionar a esfera por um plano que seja perpendicular ao eixo e que passe pelo centro C.
- Os **paralelos** são as circunferências obtidas ao seccionar a esfera por planos paralelos ao equador.
- Os **meridianos** são as circunferências obtidas ao seccionar a esfera por planos que contenham o eixo.

A esfera pode ser obtida ao rotacionar uma semicircunferência em torno da reta (eixo) que contém seu diâmetro (Figura **C**).

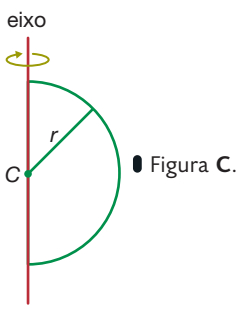
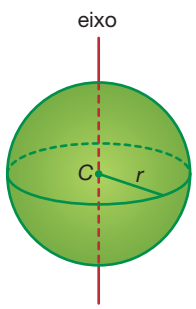


Figura **C**.



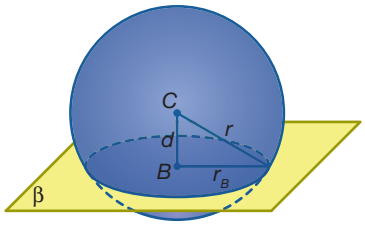
Esfera.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Volume da esfera

Considere uma esfera de centro C e raio r seccionada por um plano β.



Por meio do círculo de centro B e raio r_B, obtido na seção, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$r^2 = r_B^2 + d^2 \Rightarrow r_B^2 = r^2 - d^2$$

Escrevendo a área do círculo de centro B em função de r e d, temos:

$$S_B = \pi r_B^2 \Rightarrow S_B = \pi\left(r^2 - d^2\right)$$

Considere agora uma figura **X** obtida ao retirarmos de um cilindro reto de raio r e altura $2r$ (cilindro equilátero) dois cones retos de raio e altura r, conforme as figuras a seguir.

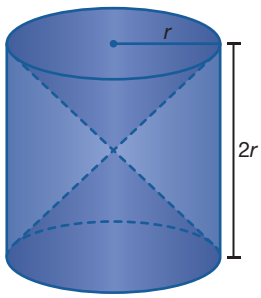
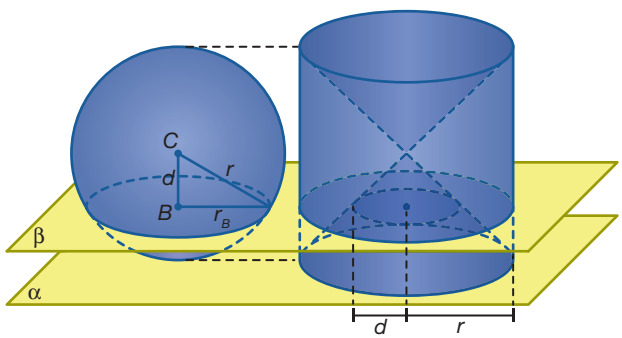


Figura **X**.

O volume V dessa figura é dado pela diferença entre o volume do cilindro e o dos cones retirados.

$$V = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} \Rightarrow V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Para obtermos o volume da esfera, vamos utilizar novamente o Princípio de Cavalieri, considerando a esfera e a figura **X**, obtidas anteriormente, apoiadas em um plano α e seccionadas por um plano β, paralelo a α.



A área S_C da seção obtida na figura **X** é dada pela área da coroa definida pelos círculos de raio r e d:

$$S_C = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi\left(r^2 - d^2\right)$$

A área da seção determinada na esfera é dada por $S_B = \pi\left(r^2 - d^2\right)$, conforme visto anteriormente, então as áreas das duas seções obtidas são iguais $(S_B = S_C)$. Dessa maneira, pelo Princípio de Cavalieri, o volume da esfera e o da figura **X** são iguais.

Portanto, o volume V da esfera de raio r é $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

PARA EXPANDIR

O planeta Terra tem o formato aproximado ao de uma esfera, com volume de cerca de 1 110 bilhões de quilômetros cúbicos.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R13. Um plano α secciona uma esfera a 8 cm de seu centro, obtendo-se um círculo de raio 6 cm. Em relação à esfera, calcule:

a) o comprimento do raio.

b) o comprimento do equador.

c) o volume.

Observação

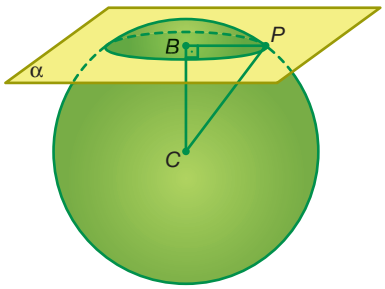
Considere $\pi = 3{,}14$.

Resolução

a) A distância do centro da esfera ao plano α (*BC*), o comprimento do raio do círculo da seção (*BP*) e o comprimento do raio da esfera (*CP*) são, nessa ordem, os comprimentos dos catetos e da hipotenusa do triângulo retângulo *CBP*, indicado na figura.

Como $BC = 8$ cm e $BP = 6$ cm, calculamos o comprimento do raio da esfera por meio do Teorema de Pitágoras.

$$(CP)^2 = (BC)^2 + (BP)^2 \Rightarrow r^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow r = 10$$



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, o comprimento do raio da esfera é 10 cm.

b) O comprimento do equador da esfera é dado por:

$$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 = 62{,}8$$

Assim, o comprimento do equador da esfera é aproximadamente 62,8 cm.

Observação

Nesse caso, $r = 10$, pois $r > 0$.

c) Calculando o volume da esfera, temos:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^3}{3} \simeq 4\,187$$

Portanto, o volume da esfera é aproximadamente $4\,187\ cm^3$.

R14. A densidade de um corpo é a razão entre sua massa e seu volume. Um objeto é mais denso do que outro se, tendo uma massa igual, ocupar menor volume, ou, analogamente, com o mesmo volume, tiver maior massa. Por exemplo, ao comparar 1 kg de chumbo com 1 kg de algodão, apesar de as massas serem iguais, o volume ocupado pelo algodão é maior, pois sua densidade é menor.

Os valores da densidade do ouro e da prata são, respectivamente, 19,3 g/cm^3 e 10,5 g/cm^3, em condições ideais de pressão e de temperatura. Considere duas esferas nessas condições: uma de ouro, com comprimento do raio 1,05 cm, e uma de prata, com comprimento do raio 1,20 cm. Determine qual esfera tem maior massa (considere $\pi = 3{,}14$).

Resolução

Podemos verificar, de acordo com o enunciado, que a esfera de prata tem o maior volume, pois tem o maior raio. No entanto, não podemos dizer o mesmo da massa, pois as esferas são compostas de materiais com diferentes densidades.

Para calcular a massa de cada esfera, inicialmente calculamos o volume, em centímetros cúbicos, de cada uma delas.

- $V_{ouro} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}05)^3}{3} = \frac{14{,}53977}{3} = 4{,}84659$
- $V_{prata} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}20)^3}{3} = \frac{21{,}70368}{3} = 7{,}23456$

Por fim, calculamos a massa, em gramas, de cada esfera.

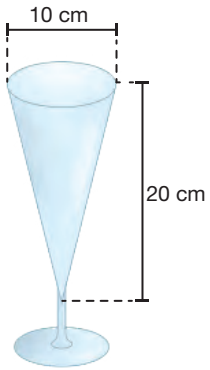
- $d_{ouro} = \frac{m_{ouro}}{V_{ouro}} \Rightarrow 19{,}3 = \frac{m_{ouro}}{4{,}84659} \Rightarrow m_{ouro} \simeq 93{,}5$
- $d_{prata} = \frac{m_{prata}}{V_{prata}} \Rightarrow 10{,}5 = \frac{m_{prata}}{7{,}23456} \Rightarrow m_{prata} \simeq 76{,}0$

Portanto, as massas das esferas de ouro e prata são, respectivamente, 93,5 g e 76,0 g. Assim, a esfera de ouro tem a maior massa.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolvendo por etapas

Em uma taça vazia com formato interno de cone reto, como a representada, Gustavo colocou 0,35 L de suco de laranja e cinco pedras de gelo esféricas iguais. Sabendo que, após colocar as pedras de gelo, 10 mL de suco transbordaram, determine o comprimento do diâmetro de cada pedra de gelo.



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Observação
As medidas apresentadas na imagem referem-se às dimensões internas da taça.

A. Compreendendo o problema

1. O que o problema pede?
O comprimento do diâmetro de cada uma das pedras de gelo.

2. Quais são os dados apresentados no problema?
As dimensões internas da taça, a quantidade de suco adicionado à taça por Gustavo, o formato e a quantidade de pedras de gelo introduzidas na taça e a quantidade, em mililitros, de suco que transbordou da taça.

B. Organizando as ideias e elaborando um plano

1. Registrando um possível plano.
Inicialmente, determinamos a capacidade, em mililitros, da taça. Em seguida, calculamos a capacidade disponível na taça após serem adicionados os 0,35 L de suco de laranja. Na sequência, determinamos o volume de cada uma das pedras de gelo. Por fim, determinamos o comprimento do raio de cada uma das pedras de gelo e, depois, o comprimento de seu diâmetro.

2. Escolhendo as notações.
- H: altura interna da taça.
- R: comprimento do raio interno do aro da taça.
- V_r: volume interno da taça.
- r: comprimento do raio de cada pedra de gelo.
- d: comprimento do diâmetro de cada pedra de gelo.
- V_G: volume de cada pedra de gelo.

C. Executando o plano

Passo 1

Sabemos que o volume de um cone de altura h e raio da base r_1 é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot h$$

Assim:

$$V_r = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H \Rightarrow V_r = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 20 \Rightarrow V_r \simeq 523$$

Logo, o volume interno da taça é aproximadamente 523 cm^3 ou 523 mL.

Observação
Na resolução do problema, considerou-se $\pi = 3{,}14$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Passo 2

Como 1 L = 1000 mL, segue que:

$$0{,}35\ \text{L} = 0{,}35 \cdot 1000\ \text{mL} = 350\ \text{mL}$$

Vamos calcular a capacidade disponível na taça após Gustavo adicionar o suco. Como o volume interno da taça é aproximadamente 523 mL, segue que:

$$523\ \text{mL} - 350\ \text{mL} = 173\ \text{mL}$$

Ou seja, após adicionar o suco, havia uma capacidade disponível aproximada de 173 mL.

Passo 3

Conhecendo a capacidade disponível na taça, calculamos o volume de cada pedra de gelo. Para isso, fazemos:

$$V_G = \frac{173 + 10}{5} = 36{,}6$$

Logo, o volume de cada pedra de gelo é, aproximadamente, 36,6 mL.

Passo 4

Como as pedras de gelo têm formato esférico, segue que:

$$V_G = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Substituindo V_G por 36,6 mL, temos:

$$V_G = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow 36{,}6 = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow r^3 = \frac{109{,}8}{4\pi} \Rightarrow r \simeq 2{,}06$$

Assim, o comprimento do raio de cada pedra de gelo é, aproximadamente, 2,06 cm.

Passo 5

Por fim, calculamos o comprimento do diâmetro de cada pedra de gelo. Para isso, fazemos:

$$d = 2r \Rightarrow d = 2 \cdot 2{,}06 \Rightarrow d = 4{,}12$$

Portanto, o comprimento do diâmetro de cada pedra de gelo é, aproximadamente, 4,12 cm.

Observação

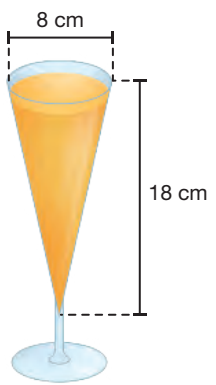
Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de tarefas ou problemas semelhantes propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico.

Agora é você quem resolve!

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

1. Leia o problema.

Em uma taça com formato interno de cone reto, como a representada, há 260 mL de suco. Amanda deseja acrescentar pedras de gelo esféricas de 2 cm de diâmetro. Desconsiderando o derretimento do gelo, quantas pedras de gelo, no máximo, ela poderá acrescentar sem que o suco transborde da taça? (Considere $\pi = 3{,}14$.)



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

As medidas apresentadas na imagem referem-se às dimensões internas da taça.

2. É possível resolver o problema utilizando, com algumas adequações, o plano apresentado nesta seção? Qual é a resposta a esse problema?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

Professor, professora: Se necessário, oriente os estudantes a considerar $\pi = 3{,}14$ na resolução das tarefas.

96. Calcule o volume de uma esfera cujo comprimento do raio é 6 cm.
Resposta: Aproximadamente 904,32 cm^3.

97. Qual é o volume de uma esfera cujo equador tem 9,42 cm de comprimento?
Resposta: Aproximadamente 14,13 cm^3.

98. A bola de basquetebol, que pode ser de couro animal, couro sintético ou borracha, não deve ter sua circunferência máxima menor do que 749 mm e maior do que 780 mm em qualquer categoria masculina. Quais são os volumes mínimo e máximo aproximados que uma bola de basquetebol da divisão masculina deve ter?
Resposta: Aproximadamente $7{,}1 \cdot 10^6$ mm^3; aproximadamente $8{,}0 \cdot 10^6$ mm^3.

99. O planeta Terra tem o formato aproximado de uma esfera com volume de 1100 bilhões de quilômetros cúbicos. Dessa maneira, qual é o comprimento do raio aproximado da Terra?
Resposta: 6 400 km

100. Calcule o volume de uma esfera cujo círculo máximo tem 706,5 cm^2 de área.
Resposta: Aproximadamente 14 130 cm^3.

101. Uma indústria que fabrica esferas de metal para rolamentos produz certo modelo de esfera em aço-carbono cuja densidade é 8 g/cm^3.

a) Qual é a massa aproximada de uma dessas esferas cujo comprimento do raio é 0,6 cm? Resposta: 7,232 g

b) Determine o comprimento do diâmetro de uma esfera desse tipo cuja massa é 200,96 g. Resposta: $2\sqrt[3]{6}$ cm

102. Uma das maneiras de armazenar gás a elevadas pressões é colocá-lo em um reservatório esférico, pois, com esse formato, a pressão do gás exercida internamente nas paredes do recipiente é a mesma em todas as direções.

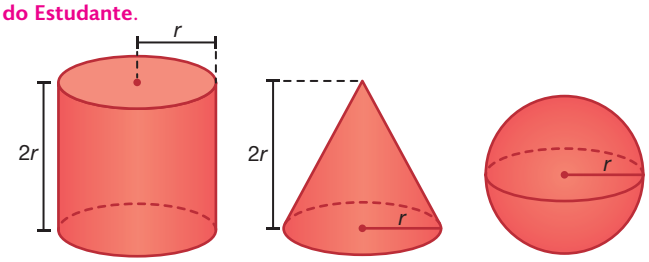

ALEXANDR MALYSHEV/ALAMY/FOTOARENA

Tanques de armazenamento de produtos químicos.

Certo reservatório esférico tem volume aproximado de 900 m^3. Determine o número inteiro mais próximo, por excesso ou por falta, do verdadeiro valor, em metros, do comprimento do raio desse reservatório.
Resposta: 6

103. Uma esfera de vidro utilizada como objeto decorativo é embalada em uma caixa cúbica cujo comprimento da aresta corresponde ao do diâmetro da esfera. A fim de proteger essa esfera durante o transporte, o fabricante ocupa as partes vazias da caixa com espuma. Sabendo que o comprimento da aresta da caixa é 24 cm, determine o volume aproximado de espuma utilizado em cada embalagem.
Resposta: 6 589 cm^3

104. Considere um cilindro A com raio r e altura $2r$, um cone B com raio r e altura $2r$ e uma esfera C de raio r. Mostre que o volume de A é igual à soma dos volumes de B e C, ou seja, $V_A = V_B + V_C$.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.



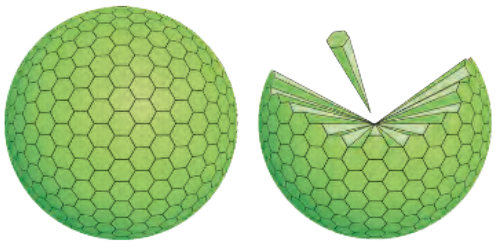
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

105. Uma esfera com volume igual a 36π cm^3 está inscrita em um cilindro equilátero. Qual é o volume desse cilindro?
Resposta: 54π cm^3

106. Considere em uma esfera o equador e dois meridianos perpendiculares entre si. Ao realizar cortes contendo essas circunferências, a esfera é dividida em oito partes idênticas com $\frac{785}{96}$ cm^3 de volume cada. Qual é o comprimento do raio dessa esfera? Resposta: Aproximadamente 2,5 cm.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Área da superfície da esfera



CARLOS BORIN/ARQUIVO DA EDITORA

Imagine que uma esfera de centro C e raio r seja, de maneira aproximada, a reunião de n (em que n é um número muito grande) pirâmides com vértice em C e altura igual ao comprimento do raio da esfera. Assim, o volume de cada uma dessas pirâmides será dado por $V_i = \frac{1}{3}A_i r$, com $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, em que A_i representa a área da base da pirâmide.

O volume V da esfera é aproximadamente igual à soma dos volumes das pirâmides obtidas.

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}A_1 r + \frac{1}{3}A_2 r + \ldots + \frac{1}{3}A_n r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}r(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)$$

Nesse caso, $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ é a área aproximada da superfície da esfera, a qual indicaremos por A. Assim:

$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}r\underbrace{(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)}_{A} \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}rA \Rightarrow A = 4\pi r^2$$

Portanto, a área da superfície da esfera é $A = 4\pi r^2$.

Observação

Uma esfera não pode ser "coberta" exclusivamente por hexágonos. A imagem é apresentada apenas para auxiliar o raciocínio.

Observação

O desenvolvimento apresentado nesta página não é uma demonstração, mas um auxílio na compreensão da fórmula da área da superfície em uma esfera.

Exercícios e problemas resolvidos

R15. Desde o tempo de Eratóstenes, matemático grego do século III a.C., acredita-se que o planeta Terra tenha formato esférico. Porém, em função de seu movimento de rotação, ela apresenta um ligeiro achatamento nos polos, tendo o eixo equatorial do planeta 12 756 km e o eixo polar, 12 712 km, aproximadamente. Em razão dessa pequena diferença, para efeitos didáticos, é comum desprezar o achatamento e considerar o planeta Terra como uma esfera. O raio equatorial terrestre (aproximadamente 6 400 km) é muitas vezes empregado como unidade de medida para avaliar distâncias no Sistema Solar.

a) Calcule o comprimento da linha do equador terrestre.

b) Determine a área da superfície da Terra.

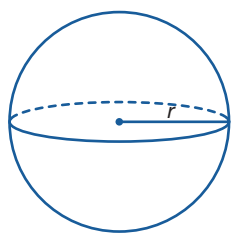
c) Calcule a área da superfície terrestre coberta por água sabendo que ela corresponde a, aproximadamente, 70% do total.

Resolução

a) Considerando o comprimento do raio da Terra com 6 400 km, obtemos o comprimento do equador calculando o comprimento de uma circunferência de mesmo raio.

$$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,400 = 40\,192$$

Portanto, o comprimento da linha do equador terrestre é, aproximadamente, 40 192 km.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Modelo matemático.

b) Calculando a área da superfície, temos:

$$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,400^2 = 514\,457\,600$$

Portanto, a área da superfície terrestre é, aproximadamente, 514 457 600 km^2.

c) Calculando 70% da área da superfície terrestre, temos:

$$A \cdot 0{,}7 = 514\,457\,600 \cdot 0{,}7 = 360\,120\,320$$

Portanto, aproximadamente 360 120 320 km^2 da superfície do planeta Terra são cobertos por água.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

114. Resposta pessoal. A resposta depende de cada problema elaborado pelos estudantes.

Anote as respostas no caderno.

Professor, professora: Se necessário, oriente os estudantes a considerar $\pi = 3{,}14$ na resolução das tarefas.

107. Qual é a área da superfície de uma esfera cujo comprimento do raio é 2,5 cm?

Resposta: Aproximadamente 78,5 cm^2.

108. Calcule a área da superfície de uma esfera cujo volume é $\frac{1570}{3}$ dm^3.

Resposta: Aproximadamente 314 dm^2.

109. Os planetários são equipamentos que projetam imagens simulando o céu e seus astros em uma noite sem nuvens. Essa projeção, em geral, é realizada na superfície interna de uma cúpula com formato semiesférico. Se em certo planetário o comprimento da circunferência interna da cúpula semiesférica é 69,08 m, qual é a área da superfície em que ocorre a projeção?

Resposta: Aproximadamente 759,88 m^2.

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS



Edifício do planetário no Centro Dragão do Mar de Arte e Cultura, em Fortaleza, Ceará, em 2022.

110. Arnaldo construiu uma maquete que contém a representação do planeta Terra. Para representar nosso planeta, ele utilizou uma esfera cuja área da superfície é 11 304 cm^2.

a) Qual é o volume da esfera que representa o planeta Terra? Resposta: Aproximadamente 113 040 cm^3.

b) Arnaldo marcou corretamente, em sua maquete, o centro de Lançamento de Alcântara, no Maranhão, e o Cabo Canaveral, na Flórida. Sabendo que a distância real em linha reta entre essas bases é 5 181,1 km, determine a distância entre elas na representação feita por ele.

Resposta: Aproximadamente 24,3 cm.

OBJETO DIGITAL ***Mapa clicável:*** Centros de lançamento brasileiros

111. Em um recipiente cilíndrico de 10 cm de raio e 15 cm de altura, contendo 1212π cm^3 de água, uma esfera de aço maciça deve ser colocada de maneira a ficar totalmente submersa, mas sem que o líquido do recipiente transborde. Dessa maneira, qual será, no máximo, a área da superfície dessa esfera? Resposta: 144π cm^2

112. Um recipiente cilíndrico cujo comprimento do raio da base é 25 cm estava inicialmente cheio de água. Uma esfera de vidro maciça foi totalmente mergulhada dentro dele, fazendo transbordar parte da água. Após a esfera ser cuidadosamente retirada, verificou-se que o nível da água no recipiente estava 7,2 cm mais baixo. Qual é a área da superfície dessa esfera?

Resposta: 900π cm^2



FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

113. O sistema de fuso horário utilizado mundialmente consiste em dividir o planeta Terra em meridianos, determinando 24 partes de mesma área, denominadas "fusos".

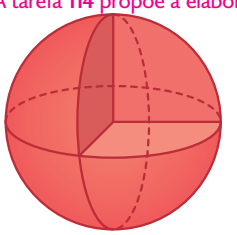
Considerando a Terra como uma esfera de raio 6 400 km, responda às seguintes questões.

a) Qual é o ângulo formado em cada fuso? Resposta: 15°

b) Qual é a área aproximada do planeta correspondente a cada fuso horário? Resposta: 21 435 733 km^2

114. Considere em uma esfera de raio r o equador e dois meridianos perpendiculares entre si. Ao realizar cortes contendo essas circunferências, a esfera é dividida em oito partes idênticas.

Professor, professora: A tarefa **114** propõe a elaboração de um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo, assim, para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos dos estudantes a respeito de determinadas situações.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com as informações apresentadas, elabore um problema envolvendo os conteúdos estudados. Em seguida, peça a um colega que o resolva.

Professor, professora: Antes de os estudantes elaborarem o problema da tarefa **114**, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos o cilindro, o cone, o tronco de cone reto e a esfera. Além disso, calculamos a área total da superfície e o volume dessas figuras geométricas espaciais. Agora, chegou a hora de refletir sobre seus conhecimentos! Como estratégia de estudos, sugerimos que faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

2. A seguir estão apresentados os principais assuntos estudados neste capítulo.

- Cilindro.
- Área da superfície de um cilindro reto.
- Volume do cilindro.
- Cone.
- Área da superfície do cone reto.
- Volume do cone.
- Tronco de cone.
- Área da superfície de um tronco de cone reto.
- Volume de um tronco de cone reto.
- Esfera.
- Volume da esfera.
- Área da superfície da esfera.

5. Sugestão de resposta: 1º. Calcule a área A_b de uma das bases do cilindro; para isso, efetue πr^2. 2º. Calcule a área lateral A_l do cilindro; para isso, efetue $2\pi rh$. 3º. Calcule $2A_b + A_l$. O resultado obtido é a área total do cilindro.

9. Sugestão de resposta: 1º. Multiplique o volume da esfera por 3. 2º. Divida o produto obtido no passo anterior por 12,56 (nesta etapa, considerou-se $\pi = 3{,}14$). 3º. Calcule a raiz cúbica do quociente obtido no passo anterior. O resultado obtido é o comprimento aproximado do raio da esfera.

2. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

Você teve dificuldade em algum deles? Não recorda algum desses conceitos? Ficou com dúvidas? Reflita sobre esses questionamentos e, se necessário, retome o que foi estudado.

3. Cite duas situações do cotidiano que podem ser relacionadas aos assuntos estudados neste capítulo.

4. De acordo com o cone apresentado, classifique cada informação a seguir em verdadeira ou falsa.

3. Sugestão de resposta: Cálculo do volume interno de um copo com formato cilíndrico ou de tronco de cone; cálculo da área da superfície do planeta Terra.



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

8. Resposta: Sim, pois, conhecendo esses comprimentos, é possível determinar a altura do tronco de cone reto e utilizar a fórmula de cálculo do volume de um tronco de cone reto.

a) A base do cone é o círculo de centro O. Resposta: Verdadeira.

b) A geratriz do cone é a reta $\overleftrightarrow{OV}$. Resposta: Falsa.

c) A altura do cone é a distância entre os planos paralelos que contêm a base e o vértice V. Resposta: Verdadeira.

d) A superfície lateral do cone é a reunião de todas as geratrizes. Resposta: Verdadeira.

5. Escreva um passo a passo que possibilite calcular a área total de um cilindro dados o comprimento de seu raio r e sua altura h.

6. Qual das fórmulas apresentadas a seguir possibilita calcular o volume V de um cone de altura h e raio da base r? Resposta: Alternativa **c**.

a) $V = 4\pi r^2$

b) $V = \pi r^2 h$

c) $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

7. A seção meridiana de um cone equilátero é um:

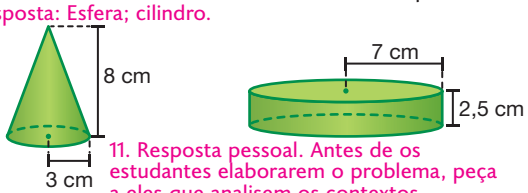
a) triângulo escaleno.
b) quadrado.
c) triângulo equilátero.
d) retângulo.

Resposta: Alternativa **c**.

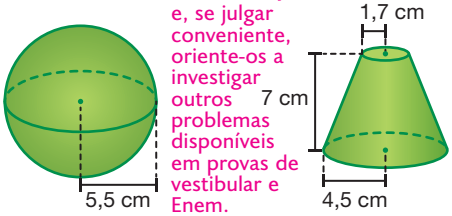
8. É possível calcular o volume de um tronco de cone reto conhecendo o comprimento de sua geratriz, do raio de sua base menor e do diâmetro de sua base maior? Justifique sua resposta.

9. Escreva um passo a passo que possibilite determinar o comprimento aproximado do raio de uma esfera dado seu volume.

10. Qual das figuras a seguir tem o maior volume: o cilindro reto, o cone reto, o tronco de cone reto ou a esfera? E a maior área de superfície? Resposta: Esfera; cilindro.



11. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

11. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo-o. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

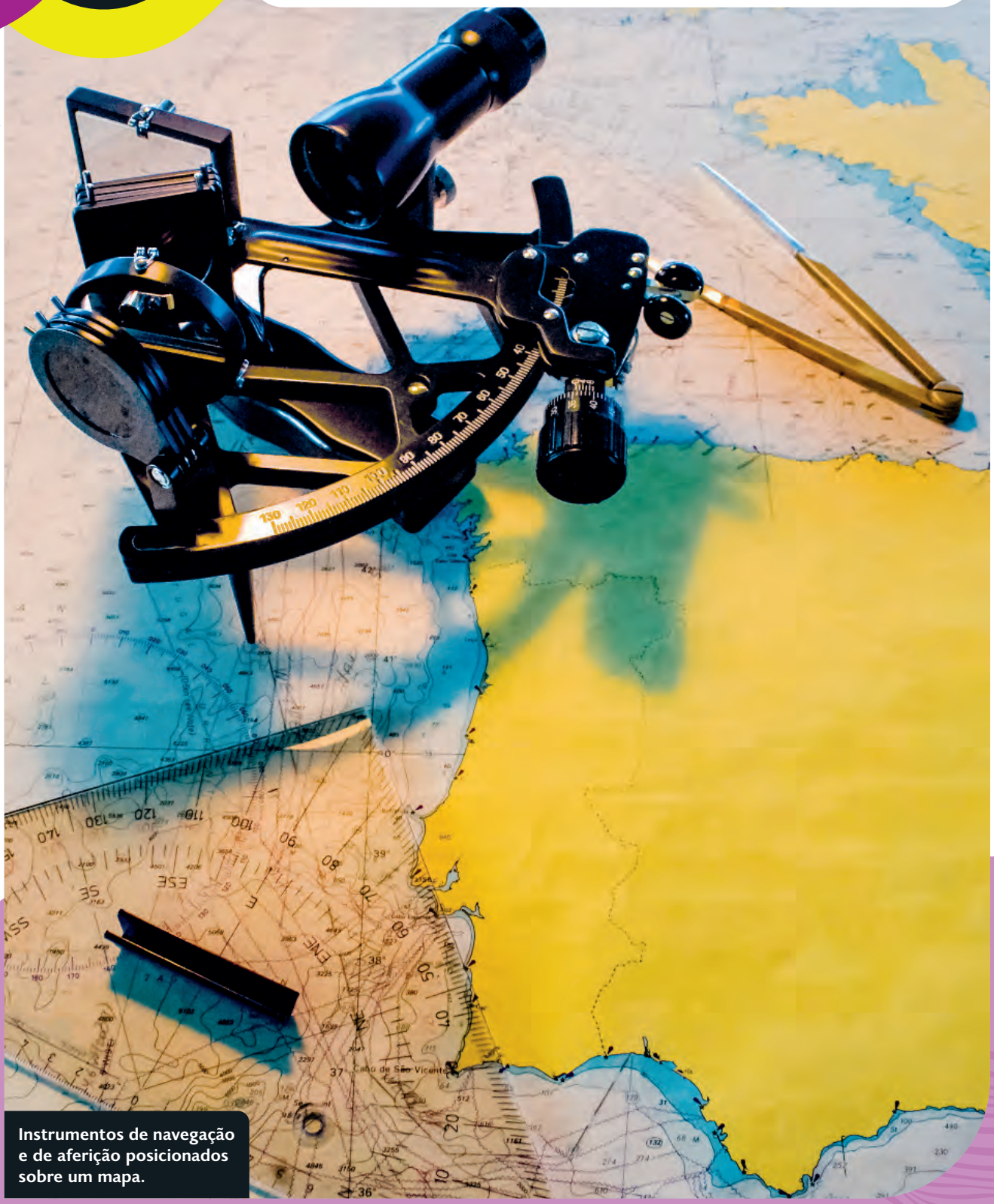
12. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo. Nela, use desenhos e dê exemplos. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

7

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS



IEVGEN GLUZHETSKY/SHUTTERSTOCK

Instrumentos de navegação e de aferição posicionados sobre um mapa.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Desde a Antiguidade, a humanidade apresenta uma preocupação constante com a representação das regiões do globo terrestre. As primeiras representações cartográficas são creditadas a Eratóstenes de Cirene, um matemático, geógrafo e astrônomo grego nascido em 276 a.C. Com base nos trabalhos desse astrônomo, diferentes mapas foram sendo elaborados, buscando sempre a representação mais adequada dos países e dos diferentes territórios do planeta. No entanto, será que é possível elaborar um mapa que consiga descrever as regiões de maneira exata, sem distorções?

Sabemos que a Terra é um planeta com formato que se parece com o da esfera, uma figura geométrica tridimensional, enquanto os mapas são construídos sob superfícies planas. Assim, como apontou Carl Friedrich Gauss, no século XIX, é impossível representar uma esfera em um plano sem que haja distorções. Logo, é impossível construir um mapa que seja 100% fiel à realidade. Dessa maneira, os **cartógrafos** precisam escolher uma das três principais características (dimensões, formatos e ângulos) para manter em seus mapas, enquanto as outras, inevitavelmente, deverão ser modificadas. De acordo com a característica escolhida, diferentes mapas podem ser elaborados. Os modelos mais conhecidos de mapas-múndi elaborados historicamente são: Projeção de Mercator, publicada em 1569, há mais de 450 anos, Projeção de Gall-Peters, publicada em 1885, há mais de 100 anos, Projeção de Dymaxion, publicada em 1943, há mais de 80 anos, e Projeção de Robinson, publicada em 1963, há mais de 60 anos.

Neste capítulo, você vai estudar:

- cartografia;
- projeções cartográficas.

Cartógrafos: profissionais da Cartografia, ciência responsável pela elaboração de mapas e de outros tipos de representação.

1. Resposta: Projeção de Mercator, Projeção de Gall-Peters, Projeção de Dymaxion e Projeção de Robinson.

2. Resposta: Não, pois é impossível representar uma esfera em um plano sem que haja distorções.

Professor, professora: Explique aos estudantes que, no decorrer da história, diversos tipos de mapa-múndi foram elaborados com o intuito de amenizar as distorções causadas pela planificação do globo terrestre. Se possível, apresente imagens de mapas em diferentes épocas e contextos.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Quais modelos de projeção de mapa-múndi são apresentadas no texto?
2. Existe um mapa que represente 100% a realidade? Justifique sua resposta.
3. Pesquise os elementos que os mapas podem mostrar. Depois, elabore um pequeno texto com o resultado de sua pesquisa para ser apresentado aos colegas e ao professor. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Professor, professora: Comente com os estudantes que, em razão dos avanços tecnológicos, as técnicas de coleta de informações para a elaboração e o aperfeiçoamento dos mapas estão cada vez mais aprimoradas. O geoprocessamento e os Sistemas de Informações Geográficas (SIG) são um exemplo disso.

Cartografia

Conforme dito anteriormente, os primeiros registros relacionados à produção de mapas de que se tem notícia são atribuídos a Eratóstenes de Cirene. A ele também é atribuída a criação de um dos primeiros mapas do mundo, que já contava com um sistema de **paralelos** e **meridianos** que auxiliavam na localização de partes específicas das regiões retratadas. Esse fato deu início à Cartografia.

Por ser impossível representar uma superfície curva em um plano, no decorrer do tempo, inúmeros mapas foram criados com o objetivo de tentar minimizar os erros cometidos nas versões anteriores, cada qual com as próprias características.



SAMMLUNG RAUCH/INTERFOTO/FOTOARENA

Eratóstenes de Cirene (276 a.C.-194 a.C.).

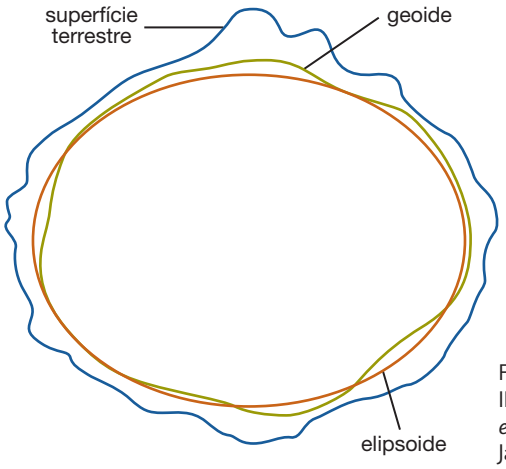
Nos tópicos seguintes, estudaremos as deformações que não podem ser evitadas ao transpor a superfície terrestre para um plano. Porém, vale destacar que a utilidade de cada mapa é válida para determinada aplicação, em determinado instante.

Paralelos: linhas imaginárias que circulam a Terra no sentido Leste-Oeste; assim como os meridianos, os paralelos também são utilizados como referência na localização de um ponto em qualquer parte do planeta, e o principal é a linha do equador, que divide a Terra nos hemisférios Norte e Sul.

Meridianos: linhas imaginárias que cortam a superfície da Terra no sentido Norte-Sul, ligando um polo ao outro; são utilizados como referência na localização de um ponto em qualquer parte do planeta, e o principal é o meridiano de Greenwich, que divide a Terra em Leste e Oeste.

O formato do planeta Terra

Como mencionado anteriormente, a Terra é um planeta com formato que se parece com o de uma esfera. Além disso, apresenta formato tridimensional, que se assemelha ao de um **geoide**. É difícil representá-lo e analisá-lo matematicamente, tornando-se necessária sua aproximação por meio de um modelo regular.

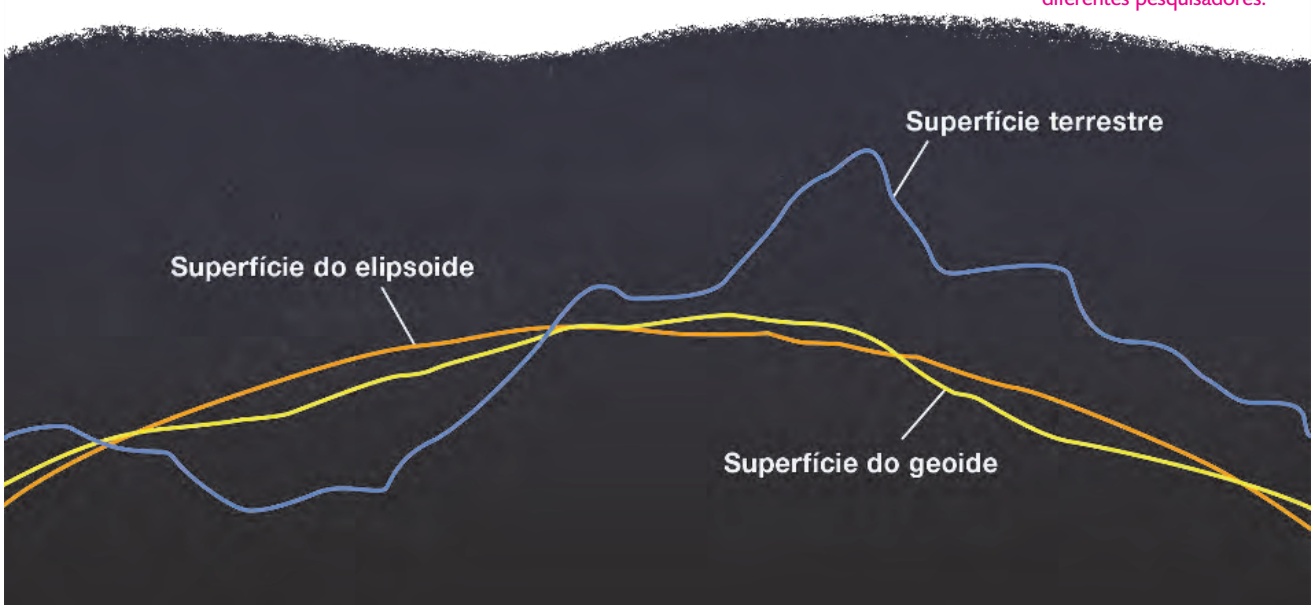


Dependendo da aplicação desejada, pode-se representar o planeta Terra por uma esfera, como feito em outros capítulos deste livro, ou por uma elipsoide.

O esquema apresentado na imagem possibilita uma comparação mais detalhada da superfície terrestre, da superfície do elipsoide e da superfície do geoide.

Professor, professora: A título de curiosidade, diga aos estudantes que geoprocessamento é um conjunto de técnicas que relacionam a Matemática e a computação, objetivando auxiliar na coleta, organização e interpretação de diversas informações geográficas. Do mesmo modo, os SIG são formados por ferramentas (*softwares*, *hardwares* e banco de dados informatizados) responsáveis pela integração e operação da grande quantidade de informações e dados geográficos coletados por diferentes pesquisadores.

Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro, 2023. p. 21.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Estudando projeções cartográficas

Ao representarmos a superfície terrestre em um mapa, devemos, inicialmente, estabelecer um método em que todo ponto da superfície do planeta corresponda a um ponto do mapa, e vice-versa. Existem diversos métodos que possibilitam essa correspondência, os quais são denominados **sistemas de projeção cartográficos**.

Observação

Todos os mapas são representações aproximadas da superfície terrestre. Assim, o sistema de projeções usado deve ser escolhido de maneira que o mapa satisfaça suas finalidades.

Classificação de projeções

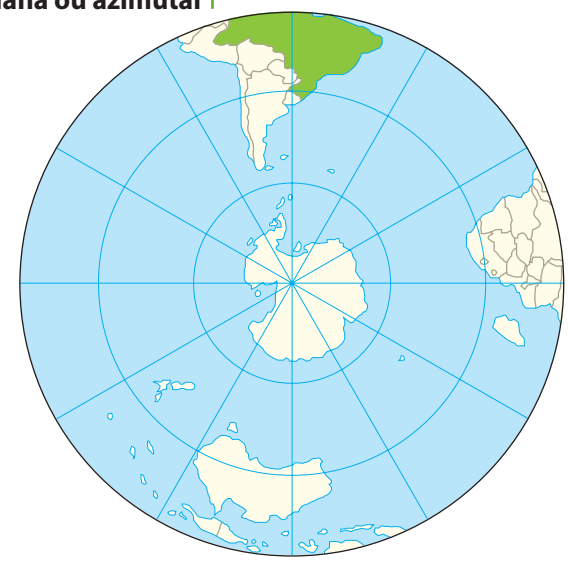
Os sistemas de projeções cartográficas são classificados pelo tipo de superfície adotada e por seu grau de deformação.

Quanto à superfície adotada

Quanto ao tipo de superfície adotada, apresentaremos as projeções planas ou azimutais, cônicas e cilíndricas.

Projeção plana ou **azimutal**: Consiste na projeção cartográfica sobre um plano. É o tipo mais antigo de projeção.

Projeção plana ou azimutal



KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Neste tópico, algumas representações cartográficas não apresentam legenda, escala e orientação, pois o objetivo é destacar as características de deformação de cada tipo de projeção.



CAMILA CARMONA/ARQUIVO DA EDITORA

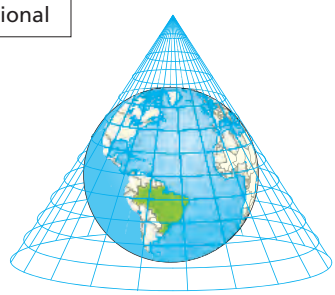
Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro, 2023. p. 26.

Projeção cônica: Consiste na projeção cartográfica sobre a superfície lateral de um cone reto que, em seguida, é "desenrolada" sobre um plano.

Projeção cônica



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA



CAMILA CARMONA/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro, 2023. p. 26.

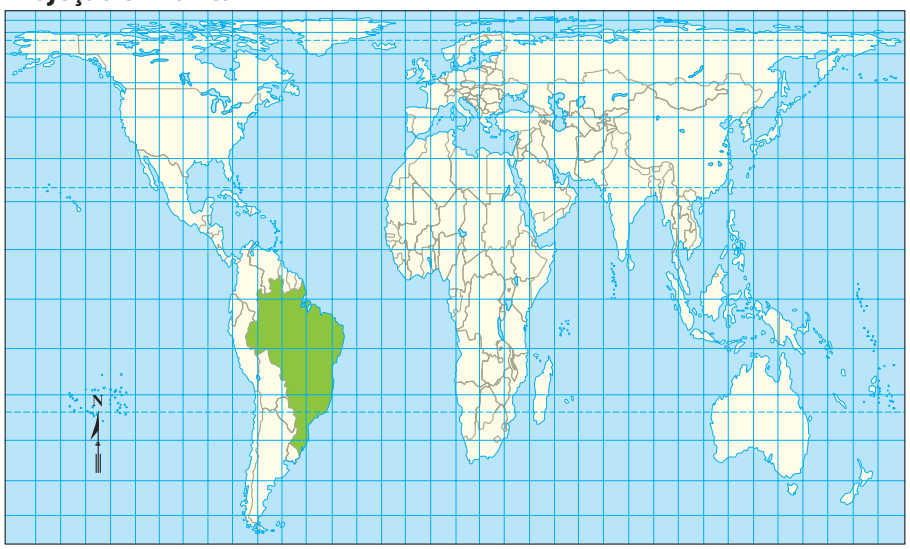
Em todas as projeções cônicas normais, cujo eixo do cone coincide com o eixo de rotação da Terra, os meridianos são retas que convergem para um ponto (que representa o vértice do cone) e os paralelos são arcos de circunferências concêntricas cujo centro é esse ponto.

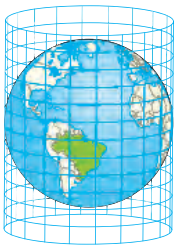
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Projeção cilíndrica: Consiste na projeção cartográfica sobre a superfície lateral de um cilindro reto que, em seguida, é "desenrolada" sobre um plano.

Projeção cilíndrica

HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA





CAMILA CARMONA/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro, 2023. p. 26.

Em todas as projeções cilíndricas normais – cujo eixo do cilindro coincide com o eixo de rotação da Terra – os meridianos e os paralelos são representados por retas perpendiculares.

Quanto ao grau de deformação

Cada um dos métodos de projeção da superfície terrestre preserva diferentes propriedades: área, direção, distância e forma. Desse modo, quanto ao grau de deformação das superfícies representadas, as projeções são classificadas em conformes, equivalentes ou equidistantes.

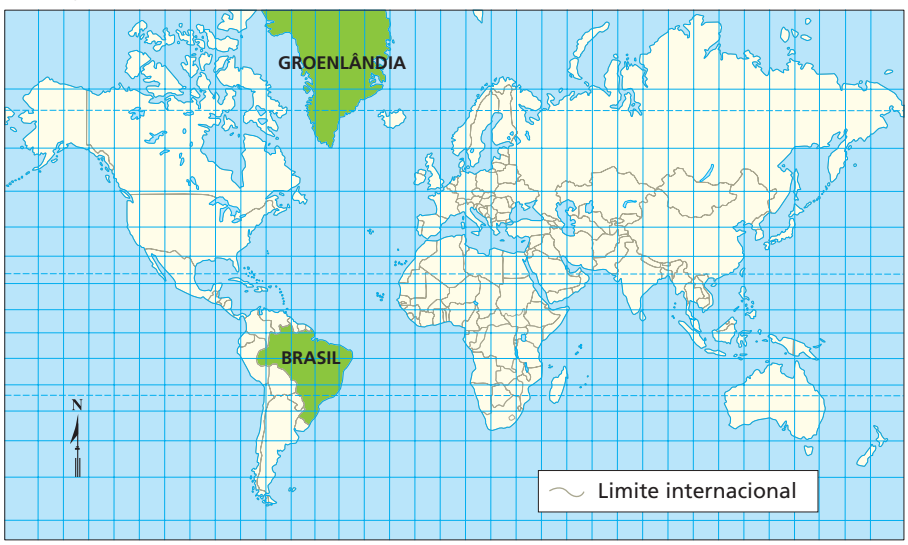
Projeções conformes: São projeções que conservam os formatos da superfície terrestre. Nelas, os ângulos da representação mantêm fidelidade aos do globo. Um exemplo de projeção conforme é a de Mercator, elaborada por Gerardus Mercator, em 1569.

Observação

Ao se preservar uma propriedade, as demais normalmente sofrem distorções.

Projeção de Mercator

KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA



Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro, 2023. p. 28.

Observação

Nessa projeção, a Groenlândia, localizada no extremo norte do continente americano, aparenta ter uma área maior do que a do Brasil, porém a área da Groenlândia é, aproximadamente, um quarto da do Brasil.

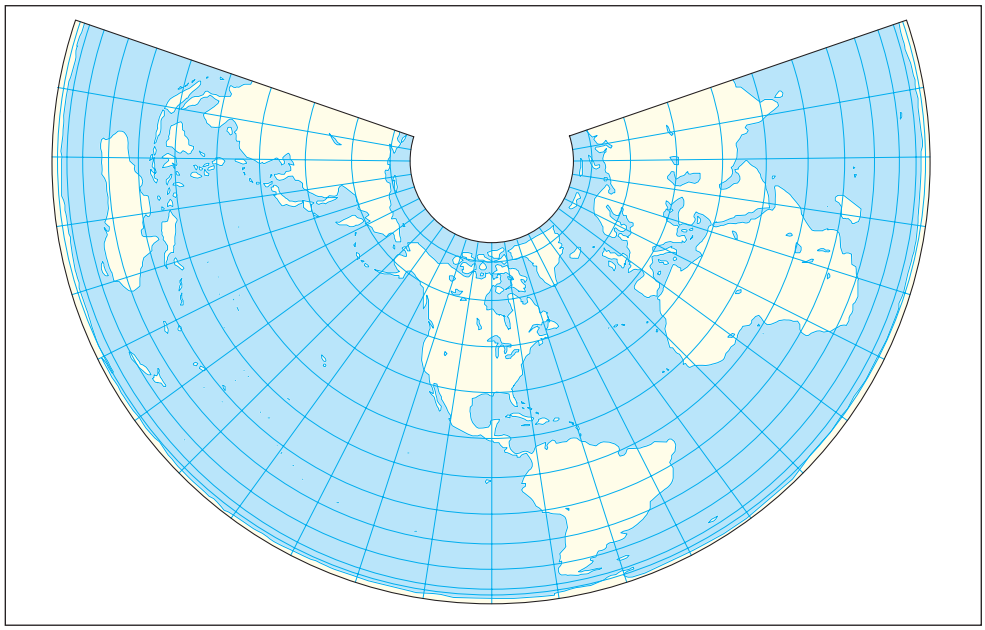
A Projeção de Mercator é, provavelmente, uma das projeções conformes mais conhecidas. Nela, as deformações que ocorrem nas áreas representadas são mínimas na região equatorial, mas aumentam consideravelmente em direção aos polos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Projeções equivalentes: São projeções que conservam as relações de superfície, não havendo deformação de área. Um exemplo de projeção equivalente é a de Albers, desenvolvida por Heinrich Christian Albers no início do século XIX.

Projeção de Albers

KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA



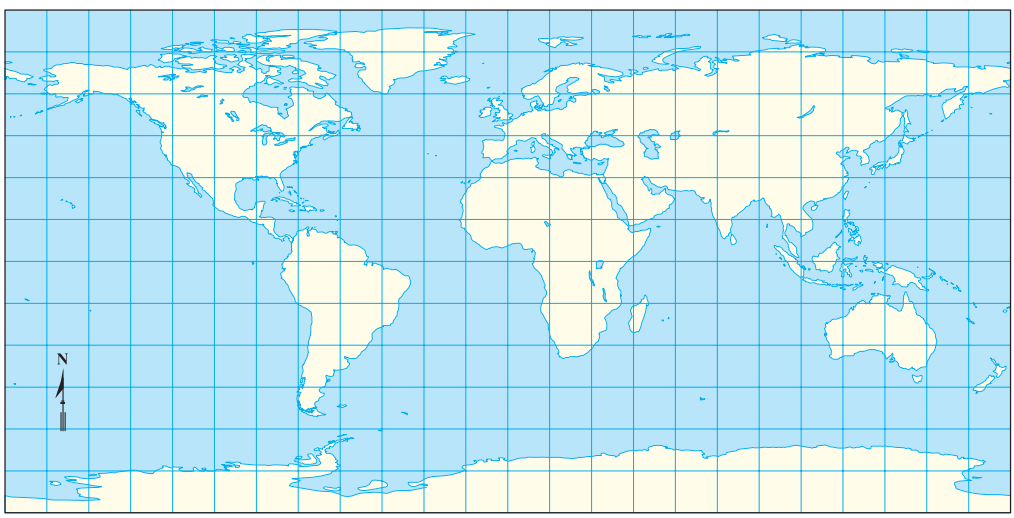
Fonte de pesquisa: SNYDER, John P. *An album of map projections*. Washington, DC: U.S. Government Printing Office, 1989. p. 101.

Nessa projeção, os paralelos são arcos de circunferências concêntricas. Além disso, quanto mais próximo das bordas Norte e Sul do mapa, menor será a distância entre dois paralelos. Já os meridianos são raios de uma mesma circunferência, que intersecta os paralelos perpendicularmente.

Projeções equidistantes: são projeções que conservam a proporção entre as distâncias, em determinadas direções, na superfície representada. Um exemplo é a projeção cilíndrica equidistante, que era muito empregada na navegação marítima, porém foi substituída pela Projeção de Mercator.

Projeção cilíndrica equidistante

HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA



Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro, 2023. p. 28.

A escolha de uma projeção deve levar em consideração a precisão desejada, o impacto sobre o que se pretende analisar e o tipo de dado disponível.

OBJETO DIGITAL
Vídeo: Dá pra ir a pé dos EUA à Rússia?

Questão A.
Imagine que você precise construir um mapa que apresente menos distorções em relação ao tamanho real das áreas representadas. Qual das projeções citadas melhor atenderia ao seu interesse?
Sugestão de resposta: As projeções equivalentes, como é o caso da Projeção de Albers.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

TRABALHO E JUVENTUDES

Professor, professora: Comente com os estudantes que, recentemente, no Brasil, foi aprovada uma lei que integrou a Cartografia à Agrimensura por serem de áreas afins, uma vez que esta última é uma ciência que estuda as fronteiras e limites territoriais. Por enquanto, a formação em Engenharia Cartográfica e de Agrimensura existe apenas em universidades públicas.

O que faz um engenheiro cartógrafo?

As representações cartográficas fazem parte do cotidiano das pessoas muito mais do que elas imaginam. Essa realidade pode ser constatada, por exemplo, quando alguém pede um transporte por aplicativo e pode acompanhar, em tempo real, o deslocamento do veículo pelo mapa disponibilizado no visor do celular.

A diversidade de representações cartográficas e as diferentes possibilidades de acesso a elas são fruto da necessidade crescente do ser humano de registrar partes da superfície terrestre e, consequentemente, do trabalho desempenhado pelos cartógrafos ao longo do tempo. Dessa necessidade, surgiram os modelos de projeções cartográficas que, conforme você estudou, representam a superfície terrestre com determinadas distorções de acordo com o interesse e a intenção do cartógrafo que as produz.

O engenheiro cartógrafo é especialista na produção de mapas, plantas, cartas e croquis. Ele também é responsável por coletar e analisar dados e informações geoespaciais. Conhecimentos da Geografia, Matemática e Astronomia são imprescindíveis para o trabalho desse profissional.

Com o avanço das tecnologias e aperfeiçoamento das técnicas, o ofício de cartógrafo passou por mudanças significativas. Atualmente, com as **geotecnologias**, o exercício da profissão permitiu aos engenheiros cartógrafos não apenas produzir representações cada vez mais detalhadas e precisas da superfície terrestre, mas atuar em diferentes áreas, como saúde, meio ambiente e aeronáutica, realizando estudos, planejamento, monitoramento e orientação de trabalhos técnicos. Entre as geotecnologias dominadas por esses profissionais estão o Sistema de Informações Geográficas (SIG), sensoriamento remoto, Sistema de Posicionamento Global (GPS), fotogrametria e processamento digital de imagens.



ANDREY_POPOV/SHUTTERSTOCK

Engenheira cartógrafa trabalhando em uma representação cartográfica.

No Brasil, os engenheiros cartógrafos podem desenvolver suas funções em empresas privadas e em órgãos públicos, como o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) e secretarias estaduais e municipais do governo. Esses profissionais também podem trabalhar em projetos de gestão pública assessorando, por exemplo, obras de infraestruturas, como construção de rodovias, iluminação pública, rede de saneamento, mapeamentos aéreos para atualizações tributárias e regulação fundiária urbana, entre outros.

Geotecnologias: conjunto de tecnologias voltadas à coleta, ao processamento, à análise e à disponibilidade de dados e informações espaciais.

Dica

Para se tornar um engenheiro cartógrafo, é necessário graduar-se em Engenharia Cartográfica em uma instituição de ensino que seja reconhecida pelo Ministério da Educação (MEC).

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Resposta pessoal. Incentive a participação de todos os estudantes, comentando o que mais chamou a atenção deles em relação à profissão de engenheiro cartógrafo. Eles podem mencionar, por exemplo, o uso das geotecnologias para realizar estudo, planejamento, monitoramento de diferentes áreas, como saúde e meio ambiente, além de participar de projetos de gestão pública.

1. Você já conhecia a profissão de engenheiro cartógrafo? Quais pontos dessa profissão mais chamou a sua atenção? Conte para os colegas.

2. Formem grupos de cinco integrantes, escolham uma das geotecnologias mencionadas no texto, façam uma pesquisa e produzam um cartaz com as principais informações obtidas sobre ela, incluindo imagens. Depois, organizem uma exposição dos cartazes para que todos conheçam as informações que vocês pesquisaram.

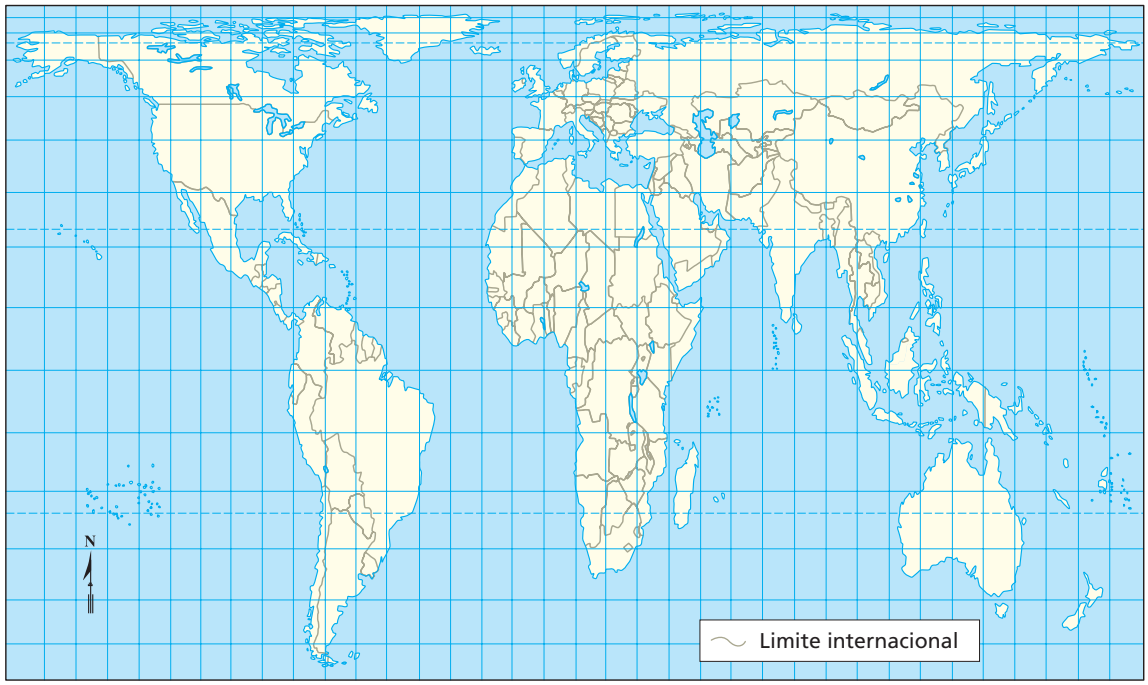
Resposta pessoal. Auxilie os estudantes na organização dos grupos para que contemplem diferentes tecnologias. Oriente-os a fazer as pesquisas na internet e auxilie-os na elaboração dos descritores.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

1. Duas das principais projeções cartográficas são a de Mercator, apresentada anteriormente, e a de Peters, elaborada pelo cartógrafo alemão Arno Peters, em 1974.

Projeção de Peters



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: FERREIRA, Graça Maria Lemos. *Atlas geográfico*: espaço mundial. 5. ed. São Paulo: Moderna. 2019. p. 10.

Com base em seus conhecimentos sobre projeções cartográficas, determine a alternativa correta.

a) Na Projeção de Peters, as formas da superfície parecem visivelmente deformadas, como se os continentes tivessem sido mais alongados no sentido Norte-Sul e mais achatados no sentido Leste-Oeste.

b) Na Projeção de Mercator, as deformações que ocorrem nas áreas representadas são máximas na região equatorial, mas diminuem consideravelmente em direção aos polos.

c) A superfície adotada na Projeção de Peters é um plano, enquanto a adotada na de Mercator é um cone.

d) Na Projeção de Peters, as formas da superfície parecem visivelmente deformadas, como se os continentes tivessem sido mais alongados no sentido Leste-Oeste e mais achatados no sentido Norte-Sul.

Resposta: Alternativa **a**.

2. O logotipo e a bandeira da ONU são os símbolos utilizados pela Organização para se fazer representar nos diferentes palcos em que opera. Esses elementos são essenciais em cenários de conflito, permitindo a rápida e fácil identificação dos agentes e dos postos de comando das Nações Unidas.

Fonte de pesquisa: ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. Centro Regional de Informações para a Europa Ocidental. *Logotipo e bandeira da ONU*. 2020. Disponível em: https://unric.org/pt/logotipo-e-bandeira-da-onu/. Acesso em: 19 ago. 2024.

Observação

A sigla ONU refere-se à Organização das Nações Unidas.



ONU/YURIY BOYKO/SHUTTERSTOCK

Bandeira da ONU.

O logotipo da ONU consiste em um mapa do mundo representado por meio de uma projeção inscrita numa coroa composta por ramos de oliveira. Quanto à superfície adotada, podemos classificar essa projeção em azimutal, cilíndrica ou cônica? Resposta: Azimutal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

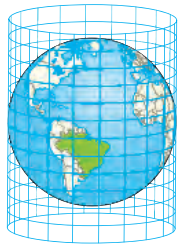
3. Estudamos anteriormente as projeções de Mercator e de Peters. Entre as alternativas a seguir, qual apresenta o modelo que ambas as projeções utilizam?

Resposta: Alternativa **B.**

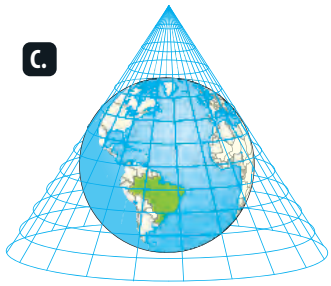
A.



B.



C.

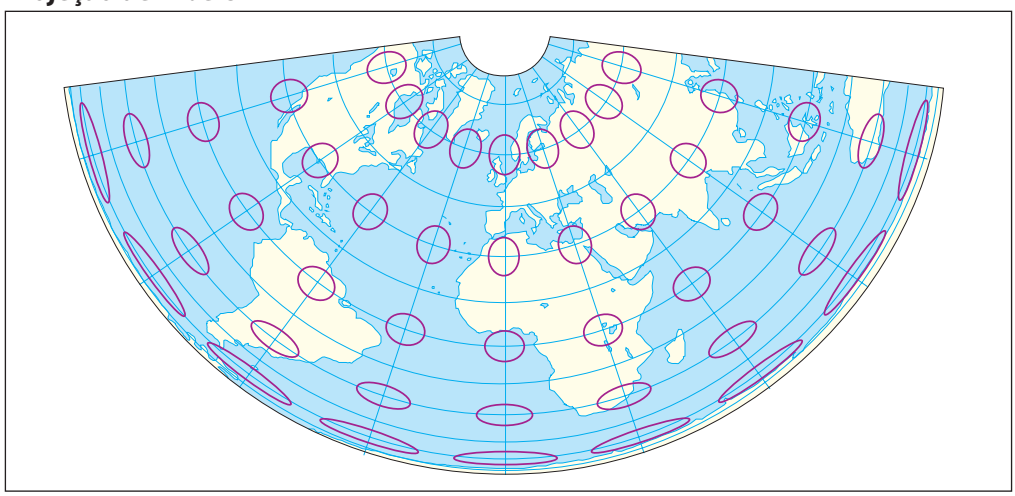


ILUSTRAÇÕES: CAMILA CARMONA/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro, 2023. p. 26.

4. Na superfície de um globo terrestre, foram desenhadas algumas circunferências congruentes. Em seguida, utilizando métodos de projeções cartográficas e um *software*, foram obtidos os seguintes resultados.

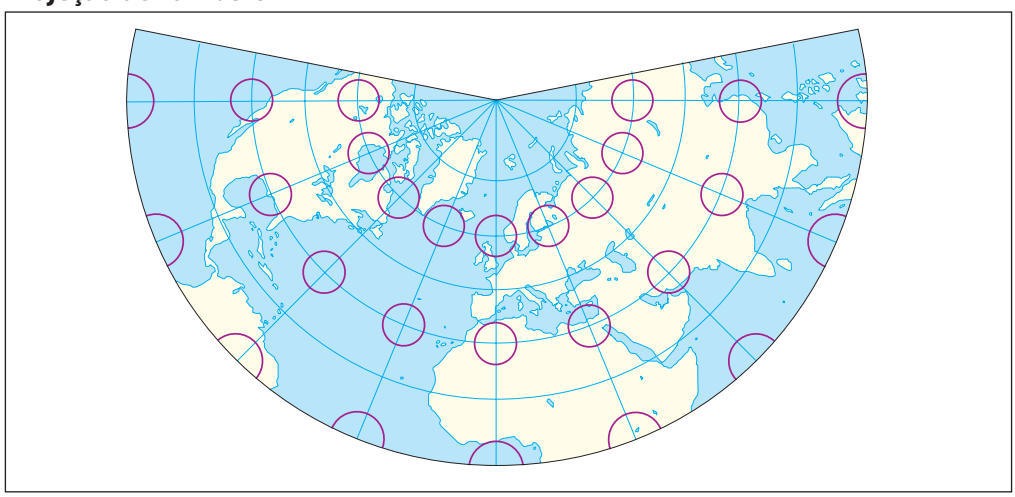
Projeção de Albers



KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: MATHWORKS. *Eqaconic*. 2020. Disponível em: https://www.mathworks.com/help/map/eqaconic.html. Acesso em: 18 ago. 2024.

Projeção de Lambert



KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: MATHWORKS. *Lambertstd*. 2020. Disponível em: https://www.mathworks.com/help/map/lambertstd.html. Acesso em: 18 ago. 2024.

Para o propósito específico de reduzir as deformações de:

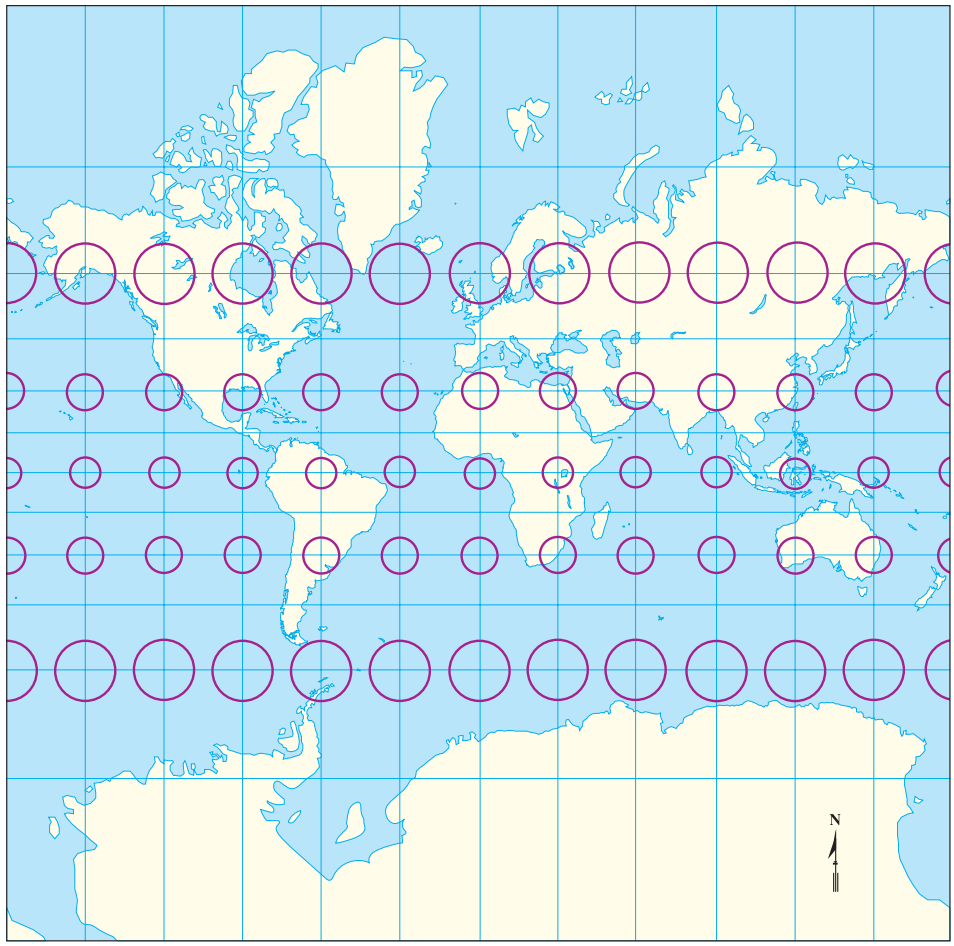
- ângulo, qual é o resultado mais adequado? Resposta: Projeção de Lambert.
- área, qual é o resultado mais adequado? Resposta: Projeção de Albers.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

5. A fim de analisar deformações em algumas projeções, Jonas construiu, utilizando um *software* matemático, algumas representações no plano. Antes de aplicar as projeções, ele indicou algumas circunferências congruentes sobre o globo terrestre.

Professor, professora: Após os estudantes resolverem a tarefa, informe que a projeção utilizada na Projeção **1** é a de Mercator e a utilizada na Projeção **2** é a cônica equidistante.

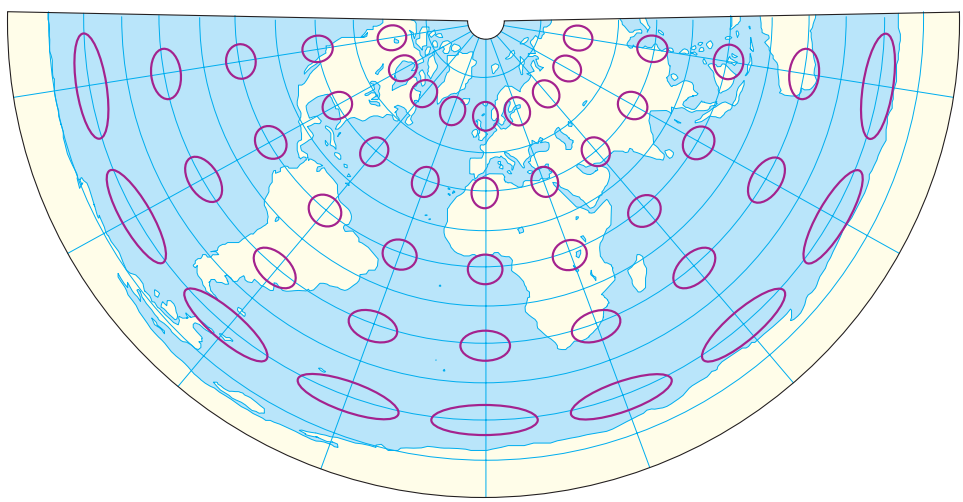
Projeção 1



KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: MATHWORKS. *Mercator*. 2020. Disponível em: https://www.mathworks.com/help/map/mercator.html. Acesso em: 18 ago. 2024.

Projeção 2



KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: MATHWORKS. *Eqdconicstd*. 2020. Disponível em: https://www.mathworks.com/help/map/eqdconicstd.html. Acesso em: 18 ago. 2024.

a) Classifique as projeções aplicadas por Jonas quanto à superfície adotada.

Resposta: Projeção **1**: Projeção cilíndrica; Projeção **2**: Projeção cônica.

b) Entre as projeções aplicadas, alguma delas apresenta deformação de ângulo? E de área?

Resposta: Apenas a projeção **2** apresenta deformação de ângulo. Ambas as projeções apresentam deformação de área.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Comparando áreas de países

Com o auxílio de recursos tecnológicos, é possível analisar as deformações de ângulos e de áreas sofridas na construção de mapas. Com o aplicativo disponível no *site The true size*, por exemplo, é possível obter a representação de um país em diferentes posições do mapa, permitindo, em alguns casos, a comparação de área.

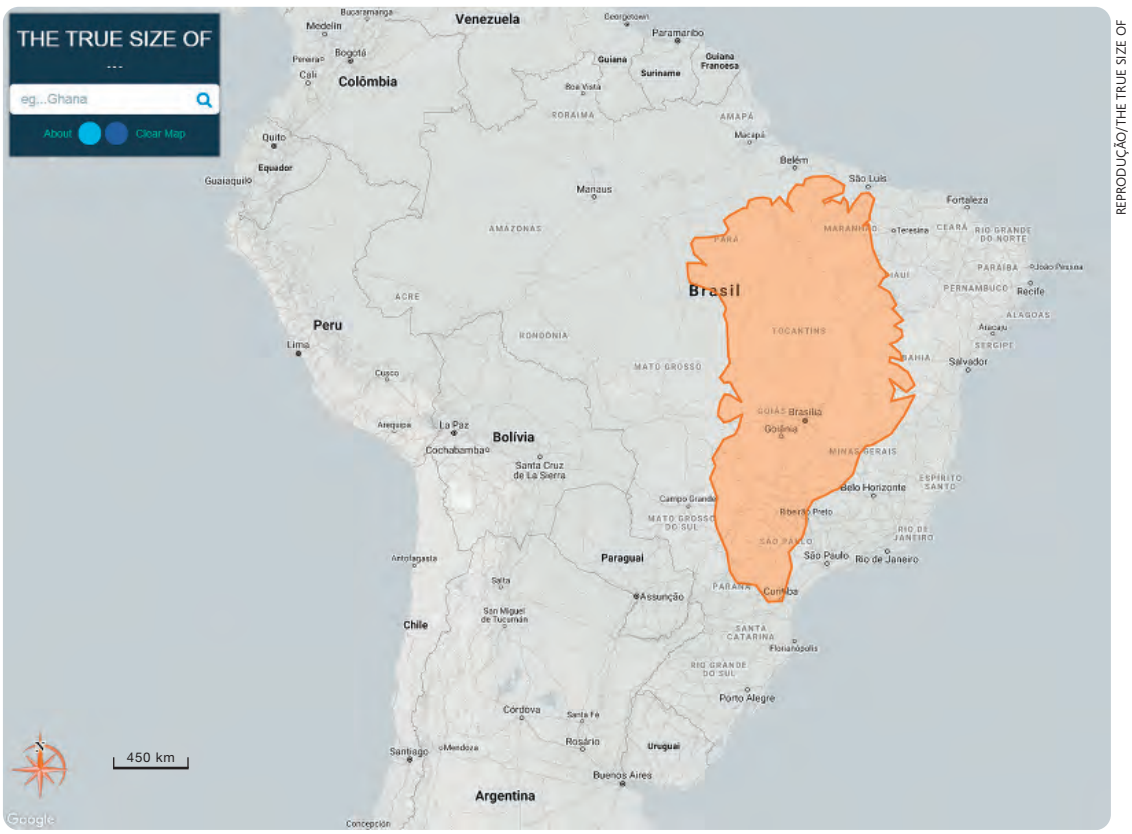
Vamos comparar as áreas do Brasil e da Groenlândia.

A. No campo de pesquisa, digite o nome de um país, nesse caso, *Greenland*. Em seguida, pressione **Enter**.

Observação

Devido ao fato de o *site* indicado ser em inglês, os nomes dos países a serem pesquisados também devem estar em inglês, como é o caso da Groenlândia, cujo nome digitado foi *Greenland*.

B. Clique sobre a região destacada e "arraste-a", de maneira que fique sobre a representação do Brasil.



REPRODUÇÃO/THE TRUE SIZE OF

Professor, professora: Explique aos estudantes que a tradução de *The true size of* é "O tamanho real de".

Como havíamos dito anteriormente, é possível verificar que a área da Groenlândia é menor do que a do Brasil. Professor, professora: Se os estudantes não tiverem acesso à internet, verifique a possibilidade de levar comparações impressas do *The true size*, geradas pelo *site*, semelhantes à apresentada na seção, para que eles tenham a oportunidade de desenvolver a tarefa **2**.

Agora é sua vez!

1. Resposta: O aplicativo é interativo e mostra o tamanho preciso dos países. Podemos selecioná-los e comparar o tamanho real deles no mapa. Portanto, pode-se dizer que a projeção é equivalente quando permite a utilização da função mover/transportar.

1. A projeção utilizada nesse aplicativo pode ser classificada como equivalente? Justifique sua resposta.

2. De maneira semelhante à apresentada, compare a área de outros países. Em seguida, converse com os colegas e o professor sobre as deformações verificadas. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. Sugestões de resposta: Aplicativos de GPS para se locomover, mapas de cidades para se localizar ou encontrar endereços, planejamento de viagens utilizando mapas de estradas, entre outras situações.

Anote as respostas no caderno.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos e resolvemos situações-problema envolvendo projeções cartográficas. Agora, chegou a hora de refletir sobre seus conhecimentos! Como estratégia de estudos, sugerimos a você que faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

1. Você já conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os.
Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

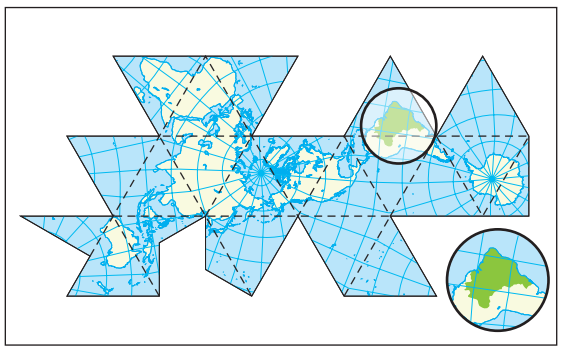
2. Dos tópicos estudados, em quais deles você teve mais dificuldades ou ficou com dúvidas? Reflita sobre isso e, se necessário, retome o que foi estudado. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

Cartografia. | Estudando projeções cartográficas. | Classificação de projeções.

3. Cite pelo menos uma situação do cotidiano na qual utilizamos projeções cartográficas.

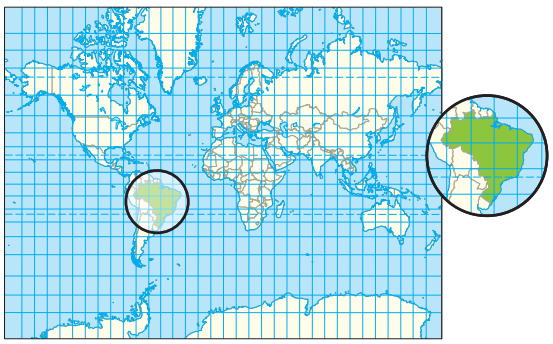
4. Analise a seguir alguns mapas-múndi elaborados historicamente e o destaque para a representação do Brasil.

Projeção de Dymaxion (publicada em 1943)



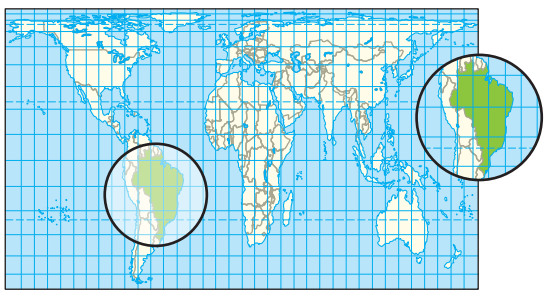
Aumento aproximado de 1,4 vez no destaque em zoom da imagem.

Projeção de Mercator (publicada em 1569)



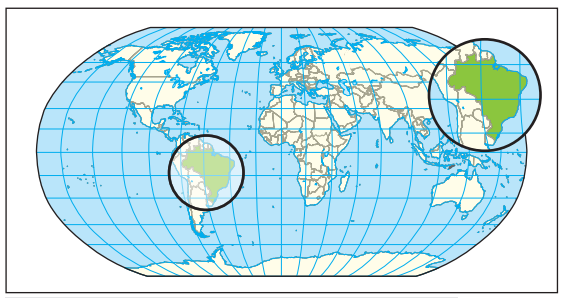
Aumento aproximado de 1,9 vez no destaque em zoom da imagem.

Projeção de Gall-Peters (publicada em 1885)



Aumento aproximado de 1,2 vez no destaque em zoom da imagem.

Projeção de Robinson (publicada em 1963)



Aumento aproximado de 1,5 vez no destaque em zoom da imagem.

Fonte de pesquisa: VAIANO, Bruno. As várias faces da Terra. *Superinteressante*, São Paulo, Abril, ed. 379, ano 31, n. 10, set. 2017. p. 54-59.

Note que o Brasil pode ser representado com formatos e posições diferentes em cada uma das projeções apresentadas, apesar de ainda manter algumas de suas principais características geográficas. Isso acontece em razão da opção feita pelo cartógrafo por preservar áreas, distâncias ou ângulos, dependendo de seu objetivo. Que estratégia você usaria para identificar as semelhanças e as diferenças entre os diversos tipos de mapa apresentados? Sugestão de resposta: Como todos os tipos de mapas mantêm as ligações existentes entre as regiões, o posicionamento dos países e a presença dos oceanos, a estratégia seria analisar cada um deles e dar enfoque às diferentes características.

5. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo esse assunto. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

6. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo. Nela, use desenhos e dê exemplos.
Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

5. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Ação e participação

Esta seção propõe um trabalho articulado com outros componentes curriculares envolvendo objetivos comuns, além da proposta de trabalho em grupo cujo objetivo principal é favorecer o desenvolvimento de habilidades e a compreensão relacionada a alguns assuntos específicos. Por ser um trabalho em grupo, vocês podem pensar em vários questionamentos durante a execução do projeto, organizar as ideias e fazer anotações no caderno. Nesse momento de surgimento de ideias e de planejamentos, é necessária a participação de todos, além de um registro escrito coletivo com as anotações que considerarem mais relevantes.

Um projeto constitui-se em uma proposta de trabalho temporária e única, ou seja, não repetitiva, caracterizada por ter início, meio e fim bem definidos e com objetivo claro e viável.

Professor, professora: A elaboração e a execução bem-sucedida de um projeto interdisciplinar requerem um trabalho devidamente programado entre professores de diversos componentes curriculares e estudantes. Por esse motivo, é importante combinar os momentos de orientação e acompanhamento individual e coletivo com os demais professores envolvidos.



O **tema** para ser trabalhado em um projeto pode surgir de diversas ideias, como a constatação de uma necessidade da comunidade escolar e da comunidade do bairro onde a escola está localizada ou até mesmo um tema de interesse da turma. Dependendo do tema escolhido, vocês precisam estudar mais sobre o assunto antes de seguir com as outras etapas.

Com um tema definido, é o momento de estabelecer os **objetivos** com metas claras que possam ser verificadas ao longo da execução do projeto.

A próxima etapa é o **planejamento**, no qual se define quem vai participar e qual será a responsabilidade de cada um. Todas essas informações devem estar anotadas e ter prazos definidos.

Com base no planejamento, é elaborado um cronograma de acompanhamento, e, em determinadas datas, será necessário verificar se os objetivos estão sendo atingidos até ali e se é preciso alterar algo, fazendo uma correção de rota ou novos alinhamentos.



ILUSTRAÇÕES: FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



Na etapa de planejamento, pode-se tratar também da coleta de informações sobre o tema por meio da consulta de diversas fontes, como preenchimento de formulário, enquete em aplicativo ou o método de entrevistas.

O planejamento precisa prever também como será a apresentação do trabalho, determinando os recursos e as estratégias de apresentação, como *slides*, cartazes, esquemas e até as falas de cada participante, no caso de apresentação presencial ou virtual.

Em seguida, ocorre a etapa de **desenvolvimento**, também denominada implementação ou execução, que é a realização do trabalho seguindo a organização do planejamento. Geralmente, nessa etapa, são necessários alguns ajustes, definidos em momentos de avaliação, a fim de verificar se os objetivos estabelecidos estão sendo alcançados. A data para esses momentos de avaliação já deve estar definida no cronograma de acompanhamento.

Na etapa de desenvolvimento, o recurso definido no planejamento como estratégia de apresentação deve ser detalhado e produzido, e todas as possíveis falas de cada participante devem ser redigidas.

Depois disso, ocorre a **divulgação** do trabalho, na qual se torna público o resultado de todo o projeto. Dependendo do que foi planejado, essa divulgação é feita para a comunidade escolar, mostrando os resultados obtidos, ou nas mídias da escola e em outras plataformas. Por isso, é importante guardar os registros pesquisados e outros de momentos do desenvolvimento, como fotos, vídeos, textos e anotações por escrito.





ILUSTRAÇÕES: FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Todo projeto deve finalizar com a etapa de **avaliação**, na qual são analisados os resultados do trabalho. Nesse momento, seria adequado fazer uma autoavaliação sobre a participação individual, além de uma avaliação coletiva, para verificação do desempenho e da evolução das aprendizagens do conteúdo, inclusive dos diferentes componentes curriculares envolvidos, se houver. Por fim, é importante o professor também apresentar uma avaliação do grupo considerando o convívio social, a participação, a colaboração e o cumprimento de prazos e das metas estabelecidas.

Neste volume, vamos apresentar duas sugestões de projetos com os temas já definidos. Estamos propondo a vocês a realização de cada um deles. Bom trabalho!

Professor, professora: Para que a avaliação e a autoavaliação sejam produtivas, esclareça aos estudantes, sempre no início de um projeto, quais serão os pontos avaliados e os aspectos que se espera desenvolver durante a execução das tarefas. Desse modo, eles podem acompanhar o próprio desempenho e atingir melhores resultados.

Professor, professora: Para a execução deste projeto, será necessário prever 8 aulas.

Projeto A – Empreendedorismo sustentável de comunidades tradicionais

Professor, professora: Comente com os estudantes que o título do projeto reflete a ideia de que, embora essas comunidades desenvolvam negócios para sua subsistência, o que diferencia esses empreendimentos, além da sustentabilidade, é a conexão com a cultura e as tradições locais, diferentemente de negócios comuns, nos quais não necessariamente há um vínculo cultural específico. Os empreendimentos dessas comunidades estão enraizados em práticas e saberes ancestrais, mantendo vivas suas tradições e contribuindo para a preservação de seu modo de vida.

Início de conversa

Em comunidades tradicionais da Amazônia, o empreendedorismo sustentável é uma maneira vital de garantir a subsistência e preservar as tradições locais. Esse tipo de empreendedorismo une a criação e a gestão de negócios ao equilíbrio entre a conservação dos recursos naturais e sua exploração para atender às necessidades humanas. Um exemplo dessa abordagem sustentável é a produção de cacau realizada na comunidade tradicional paraense do município de Acará.

Isaías Gemaque e seu irmão Zeno, moradores da comunidade tradicional do município de Acará, no Pará, trabalham no processo de transformar o cacau em produto. Para conhecer mais sobre essa prática, apresentamos um trecho de uma reportagem sobre o assunto.

Professor, professora: Aproveite as questões do **Início de conversa** para verificar o conhecimento prévio dos estudantes acerca do tema empreendedorismo sustentável de comunidades tradicionais. Verifique se eles já têm informações sobre empresas sustentáveis no Brasil e no mundo. Incentive a participação de todos, permitindo que exponham suas ideias, opiniões e dúvidas, e, se julgar necessário, comente que essas e outras questões serão retomadas durante o desenvolvimento da atividade.

Ribeirinhos da comunidade Acaraçú, no Pará, plantam cacau combinado com outras espécies e geram receita para moradores

[...] Professor, professora: Se julgar necessário, retome o conceito de "receita" com os estudantes, relembrando noções de finanças e orçamento.

O maior volume da produção de amêndoas de Zeno vai para compradores de fora do Pará. Mas, uma parte é deixada ali mesmo, num trapiche de madeira, pronta para ser recolhida por Valdirena Souza, 46, mãe de Isabela. Valdirena é uma das Guardiãs do Cacau, grupo de oito mulheres que prepara e vende o chocolate "Acaraçú", que carrega o nome daquela comunidade, distante cerca de cem quilômetros de Belém, dentro dos limites do município do Acará. Nas prateleiras de lojas de artigos naturais ou mesmo em restaurantes sofisticados em capitais como São Paulo, Rio de Janeiro e Belo Horizonte, o chocolate "Acaraçú" – em barras de 20 gramas artesanalmente embaladas – pode parecer apenas mais um produto da Amazônia, como tantos outros. Mas, é mais do que isso. O chocolate do Acará é um pequeno exemplo de resistência ao caminho mais fácil e rápido para gerar renda na região: a **monocultura**, mesmo a de produtos locais, como o açaí.



ALEXEI LOGVINOVICH/SHUTTERSTOCK

Grãos de cacau.

Monocultura: prática agrícola que consiste no cultivo intensivo de uma única espécie de planta em uma área extensa.

A iniciativa representa uma resposta local aos impactos causados ao meio ambiente pela produção intensa de açaí dos últimos anos, garantindo renda com a floresta em pé. "A gente diz que quem compra uma barra dessa [de chocolate] não está comprando só um chocolate. Está ajudando a manter a Amazônia viva, a sustentabilidade da floresta e das famílias que estão aqui", afirma Valdirena Souza.

[...] a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam de acordo com seus conhecimentos prévios. Eles podem comentar, por exemplo, que associam os produtos sustentáveis às práticas de produção que respeitam o meio ambiente, envolvendo desde o processo de colheita ou extração de matéria-prima até o uso de embalagens recicláveis.

NARDIN, Daniel. Ribeirinhos da comunidade Acaraçú, no Pará, plantam cacau combinado com outras espécies e geram receita para moradores. *Amazônia Vox*. Disponível em: https://amazoniavox.com/guardioesdoacaracu. Acesso em: 28 out. 2024.

b) Resposta: A produção do Acaraçú é feita por meio da plantação de cacau combinada com a de outras espécies, diferentemente do que ocorre nas plantações de monocultura, prática que consiste no plantio e cultivo de apenas uma espécie por extensão. Espera-se que os estudantes identifiquem que o chocolate Acaraçú é um exemplo de resistência à monocultura.

a) O chocolate Acaraçú, produzido pela comunidade tradicional de mesmo nome, é um produto sustentável. O que você sabe sobre esse tipo de produto?

b) O texto destaca o chocolate da comunidade Acaraçú como uma resistência ao caminho mais fácil e rápido para gerar renda na região. Qual é esse caminho e por que a produção desse chocolate é alternativa a ele?

c) De acordo com o texto, as mulheres que preparam e vendem o chocolate Acaraçú são Guardiãs do Cacau. Em sua opinião, por que elas recebem esse nome?

c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que as mulheres que preparam e vendem o chocolate são assim chamadas porque desempenham um papel importante na preservação do meio ambiente e na manutenção das práticas tradicionais de cultivo de suas comunidades, ajudando a proteger a floresta e o cacau.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Em ação

Professor, professora: Para orientar os estudantes na produção do *podcast*, comente que há aplicativos gratuitos que auxiliam o processo de gravação de episódios. Por meio desses aplicativos, eles podem encontrar informações e dicas sobre ferramentas de edição de áudio.

Neste projeto, com a orientação do professor, você e seus colegas criarão episódios de *podcast* sobre povos e comunidades tradicionais que desenvolvem o empreendedorismo sustentável. Para isso, precisam incialmente compreender quem são esses povos e comunidades e conhecer suas práticas e seus modos de vida. Conversem sobre as opções de ferramentas que podem ajudar a realizar a gravação dos episódios e definam em conjunto como será o processo para desenvolver esses áudios.

Professor, professora: Ao desenvolver este projeto com os estudantes, é possível estabelecer uma relação entre os componentes **Matemática**, **Geografia**, **História** e **Arte**. Com **Geografia**, a relação ocorre por meio da exploração de práticas sustentáveis realizadas ou inspiradas por comunidades tradicionais; com **História**, por meio do contexto histórico de resistência desses povos e comunidades tradicionais, principalmente no que diz respeito ao direito aos seus territórios; com **Arte**, pela cultura de artesanato desenvolvida pelos povos e pelas comunidades tradicionais.

Pesquisando mais sobre o tema

A produção em pequena escala realizada por comunidades tradicionais como a de Acaraçú, citada no início desta seção, ao combinar o cultivo de cacau com o de outras espécies, preserva o solo e a biodiversidade local. Esse método evita os problemas associados à monocultura e promove um equilíbrio ambiental e uma economia sustentável. Essa prática difere do cultivo extensivo de uma única espécie, que pode causar sérios problemas ambientais, como desmatamento, queimadas, uso excessivo de agrotóxicos e empobrecimento do solo.



LUCIOLA ZVARICK/PULSAR IMAGENS

Indígena da etnia Mehinako, da aldeia Uyapiyuku, confeccionando bancos de madeira no formato de animais, em Gaúcha do Norte (MT), em 2022.

Os **pantaneiros** são habitantes de comunidades tradicionais que vivem no Pantanal, bioma localizado principalmente no Brasil, mas que também se estende até a Bolívia e o Paraguai. Por viverem em um ambiente com o predomínio de campos alagados e pastagens, essas comunidades têm muito conhecimento sobre o ciclo das cheias e da seca, e suas atividades econômicas estão fortemente ligadas à agricultura e à pecuária.

A sustentabilidade está presente em muitas práticas e produtos desenvolvidos pelas comunidades do Pantanal, como itens de artesanato e de arte.

Em algumas fazendas da região, o manejo sustentável inclui práticas como a rotação e adubação natural das pastagens e a criação de corredores ecológicos ao longo dos rios para conservar os recursos hídricos.

Professor, professora: Comente com os estudantes que as atividades extrativistas podem ser categorizadas em extrativismo animal, mineral e vegetal. A madeira, o babaçu e as castanhas são exemplos de recursos obtidos por meio do extrativismo vegetal.

Essa abordagem sustentável também se reflete nos produtos desenvolvidos localmente. Frutos, madeira e fibras são utilizados para a criação de produtos alimentícios e artesanatos.

Os **seringueiros** são trabalhadores extrativistas que obtêm o látex da árvore seringueira para produzir borracha natural, uma prática tradicional nas regiões Norte e Nordeste do Brasil.

Essa prática é considerada sustentável porque o látex é coletado sem que seja necessário derrubar árvores, de modo que elas continuam crescendo e regenerando o meio ambiente ao redor. Assim, as famílias obtêm renda sem degradar o meio ambiente, preservando a biodiversidade e promovendo a regeneração dos recursos naturais.



PAULO PRETO/SHUTTERSTOCK

Extração de látex de uma seringueira.

Professor, professora: Ao iniciar o trabalho com este projeto, verifique se os estudantes reconhecem seus principais objetivos, que são: conhecer alguns processos sustentáveis realizados por povos e comunidades tradicionais; compreender como práticas e modos de vida tradicionais podem gerar renda e favorecer as famílias dessas comunidades; produzir episódios de *podcast* com informações sobre empreendedorismo sustentável desenvolvido por essas comunidades; divulgar exemplos desses negócios para a comunidade escolar e local do estudante.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Professor, professora: Se julgar conveniente, solicite aos estudantes que pesquisem o contexto histórico de resistência dos povos e comunidades tradicionais em sua luta para preservar as florestas e manter seus territórios e reflitam sobre o assunto.

Muitas das reservas usadas pelos seringueiros são áreas de florestas protegidas por lei e cedidas a comunidades tradicionais que mantêm atividades extrativistas como o principal meio de subsistência. Vários produtos são feitos utilizando o látex obtido pelo trabalho desses povos, como seringas, cápsulas, luvas cirúrgicas, calçados, brinquedos, chupetas e utensílios de borracha para uso doméstico.

Os **quilombolas** são descendentes de escravizados que fugiram das condições de opressão vividas no período colonial e se refugiaram em áreas remotas. Essas comunidades se espalharam por todo o país, com presença mais expressiva na região Nordeste. Os quilombolas preservam uma rica herança cultural que combina influências africanas, indígenas e europeias. Suas práticas tradicionais, como a agricultura de subsistência e a utilização sustentável de recursos naturais, refletem o respeito pelo meio ambiente e a profunda relação que nutrem com a terra que habitam. Cada quilombo mantém tradições que evidenciam sua resistência e adaptação ao longo dos anos e que contribuem para a formação da identidade do Brasil.



CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

Escultor quilombola da Comunidade Muquém, composta de remanescentes do Quilombo dos Palmares, com algumas de suas peças de cerâmica, em Alagoas, em 2022.

O artesanato quilombola reflete as particularidades de cada comunidade. Os materiais utilizados variam e podem incluir elementos como crochê, bordado e tricô, recursos naturais como bambu, capim, madeira, barro, capim dourado, taquara, palha de milho, fibra de bananeira, canela e piaçava.

Professor, professora: Para auxiliar os estudantes na etapa de pesquisa, sugira alguns *sites* que apresentam conteúdos sobre os povos e as comunidades tradicionais. Algumas sugestões são: Museu vivo dos povos tradicionais – MG, disponível em: https://museuvivodospovosmg.com.br/; Cadeias de valor sustentáveis, disponível em: https://cadeiasdevalorsustentaveis.org.br/; Instituto Homem Pantaneiro, disponível em: https://institutohomempantaneiro.org.br/; Rede Cerrado, disponível em: https://redecerrado.org.br/. Acessos em: 26 out. 2024.



CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

Pescadores empurrando barco após pescaria na Praia do Prumirim, em Ubatuba (SP), em 2024.

Os **povos ribeirinhos** vivem próximo aos rios e baseiam sua sobrevivência na pesca artesanal e na coleta de recursos naturais. Uma das práticas sustentáveis adotadas por essas comunidades é a pesca de manejo sustentável, realizada de modo a preservar os estoques pesqueiros e manter o equilíbrio ecológico dos rios. Isso é feito por meio de várias estratégias, sendo uma delas a proibição de pesca durante a época reprodutiva dos peixes.

Famílias ribeirinhas utilizam a biodiversidade local de forma responsável, confeccionando artesanatos com matérias-primas como madeira, sementes de açaí e de morototó, fibras de banana e de palmeira bacaba, palha de tucumã, pedras e cipós coletados na floresta. Esses materiais são transformados em produtos variados, como utensílios domésticos, bolsas, chapéus, cestos, redes, entre outros produtos.

Você já reparou que, além das práticas sustentáveis, as comunidades e os povos tradicionais têm algo em comum? Eles compartilham uma profunda conexão com o local onde vivem. Agora que você conheceu um pouco sobre essas comunidades, pesquise como o empreendedorismo sustentável é desenvolvido por esses e outros grupos tradicionais.

Professor, professora: Comente com os estudantes que as comunidades quilombolas enfrentam diversos desafios para garantir seus direitos territoriais e culturais. Muitos ainda lutam para obter o reconhecimento oficial de suas terras, tendo que enfrentar conflitos com proprietários de terras e interesses econômicos que os ameaçam. Além disso, essas comunidades são mais vulneráveis a problemas de infraestrutura básica, como acesso a água potável, educação e saúde.

Planejamento

Organizem-se em grupos. Cada grupo deverá pesquisar informações sobre empreendedorismo sustentável desenvolvido por um povo ou por uma comunidade tradicional.

Professor, professora: Além das diversas etnias de povos indígenas, existem atualmente 27 tipos de povos e comunidades tradicionais no Brasil, reconhecidos oficialmente pela Política Nacional de Desenvolvimento Sustentável dos Povos e Comunidades Tradicionais (PNPCT) em 2007 e pelo Conselho Nacional dos Povos e Comunidades Tradicionais (CNPCT) em 2019.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Cada grupo deve criar um episódio de *podcast* com duração entre 5 e 10 minutos. O episódio deve incluir:

- **Apresentação**: introduzam o povo ou a comunidade tradicional escolhido, contextualizando sua cultura e seu modo de vida.
- **Temática comum**: expliquem as práticas e técnicas sustentáveis desenvolvidas pela comunidade e como esse empreendedorismo contribui para o seu desenvolvimento sustentável.
- **Título**: padronizem os títulos de cada episódio, incluindo o produto ou serviço realizado e o nome da comunidade, por exemplo: Episódio 1 – O pirarucu de manejo sustentável da comunidade Lago Serrado, de Carauari, Amazonas.

Definam as tarefas das quais se ocupará cada integrante do grupo. Vocês podem variar os narradores entre os integrantes. As etapas de realização incluem: pesquisa, elaboração de roteiro, produção, ensaio, gravação, edição de áudio e publicação.

Escolham, em conjunto, um nome representativo para o *podcast* e uma arte para ser o logotipo. Publiquem os episódios na página da escola ou em um *site* criado especialmente para o projeto. Antes da publicação, encaminhem os áudios ao professor responsável, para eventuais ajustes.

Desenvolvimento

Com o planejamento definido, sigam para a produção. É importante que as funções estejam definidas, que cada um faça a sua parte e que todos sigam um cronograma. Utilizem fontes confiáveis e, se precisarem de ajuda, consultem os professores de Geografia, História e Arte.

Se houver povos tradicionais na região em que moram, agendem entrevistas e preparem perguntas sobre as práticas sustentáveis desenvolvidas por eles. Programem as entrevistas com antecedência, evitem atrasos e usem gravadores de celulares ou aplicativos de mensagem para as gravações.

Divulgação

Organizem um cronograma para publicar os episódios na página escolar ou no *site* do projeto. A turma pode decidir em conjunto a frequência de postagem e o responsável pelas publicações.

Para divulgar o trabalho, vocês podem encaminhar a página de publicação dos episódios a amigos e familiares.

Professor, professora: Se houver a possibilidade de realizar e gravar uma entrevista com algum morador de comunidade tradicional que desenvolva um empreendimento sustentável, oriente os estudantes a organizar as perguntas a serem feitas de modo a contemplar os itens já citados na página: a apresentação e a temática. Nesse sentido, as perguntas elaboradas conduzirão o entrevistado a responder sobre seu povo, sua cultura e seus modos de vida, além da relação da sustentabilidade com o trabalho que realiza. Enfatize a importância de ser atencioso com o entrevistado, respeitando sua fala e propondo questões que não ofendam as tradições de sua comunidade.



MARTIN ZUBRIA PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK

Pessoas ouvindo um *podcast*.

Avaliação e reflexão

Com os professores e os colegas, reflitam sobre o processo de elaboração dos episódios, avaliando os pontos positivos e negativos, o que foi aprendido em cada etapa e o que pode ser melhorado. Para essa conversa, vocês podem seguir os tópicos listados a seguir.

- Dedicação na realização da preparação e apresentação do episódio.
- Participação no planejamento e na execução de tarefas propostas.
- Cumprimento de prazos.
- Observação de pontos positivos e negativos do processo.
- Melhorias para futuras atividades semelhantes.
- Análise dos resultados obtidos para verificar se foram satisfatórios.

Professor, professora: Enfatize a importância de aproveitar esse momento para verificar se os objetivos propostos pelos estudantes foram alcançados, se as estratégias adotadas e as decisões tomadas pelo grupo foram as mais adequadas e quais mudanças podem ser feitas para obter um resultado mais produtivo nos próximos projetos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Projeto B – Saúde e segurança no trabalho

Início de conversa

Professor, professora: Aproveite as questões do **Início de conversa** para verificar o conhecimento prévio dos estudantes acerca do tema Saúde e segurança no trabalho questionando se eles sabem quais são as profissões consideradas de alto risco de periculosidade e se conhecem alguém que exerce alguma delas. Incentive a participação de todos, permitindo que exponham suas ideias, opiniões e dúvidas, e, se julgar necessário, comente que essas e outras questões serão retomadas durante o desenvolvimento da atividade.

Leia a reportagem a seguir e responda às questões.

Quase 16 mil morreram em acidentes de trabalho em sete anos

[...] Professor, professora: Para a execução deste projeto, será necessário prever 8 aulas.

Dados do Anuário Estatístico de Acidentes do Trabalho mostram que 15,9 mil pessoas morreram no Brasil em acidentes do trabalho de 2016 a 2022. Segundo o levantamento, houve um aumento de 25,4% nos óbitos no período: saltaram de 2 265, em 2016, para 2 842, em 2022 – o último ano com dados consolidados.

O diretor de Conhecimento e Tecnologia da Fundação Jorge Duprat Figueiredo de Segurança e Medicina do Trabalho (Fundacentro), Remígio Todeschini, ressalta que os números consideram apenas as mortes de trabalhadores com carteira assinada.

a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam de acordo com seus conhecimentos prévios. Eles podem mencionar diversas profissões, como a de bombeiro, minerador, trabalhador da construção civil e as respectivas atividades realizadas em cada uma delas. Para os EPIs, podem citar capacete, óculos, luvas, botas, entre outros itens de proteção.

[...]

BEZERRA, Antônio Luiz Moreira. Quase 16 mil morreram em acidentes de trabalho em sete anos. *Alepi*, 9 abr. 2024. Disponível em: https://www.al.pi.leg.br/tv/noticias-tv-1/brasil-quase-16-mil-morreram-em-acidentes-de-trabalho-em-sete-anos. Acesso em: 28 out. 2024.

a) Você conhece profissões em que os riscos de acidente de trabalho são altos? Pesquise algumas delas e identifique as seguintes informações: principais atividades realizadas nesse ofício e equipamentos de proteção individual (EPIs) obrigatórios para esses profissionais.

b) Considerando que os dados disponíveis sobre as mortes em acidentes de trabalho citados no texto abrangem apenas os trabalhadores com carteira assinada, como a inclusão de trabalhadores informais poderia afetar esses números?

c) O que poderia ser feito para reduzir o número de óbitos por acidentes de trabalho e melhorar as condições trabalhistas, especialmente em setores nos quais os acidentes são mais frequentes?

Em ação

Professor, professora: Ao iniciar o trabalho com este projeto, verifique se os estudantes identificam seus principais objetivos, que são: compreender o que é uma profissão de alto risco; reconhecer a importância dessas profissões e dos cuidados que esses profissionais precisam ter na execução de suas funções; conhecer os equipamentos de proteção individual (EPIs) obrigatórios; produzir uma feira para divulgar informações sobre segurança no trabalho em determinadas profissões, gerando conscientização na comunidade escolar.

Algumas profissões apresentam riscos elevados para a saúde dos trabalhadores e, por isso, exigem o uso de equipamentos de segurança específicos. Para compensar a periculosidade, os profissionais podem receber adicionais salariais, e as condições de trabalho, como carga horária e tempo para aposentadoria, podem ser diferentes de outras profissões.

Neste projeto, você e seus colegas vão organizar e executar uma feira sobre segurança no trabalho. O evento tem como objetivo informar a comunidade escolar e seus familiares sobre os riscos associados a diferentes profissões, os cuidados necessários e os equipamentos de proteção individual (EPIs) obrigatórios, gerando conscientização sobre a importância da segurança no trabalho e os aspectos globais da saúde do trabalhador.

c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reconheçam que, para reduzir os acidentes e as mortes relacionados ao trabalho, é preciso melhorar as condições físicas e ambientais de trabalho. Eles podem citar que reforçar normas de segurança, garantir a obrigatoriedade do uso de equipamentos de proteção individual (EPIs), adotar procedimentos seguros específicos para cada tipo de trabalho, inspeções regulares aos espaços de trabalho, campanhas de conscientização e de incentivo à notificação de acidentes são algumas atitudes que reduziriam essas mortes.

Pesquisando mais sobre o tema

A noção global de saúde envolve o equilíbrio entre a saúde mental e a saúde física. Para garantir a segurança no trabalho, é essencial considerar não apenas os riscos físicos, mas também os impactos sobre a saúde mental dos trabalhadores. Problemas como estresse, depressão e ansiedade são comuns em ambientes de trabalho com forte pressão e condições adversas.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que a inclusão de trabalhadores informais provavelmente aumentaria o número total de mortes registradas, pois muitos acidentes e mortes podem não ser reportados ou contabilizados nesses casos. Desse modo, eles devem reconhecer que os números reais sobre mortalidade em acidentes trabalhistas são ainda maiores.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Já os riscos físicos, geralmente, ocorrem em profissões cuja atividade pode envolver o manuseio de substâncias contaminadas, inflamáveis, radioativas ou explosivas, em profissões com exposição à violência física ou com riscos de vida. Esses fatores podem resultar em acidentes graves e problemas de saúde a longo prazo. É importante estar atento aos sinais de esgotamento mental e outros problemas de saúde mental relacionados ao trabalho, além de ser capaz de reconhecer os sinais de estresse e cansaço. Essas ações servem para prevenir adoecimentos mais graves e garantir um ambiente de trabalho saudável.

Segundo o Ministério do Trabalho e Emprego (MTE), entre as profissões de risco podemos citar motoristas de caminhão, bombeiros, policiais, trabalhadores da construção civil, eletricistas, limpadores de vidraças, pintores externos, técnicos de radiologia, agentes penitenciários, mineiros e mergulhadores.

Vamos conhecer um pouco mais sobre algumas dessas profissões e os riscos que esses profissionais enfrentam diariamente.

Os **motoristas de caminhão** enfrentam diversos riscos no dia a dia, como os acidentes de trânsito, que podem ocorrer devido a longas jornadas, fadiga e condições precárias das estradas.

JOA SOUZA/SHUTTERSTOCK



Caminhões em trânsito passando por trecho da rodovia no município de Jaguaquara (BA), em 2022.

A exposição a poluentes e o levantamento de cargas pesadas também influenciam a rotina desses trabalhadores. Esses fatores não apenas aumentam o risco de acidentes graves, mas podem resultar em problemas de saúde como lesões nas costas, problemas respiratórios e transtornos relacionados ao estresse.

Os **bombeiros** são treinados para enfrentar situações extremas e perigosas, como incêndios, desabamentos, enchentes e resgates em ambientes hostis. Entre os riscos a que se submetem estão a exposição a altas temperaturas, fumaça tóxica e substâncias químicas. Além disso, o trabalho físico intenso e as situações de alta pressão podem causar estresse significativo.

Nos casos de situações emergenciais, enquanto a população é conduzida a locais seguros, os bombeiros atuam indo ao encontro do perigo, a fim de resgatar pessoas e controlar os riscos.

THOMAZ VITA NETO/PULSAR IMAGENS



Professor, professora: Ao desenvolver este projeto com os estudantes, é possível estabelecer uma relação entre **Matemática**, **História** e **Biologia**. Com o componente **História**, é oportuno abordar o contexto histórico da conquista de direitos trabalhistas. Com relação à **Biologia**, informações sobre os cuidados com a saúde física e mental dos profissionais podem ser trabalhadas.

Bombeiros, com auxílio de cão farejador, fazendo busca por desaparecidos após deslizamento de terra causado por fortes chuvas, no bairro Alto da Serra, município de Itu (SP), em 2022.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Pedreiros, serventes, eletricistas, encanadores, engenheiros e arquitetos são alguns dos **trabalhadores da construção civil**.

Eles enfrentam os mais variados riscos, incluindo queda de grandes alturas, descargas elétricas, acidentes no manejo de máquinas e equipamentos, problemas respiratórios devido à inalação de poeira, problemas auditivos por conta do ruído excessivo e contusões. Sendo assim, é necessário orientar esses profissionais quanto ao uso de EPIS, a fim de amenizar o risco de acidentes, como capacetes, luvas, máscaras, óculos e cintos de segurança.

Professor, professora: Comente com os estudantes que os trabalhadores informais frequentemente enfrentam mais fragilidade em relação à segurança no trabalho. Sem proteção adequada e regulamentações claras, esses trabalhadores estão mais expostos a riscos e acidentes, o que destaca a necessidade urgente de políticas e práticas de segurança mais rigorosas para todos os tipos de emprego.



JOA SOUZA/SHUTTERSTOCK

Trabalhador executando uma etapa da obra na construção de uma escola pública da cidade de Salvador (BA), em 2022.

Limpadores de vidraças e **pintores de paredes externas** enfrentam riscos relacionados ao trabalho em altura, como quedas de andaimes ou escadas.

Esses profissionais também estão expostos a riscos relacionados a condições climáticas adversas, como insolação, e a intoxicação pelo contato com produtos químicos usados na limpeza e na pintura. Por esse motivo, é importante que eles usem EPIS, como capacetes, luvas e cintos de segurança.



CASA.DA.PHOTO/SHUTTERSTOCK

Trabalhador efetuando limpeza da vidraça externa de um edifício comercial de São Paulo, em 2024.

Professor, professora: Informe aos estudantes que os técnicos de radiologia lidam com substâncias radioativas que podem ser prejudiciais à saúde. No entanto, os avanços tecnológicos melhoraram a segurança, com equipamentos de proteção mais eficazes. Além disso, esses profissionais têm uma carga horária reduzida, trabalhando apenas 4 horas diárias. O período de férias também é diferenciado de outras profissões.

Os **técnicos de radiologia** trabalham com equipamentos de imagem médica que emitem radiação. São eles os profissionais responsáveis pelo exame de raio-X. Embora estejam protegidos por medidas de segurança, a exposição prolongada pode representar riscos para a saúde, como câncer, esterilidade e problemas de visão.



DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Paciente sendo preparado pelo técnico de radiologia para ser submetido a exame de raio-X, em Parnamirim (RN), em 2024.

Além desses profissionais, muitos outros também enfrentam riscos diretos ou indiretos durante o desempenho de seu trabalho, como mineradores e mergulhadores. Garantir direitos trabalhistas que proporcionem segurança no trabalho propicia uma proteção adequada para minimizar esses riscos e promover um ambiente mais seguro para todos.

Professor, professora: Mencione outras profissões que também correm riscos em suas jornadas de trabalho. Os profissionais da saúde, por exemplo, podem estar expostos a vírus e doenças. Já os trabalhadores em plataformas de petróleo podem estar expostos a incêndios e explosões, além de ventos fortes, temperaturas extremas, chuvas intensas e ondas altas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Planejamento

Em grupos, pesquisem informações sobre uma profissão de alto risco. Cada grupo deve criar cartazes ou *slides* para realizar a apresentação que fará parte da feira.

- **Divisão de tarefas**: listem as tarefas necessárias para a realização da atividade e as distribuam entre os integrantes do grupo.
- **Pesquisa**: cada estudante deve pesquisar um aspecto da profissão escolhida: quais são as atividades desenvolvidas nessa profissão; os riscos envolvidos; as medidas de segurança.
- **Preparação da apresentação**: decidam como as informações serão apresentadas. Vocês podem optar por cartazes produzidos em cartolina ou apresentação digital por meio de *slides*.
- **Palestra**: considerem convidar um técnico de segurança do trabalho para dar uma palestra. Ele poderá esclarecer dúvidas sobre cuidados específicos de cada profissão, o uso de equipamentos de proteção e medidas para evitar acidentes.
- **Participação e apresentação**: todos os integrantes do grupo devem se envolver na pesquisa e na preparação da apresentação. Juntos, elaborem um roteiro de fala e organizem um cronograma para que todos os integrantes participem da apresentação da feira aos visitantes.
- **Administração**: definam com o professor e a direção da escola os espaços que serão destinados aos cartazes e os equipamentos necessários para a projeção dos *slides*.
- **Registro**: documentem as atividades desenvolvidas pelo grupo por meio de fotos e vídeos dos encontros e das tarefas executadas em cada etapa para apresentarem na divulgação.

Desenvolvimento

Professor, professora: Comente com os estudantes que, caso decidam convidar um técnico de segurança para palestrar, o convite deve ser formalizado e realizado pelo professor ou outros profissionais administrativos da escola.

No dia da feira, exponham os cartazes nos locais combinados e, para aqueles que prepararam apresentações digitais, certifiquem-se de que o projetor ou os outros dispositivos estejam funcionando e aptos a projetar os *slides*.

Recebam os visitantes da feira e apresentem as informações sobre a profissão de risco pesquisada pelo grupo. Expliquem os principais pontos do trabalho de forma clara, disponibilizando-se a sanar as dúvidas que surgirem.

Divulgação

Antes da feira, divulguem o evento por meio de convites. Utilizem as redes sociais da escola e comuniquem a comunidade escolar e os familiares dos estudantes.

Solicitem previamente aos responsáveis da escola a reserva de espaços para a exposição dos cartazes e para as projeções. Além disso, peçam autorização para expor os convites para a feira em murais e outros locais, inclusive fora do ambiente escolar.

Durante a feira, registrem os trabalhos com fotos e vídeos e depois publiquem nas redes sociais da escola. Compartilhem também o progresso das etapas do trabalho desenvolvido pelos grupos.



ADRIANO KIRIHARA/PULSAR IMAGENS

Momento de exposição de trabalhos dos estudantes para a comunidade em uma quadra escolar, em 2024.

Avaliação e reflexão

Com os colegas do seu grupo de trabalho, reflitam sobre o processo de elaboração da atividade, avaliando os pontos positivos e negativos, o que foi aprendido em cada etapa e o que pode ser melhorado. Para essa conversa, vocês podem seguir os tópicos:

- Dedicação na realização de cada etapa da atividade.
- Participação no planejamento e na execução de tarefas individuais e coletivas.
- Cumprimento de tarefas e prazos.
- Observação de pontos positivos e negativos do processo.
- Melhorias para futuras atividades semelhantes.
- Análise dos resultados obtidos para verificar se foram satisfatórios.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

AMPLIANDO SEUS CONHECIMENTOS

Nesta seção, apresentamos as referências complementares com sugestões de materiais que propiciam a melhor compreensão dos conceitos trabalhados em sala de aula. Esses recursos envolvem conteúdos que, de maneira geral, abordam a Matemática e suas Tecnologias de forma lúdica, curiosa e interessante.

21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo

SOUZA, Maria Helena. *21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo*. São Paulo: Planeta, 2018.

O livro explora a importância de diversos teoremas matemáticos ao longo da história, destacando seu impacto na Ciência, Tecnologia e sociedade.

50 ideias de matemática que você precisa conhecer

CRILLY, Tony. *50 ideias de matemática que você precisa conhecer*. 2. ed. São Paulo: Planeta de Livros Brasil, 2022.

No livro, cada ideia é explicada de maneira clara e acompanhada de exemplos práticos, mostrando como a Matemática está presente em diversos aspectos da vida cotidiana.

Almanaque das curiosidades matemáticas

STEWART, Ian. *Almanaque das curiosidades matemáticas*. Tradução: Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

Nesse livro, o autor usa casos notáveis e curiosos da Matemática para simplificar temas complexos, abordando-os de maneira divertida e transformando-os em deliciosas narrativas, com genialidade e bom humor.

A matemática das coisas

CRATO, Nuno. *A matemática das coisas*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O livro enfatiza a importância da Matemática na vida do ser humano, como o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento.

A origem africana da matemática

TODÃO, Jefferson dos Santos. *A origem africana da matemática*. Ilustrações: Felipe Domingos. São Paulo: Ananse, 2024.

O autor desse livro convida o leitor a conhecer aspectos da história da Matemática e a desvendar os caminhos de racismo científico camuflados nos tradicionais ensinamentos históricos. Por meio de sua narrativa, ele explora a influência fundamental das civilizações africanas no desenvolvimento do conhecimento humano e a rica herança científica e cultural de países como África do Sul, República Democrática do Congo, Mali, Líbia e, principalmente, da região de Kemet, no Egito.

A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática

GARBI, Gilberto G. *A rainha das ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

Nesse livro, há o relato de quatro milênios da história da Matemática, apresentado de maneira simples e compreensível.

Artes da matemática: pensamento computacional e mídias

ROCHA, Luiz Felipe. *Artes da matemática*: pensamento computacional e mídias. Belo Horizonte: Editora da UFMG, 2021.

Esse livro explora as conexões entre Matemática, Pensamento computacional e Mídias digitais. Por meio de exemplos práticos e teóricos, o autor discute como a Matemática pode ser aplicada de forma criativa na era digital, incentivando o desenvolvimento de habilidades analíticas e computacionais.

As leis do acaso: como a probabilidade pode nos ajudar a compreender a incerteza

MATTHEWS, Robert. *As leis do acaso*: como a probabilidade pode nos ajudar a compreender a incerteza. Tradução: George Schlesinger. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2017.

Com uma abordagem clara para não especialistas, o autor desse livro apresenta aplicações práticas que envolvem leis da probabilidade, mostrando que é possível enfrentar o acaso, embora não possamos jamais nos livrar dele. Entre os assuntos abordados estão: como entender e até mesmo prever coincidências; se apólices de seguro valem a pena; por que predições de "especialistas" são frequentemente enganosas; e como saber se um argumento científico é avanço ou bobagem.

A vida secreta dos números: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos

SZPIRO, George G. *A vida secreta dos números*: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos. 2. ed. Rio de Janeiro: Difel, 2011.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Por meio de histórias, anedotas e outros gêneros textuais, esse livro nos mostra como a Matemática está presente em quase todos os aspectos do cotidiano. O livro aborda curiosidades históricas pouco conhecidas e apresenta grandiosos praticantes da Matemática ao longo dos tempos.

Cursos de Estatística na Escola Virtual

ENAP. Catálogo de cursos. *Escola Virtual Gov*. Disponível em: https://www.escolavirtual.gov.br/catalogo?query=estat%C3%ADstica&carga_horaria=. Acesso em: 26 out. 2024.

Essa plataforma oferece uma variedade de cursos *on-line* focados em Estatística, ideais para aqueles interessados em aprimorar habilidades analíticas e interpretativas. Esses cursos abrangem desde conceitos básicos até técnicas mais avançadas, sendo uma excelente opção para estudantes e profissionais que desejam expandir seus conhecimentos em Estatística e em aplicações modernas da área.

Desbravadores da Matemática: da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot

STEWART, Ian. *Desbravadores da Matemática*: da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

O livro destaca as descobertas e inovações que moldaram a Matemática como a conhecemos nos dias atuais, desde os princípios básicos até conceitos mais complexos.

Domínio Público

DOMÍNIO Público. Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp. Acesso em: 12 ago. 2024.

Esse *site* consiste em uma biblioteca digital, na qual é possível pesquisar textos, imagens, sons e vídeos de domínio público (acesso livre e gratuito) referentes a diversas áreas.

Do zero ao infinito (e além): tudo o que você sempre quis saber sobre Matemática e tinha vergonha de perguntar

GOLDSMITH, Mike. *Do zero ao infinito*: tudo o que você sempre quis saber sobre Matemática e tinha vergonha de perguntar. Tradução: Fabio Storino. São Paulo: Benvirá, 2016.

Nesse livro, o autor apresenta aplicações práticas para a Matemática e revela como essa ciência afeta tudo ao nosso redor, do comportamento dos animais até a maneira como escutamos música. Entre os assuntos, estão a importância do zero nas operações Matemáticas; o que é googol; como funcionam os números binários; como música, Matemática e espaço estão conectados; e o formato hexagonal nas colmeias.

Edumatec

EDUCAÇÃO Matemática e tecnologia informática. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/. Acesso em: 12 ago. 2024.

Esse *site* apresenta e disponibiliza material que relaciona Matemática e informática. Na seção *softwares*, são disponibilizados diferentes programas computacionais que permitem, por exemplo, a construção de gráficos ou de figuras geométricas.

#EsquentaEnem: Dicas de conteúdo e estratégia para o Enem | EP 01

#ESQUENTAENEM: dicas de conteúdo e estratégia para o Enem: EP 01. *Canal Educação*. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Zv7ss93VQ7Q. Acesso em: 15 out. 2024.

Esse episódio é o primeiro de uma sequência de entrevistas com professores e estudantes, trazendo dicas de estudo e informações relevantes para prestar o Exame Nacional do Ensino Médio.

EtnoMatemática: arte, *design* e matrizes cíclicas

LOPES, João. *EtnoMatemática*: arte, *design* e matrizes cíclicas. São Paulo: Autêntica, 2011.

Explorando a interseção entre cultura, arte e Matemática, esse livro introduz o conceito de EtnoMatemática ao discutir como padrões cíclicos são usados em várias culturas para criar artefatos e *designs*.

GeoGebra

GEOGEBRA. Disponível em: https://www.geogebra.org. Acesso em: 12 ago. 2024.

GeoGebra é uma plataforma educacional interativa que permite aos usuários explorar diversos conceitos matemáticos por meio de gráficos, geometria, álgebra e cálculo, facilitando a visualização e a compreensão de temas complexos.

Geometria dos trançados Bora da Amazônia peruana

DANTAS, Sidney Ferreira. *Geometria dos trançados Bora da Amazônia peruana*. São Paulo: Editora da USP, 2011.

Esse livro apresenta uma investigação sobre os padrões geométricos utilizados pelos indígenas Bora da Amazônia peruana, principalmente em seus artesanatos trançados, por meio de uma abordagem que combina Antropologia e Matemática.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas

ROQUE, Tatiana Marins. *História da matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

Esse livro explora a história da Matemática de modo crítico, desfazendo mitos e apresentando desenvolvimentos significativos desde a Mesopotâmia até a modernidade, com uma abordagem acessível e enriquecida por ilustrações.

Histórias da matemática: da contagem nos dedos à inteligência artificial

VIANA, Marcelo. *Histórias da matemática: da contagem* nos dedos à inteligência artificial. São Paulo: Tinta-da-China, 2022.

O livro oferece uma jornada pela história da Matemática, desde Pitágoras até a inteligência artificial, abordando temas como a bola de futebol da Copa do Mundo e a brincadeira amigo-secreto. Com clareza e humor, Viana apresenta a Matemática como uma disciplina encantadora e essencial para compreender o mundo moderno.

Mania de matemática: diversão e jogos de lógica e matemática

STEWART, Ian. *Mania de matemática*: diversão e jogos de lógica e Matemática. Tradução: Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2005.

Esse livro é indicado para quem procura desafios matemáticos interessantes e curiosos, apresentados em relatos ficcionais surpreendentes e divertidos. Usando linguagem comum e acessível, o autor explora brincadeiras e jogos que despertam o raciocínio e tornam a Matemática mais acessível, podendo motivar até quem não gosta dela.

Matemateca

MATEMATECA. Disponível em: https://matemateca.ime.usp.br. Acesso em: 26 out. 2024.

A Matemateca do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo é um espaço dedicado à exploração interativa da Matemática por meio de exposições e atividades. Ideal para estudantes, educadores e entusiastas, o *site* oferece recursos que facilitam o entendimento dos conceitos matemáticos de forma lúdica e educativa.

Matemática Essencial

Matemática Essencial. Disponível em: http://www.uel.br/projetos/matessencial/. Acesso em: 12 ago. 2024.

Esse *site* apresenta definições e conceitos matemáticos de diversos níveis de ensino, exemplos resolvidos e exercícios com respostas, sendo algumas delas justificadas, e as resoluções, detalhadas.

Mosaicos, por José Ezequiel Soto Sánchez

SOTO SÁNCHEZ, José Ezequiel. *On periodic tilings with regular polygons*. Disponível em: https://chequesoto.info/tilings.html. Acesso em: 25 set. 2024.

Esse *site*, desenvolvido por José Ezequiel Soto Sánchez e colaboradores, explora a representação de ladrilhos periódicos com polígonos regulares, permitindo aos usuários que explorem e construam ladrilhos de maneira interativa, promovendo uma compreensão profunda dos padrões matemáticos e suas aplicações visuais.

O homem que calculava

TAHAN, Malba. *O homem que calculava*. Reedição. Rio de Janeiro: Record, 2018.

Esse livro clássico, escrito sob o pseudônimo Malba Tahan por Júlio César de Mello e Souza, é conhecido por simplificar conceitos matemáticos complexos com um estilo leve e humorístico, tornando a Matemática divertida e acessível a um público amplo.

O homem que mudou o jogo

O HOMEM que mudou o jogo, de Bennett Miller. Estados Unidos: Columbia Pictures, 2017 (134 min).

Esse filme aborda a história real de Billy Beane, gerente do time de beisebol Oakland Athletics, que revolucionou o esporte ao usar métodos estatísticos para formar uma equipe competitiva com um orçamento limitado. O filme destaca a importância da análise de dados e da estatística no processo de tomada de decisões, mostrando como ferramentas Matemáticas podem ser aplicadas em áreas inesperadas, como o esporte, para alcançar resultados inovadores.

O instinto matemático

DEVLIN, Keith. *O instinto matemático*. Tradução: Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record, 2009.

O autor defende a ideia de haver dois "tipos" de Matemática: a simbólica, exclusiva do ser humano; e a natural, que pertence a qualquer animal e corresponde a habilidades Matemáticas relacionadas à sobrevivência, senso de direção e captura de presas.

O jogo da imitação

O JOGO da imitação, de Morten Tyldum. Estados Unidos/Reino Unido: Black Bear Pictures/Bristol Automotive, 2014 (114 min).

Esse filme, dirigido por Morten Tyldum, narra a história do matemático britânico Alan Turing, que, durante a Segunda Guerra Mundial, lidera um grupo de cientistas

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

e criptógrafos que decifram o código da máquina nazista chamada Enigma, que foi crucial para a vitória dos Aliados.

O livro da matemática

O livro da matemática. Tradução: Maria da Anunciação Rodrigues. Rio de Janeiro: Globo Livros, 2020. (Série As Grandes Ideias de Todos os Tempos).

O livro explora a história, os conceitos e as aplicações da Matemática. Organizado cronologicamente, apresenta teoremas, descobertas e personalidades importantes. Com ilustrações e explicações detalhadas, é recomendado para estudantes e entusiastas dessa área.

O poder do pensamento matemático: a ciência de como não estar errado

ELLENBERG, Jordan. *O poder do pensamento matemático*: a ciência de como não estar errado. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2015.

O autor destaca a importância da Matemática como uma maneira de pensar que pode beneficiar diversos aspectos da vida e nos ajudar a compreender o mundo ao nosso redor.

O que é e para que serve a matemática

SILVA, Jairo José da. *O que é e para que serve a matemática*. São Paulo: Editora Unesp, 2022.

O autor destaca a importância da Matemática como uma ferramenta essencial para compreender e solucionar problemas do mundo real, tornando-a interessante para todos os leitores.

O que é matemática?

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O que é matemática?* São Paulo: Ciência Moderna, 2000.

Esse livro clássico oferece uma profunda exploração dos fundamentos matemáticos e suas aplicações práticas, desde os conceitos mais básicos até os mais complexos, em diversas áreas do conhecimento. Escrito por dois renomados matemáticos, essa obra é essencial para quem busca compreender como a Matemática molda o mundo. Acessível e detalhado, é um recurso valioso para estudantes e profissionais da área.

Os elementos de Euclides: uma história da geometria

EUCLIDES. *Os elementos de Euclides*: uma história da geometria. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Zahar, 2018.

Esse livro é uma tradução atualizada de "Os elementos", uma das obras mais influentes na história da Matemática, escrita por Euclides. O texto aborda os fundamentos da Geometria de maneira sistemática, estabelecendo axiomas e teoremas que formam a base do que conhecemos como Geometria atualmente.

O universo e a xícara de chá

COLE, K. C. *O universo e a xícara de chá*. Tradução: Elizabeth Leal. Rio de Janeiro: Record, 2006.

O livro mostra como a Matemática transcende os números e está presente em muitas situações do dia a dia. Mostra, ainda, como perceber a lógica nessas situações cuja compreensão nos torna mais aptos a tomar decisões e permite o melhor entendimento do mundo em que vivemos.

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

OBMEP. Disponível em: http://www.obmep.org.br. Acesso em: 12 ago. 2024.

Nesse *site*, é possível obter diversas informações relacionadas à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), como efetuar a inscrição, verificar a data das provas e acessar as provas aplicadas em anos anteriores.

Planolândia: um romance de muitas dimensões

ABBOTT, Edwin A. *Planolândia*: um romance de muitas dimensões. São Paulo: Tordesilhas, 2021.

Esse clássico da literatura explora conceitos matemáticos e dimensionais de maneira inovadora. Por meio de personagens e cenários que desafiam nossas percepções habituais, a obra oferece uma crítica social sutil e encoraja o leitor a explorar a Matemática de maneira imaginativa e acessível.

Revista Brasileira de História da Matemática

RBHM. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/index. Acesso em: 26 out. 2024.

Essa revista é um recurso valioso para aqueles interessados na evolução do pensamento matemático ao longo do tempo. Esse periódico acadêmico publica artigos que exploram diversos aspectos históricos da Matemática, contribuindo para a compreensão e apreciação das raízes e dos desenvolvimentos desta ciência fundamental. É ideal para pesquisadores, educadores e estudantes que desejam aprofundar seus conhecimentos sobre a história da Matemática.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

RESPOSTAS

Professor, professora: Esta seção apresenta respostas esperadas às atividades de cálculo constantes nos capítulos do volume, incluindo questões das páginas de abertura e de teoria, atividades de seções especiais e tarefas da seção **Exercícios e problemas**. Além disso, constam nesta seção as respostas indicadas para o final do **Livro do Estudante** nas notas ao professor. Não constam aqui respostas pessoais nem respostas abertas, como elaboração de problemas e resultado de pesquisas.

CAPÍTULO 1 ANÁLISE COMBINATÓRIA

Abertura de capítulo

2. Há seis maneiras. São elas: (X, Y, Z), (X, Z, Y), (Y, X, Z), (Y, Z, X), (Z, X, Y) e (Z, Y, X).

Exercícios e problemas

1. 6 filmes.

2. **a)** 7 personagens; princípio aditivo da contagem.
b) De 24 maneiras; princípio multiplicativo da contagem.
c) 2 opções; princípio aditivo da contagem.

4. 49 maneiras; 42 maneiras.

5. 258 336 000 senhas.

6. 24 maneiras.

7. 5 trajetos.

8. 24 maneiras.

9. Alternativa **d**.

10. **a)** 9 000 números.
b) 27 216 números.
c) 450 números.
d) 180 000 números.

11. **a)** 36 maneiras.
b) 12 maneiras.

12. De 15 120 maneiras.

13. 235 min

14. **a)** 20 000 números.
b) 20 000 números distintos a mais.

16. **a)** 720
b) 5 040
c) 8
d) 25
e) 96
f) 120
g) 195
h) $\frac{1}{455}$
i) 10

17. **a)** n
b) $n + 3$

18. **a)** $n = 3$
b) $n = 1$ ou $n = 0$
c) $n = -4$

19. **a)** 30
b) 504
c) 840
d) 20 160
e) 48
f) 6 880

20. **a)** $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{(n-3)}$
b) $n + 1$
c) $\frac{1}{2n^2 + 2n}$

21. De 1 320 maneiras distintas.

22. De 665 280 maneiras distintas.

23. **a)** De 24 165 120 maneiras diferentes.
b) De 863 040 maneiras diferentes.

24. 19 656 000 livros.

25. **a)** 27 907 200
b) 3 113 510 400
c) 78 960 961
d) 19 958 399
e) 6 652 800
f) 3 160 080

26. **a)** 625 números.
b) 120 números.
c) 48 números.
d) 36 números.

27. **a)** 3 senadores.
b) $\frac{81!}{74!}$

28. De 480 maneiras.

29. 1 440 números.

30. $n = 4$

31. **a)** 27 920 200 maneiras diferentes.
b) 2 203 200 maneiras diferentes.

32. **a)** 17 equipes.
b) 32 partidas.

33. **a)** Em 60 min.
b) Não, pois nessas condições a quantidade máxima de senhas a serem digitadas é 48, o que equivale a 4 min.

34. **a)** 5 040
b) 1 120
c) 4 920
d) 132
e) 4 320
f) 24

35. **a)** 24 anagramas.
b) 120 anagramas.
c) 362 880 anagramas.

36. De 719 maneiras.

37. **a)** 120 palavras.
b) 24 palavras.
c) 48 palavras.

38. **a)** 875 431; 134 578
b) 389 números; 310 números.

39. 24 meses.

40. 2 340ª

41. Considerando V, A e P as cores das caixas vermelhas, amarelas e pretas, respectivamente, a sequência será $(V, A, P, V, A, V, P, A, V)$. Essa sequência tem nove caixas.

42. **a)** 2 520 anagramas.
b) 60 480 anagramas.
c) 1 814 400 anagramas.
d) 1 663 200 anagramas.

44. 84 soluções.

45. **a)** 180 números.
b) 90 números.
c) 120 números.

46. UACÉLL

47. Alternativa **d**.

48. **a)** 15
b) 126
c) 3 003
d) 952
e) 14
f) 1

49. **a)** $p!$
b) $n(n-2)$
c) $\frac{p(p+1)}{n}$
d) $\frac{n-1}{p-1}$

50. Alternativa **d**.

51. **a)** 12 650
b) 2 042 975
c) 3 365 856
d) 10 015 005
e) 24 040 016
f) 3 921 225

52. 15

53. 2 118 760 grupos diferentes.

54. De 19 600 maneiras.

55. De 31 824 maneiras.

56. Alternativa **a**.

57. Alternativa **e**.

58. 196 times diferentes.

59. De 2 042 975 maneiras diferentes.

60. $x = 4$

61. **a)** 15 segmentos.
b) 20 triângulos.

62. 36 pessoas.

63. De 38 760 maneiras diferentes.

64. 27 estudantes.

65. Alternativa **c**.

66. De 91 390 maneiras diferentes.

67. De 33 264 000 maneiras diferentes.

68. Alternativa **a**.

69. De 84 maneiras diferentes.

70. De 64 maneiras diferentes.

71. De 140 maneiras diferentes.

72. 1 680 mensagens.

73. Alternativa **b**.

75. **a)** 112
b) 267
c) 32 768
d) 808

76. **a)** $S = \{9\}$
b) $S = \{11, 13\}$
c) $S = \{100\}$
d) $S = \{0, 10\}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

77. 8 elementos; 256. **78.** Alternativa **d**.

79. $x = 8$ **80.** 1023 comissões. **81.** $n = 12$

82. a) $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

b) $16a^4 - 32a^3b + 24a^2b^2 - 8ab^3 + b^4$

c) $64x^6 - 48x^5y + 15x^4y^2 - \frac{5x^3y^3}{2} + \frac{15x^2y^4}{64} - \frac{3xy^5}{256} + \frac{y^6}{4\,096}$

d) $x^2 + 4x\sqrt{x}\sqrt{y} + 6xy + 4y\sqrt{x}\sqrt{y} + y^2$

e) $\frac{a^2}{16} - \frac{a\sqrt{a}\sqrt{b}}{6} + \frac{ab}{6} - \frac{2b\sqrt{a}\sqrt{b}}{27} + \frac{b^2}{81}$

f) $x^6y^6 + 2x^5y^5z + \frac{5}{3}x^4y^4z^2 + \frac{20}{27}x^3y^3z^3 + \frac{5}{27}x^2y^2z^4 + \frac{2}{81}xyz^5 + \frac{z^6}{729}$

83. a) 1 b) -1 c) 0 d) 256

84. a) $220\sqrt{5} - 284\sqrt{3}$ c) $3\,363 - 2\,378\sqrt{2}$

b) $3\,964 + 624\sqrt{35}$ d) $2\,403 + 981\sqrt{6}$

85. $n = 8$

86. a) $T_{p+1} = \binom{7}{p} \cdot 9^{7-p}(-a)^p$ c) $T_{p+1} = \binom{9}{p}(5ab)^{9-p}\left(-\frac{c}{7}\right)^p$

b) $T_{p+1} = \binom{5}{p} \cdot 3^{5-p}\left(\frac{x}{3}\right)^p$ d) $T_{p+1} = \binom{6}{p}\left(\frac{7}{x}\right)^{6-p}\left(\frac{8y}{3}\right)^p$

87. $-\frac{320x^3}{729}$ **88.** $77\,520x^4y^{16}$

89. a) $540y^6$ b) $70a^4b^4$ c) $\frac{59\,136z^{18}}{15\,625x^6y^6}$

90. a) 729 c) Não há termo independente de x.

b) 1024 d) 5 670

91. $\frac{760x^{18}}{y^2}$

92. a) $\frac{55x^3}{2y^9}$ b) $\frac{231x^6}{16y^6}$ c) $\frac{495x^8}{256y^4}$

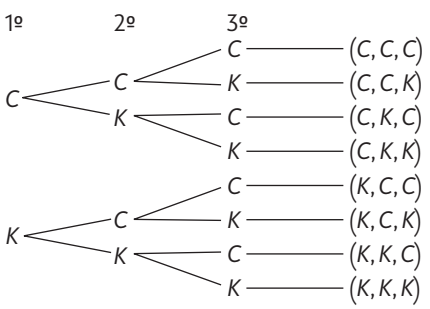
Resolvendo por etapas (páginas 30 e 31)

2. Sim; 650 maneiras diferentes.

Síntese do capítulo (página 45)

3. O princípio fundamental da contagem pode ser usado quando queremos determinar a quantidade de possibilidades de ocorrência dos acontecimentos A e B, tais que A pode ocorrer de n maneiras distintas e, para cada umas dessas maneiras, B pode ocorrer de m maneiras distintas.

4.



5. Alternativa **b**.

6. Sugestão de resposta: **1**. Calcule o fatorial de n. **2**. Calcule o fatorial da diferença entre n e p. **3**. Calcule o quociente entre o resultado obtido no passo **1** e o obtido no passo **2**.

7. Sugestão de resposta: Identificaria a quantidade de n letras que compõe a palavra e calcularia $n!$. Identificaria a quantidade n de letras que compõe a palavra e as quantidades $n_1, n_2, \ldots, n_k$ das diferentes letras que compõem a palavra. Por fim, calcularia $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$.

8. Sugestão de resposta: Calcularia a combinação simples de n elementos tomados p a p.

9. Alternativa **a**. **10.** Alternativa **a**.

11. Se $x = y = 1$, então:

$(1+1)^n = \binom{n}{0}1^n \cdot 1^0 + \binom{n}{1}1^{n-1} \cdot 1^1 + \cdots + \binom{n}{n}1^0 \cdot 1^n$

Ou seja: $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$.

12. Substituiria $x = y = 1$ em $(2x+1)^5$.

13. Alternativa **b**.

CAPÍTULO 2 PROBABILIDADE

Exercícios e problemas

1. $\Omega = \{(A,B),(A,C),(A,D),(B,C),(B,D),(C,D)\}$

2. a) $\Omega = \{(P,A,T,Q),(P,A,T,C),(P,A,Q,C),(P,T,Q,C)\}$

b) $\Omega = \{213, 268, 305, 313\}$

3. a) Resposta na página **299**. b) $E = \varnothing$

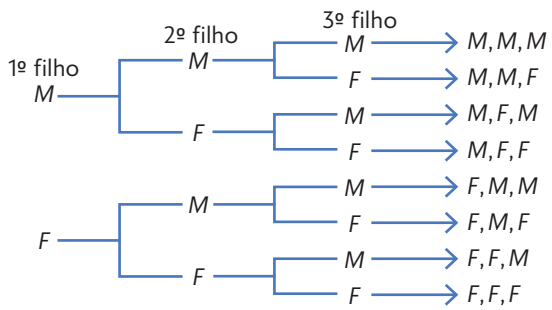
4. a) $A = \{(C,C),(P,P),(O,O),(E,E)\}$

b) $B = \{(O,O),(O,C),(O,E),(O,P)\}$

c) $C = \{(E,E),(E,O),(E,P),(O,O),(O,P),(P,P)\}$

5. **Respostas na** página **299**.

6. a) Em 1991, as mulheres tinham, em média, aproximadamente três filhos. Assim:



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

b) • $A = \{(M,M,M),(F,F,F)\}$

• $B = \{(M,M,F),(M,F,M),(F,M,M)\}$

• $C = \{(M,M,F),(M,F,M),(M,F,F),(F,M,M),(F,M,F),(F,F,M),(F,F,F)\}$

8. $\Omega = \{(Co),(Ca,Co),(Ca,Ca,Co),(Ca,Ca,Ca,Co),\ldots,(Ca,Ca,Ca,\ldots,Co),\ldots\}$

O espaço amostral é infinito.

9. a) Seis maneiras.

b) Resposta na página **299**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

10. a) $A = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
b) $B = \{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3)\}$
c) $C = \varnothing$
d) $D = \Omega$

11. a) Resposta na página **299**.
b) $M = \{(A, B, C, D), (A, B, D, C), (A, C, D, B), (A, D, C, B)\}$
c) $N = \{(A, C, B, D), (A, D, B, C)\}$
d) $P = \varnothing$

12. a) $\Omega = \{t \in \mathbb{R} | 0 \leq t \leq 1095\}$ ou $A = \{t \in \mathbb{R} | t \in [0, 1095]\}$.
b) $A = \{t \in \mathbb{R} | 365 < t < 730\}$ ou
$A = \{t \in \mathbb{R} | t \in]365, 730[\}$.

13. a) $\frac{1}{2}$ ou 50%.
b) $\frac{2}{7}$ ou aproximadamente 28,57%.
c) $\frac{1}{4}$ ou 25%.
d) $\frac{3}{14}$ ou aproximadamente 21,43%.
e) $\frac{9}{28}$ ou aproximadamente 32,14%.
f) $\frac{3}{7}$ ou aproximadamente 42,86%.
g) $\frac{3}{28}$ ou aproximadamente 10,71%.

14. a) 6 h às 11 h 59 min, pois ocorre a maior quantidade de infartos.
b) • $\frac{1}{5}$ ou 20%. • $\frac{7}{10}$ ou 70%.

15. Alternativa **e**.

16. a) $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$. c) 1 ou 100%. e) 0 ou 0%.
b) $\frac{2}{3}$ ou $66,\overline{6}\%$. d) $\frac{1}{2}$ ou 50%.

17. $\frac{1}{5}$ ou 20%; $\frac{4}{5}$ ou 80%. **18.** Alternativa **c**.

19. a) $\frac{42}{85}$ ou aproximadamente 49,41%.
b) $\frac{6}{17}$ ou aproximadamente 35,29%.
c) $\frac{14}{85}$ ou aproximadamente 16,47%.

20. a) Região alaranjada $\frac{1}{4}$ ou 25%, região roxa $\frac{1}{16}$ ou 6,25% e não pertencer à região azul $\frac{3}{4}$ ou 75%.
b) $\frac{1}{8}$ ou 12,5%; $\frac{3}{8}$ ou 37,5%. c) $\frac{1}{4}$ ou 25%.

21. $\frac{17}{50}$ ou 34%; $\frac{1}{2}$ ou 50%.

22. a) $\frac{1}{120}$ ou $0,8\overline{3}\%$. b) $\frac{3}{5}$ ou 60%. c) $\frac{2}{5}$ ou 40%.

23. $\frac{2}{9}$ ou $22,\overline{2}\%$.

24. a) $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ ou $41,\overline{6}\%$. b) 1 ou 100%.

25. a) Alternativa **V**. b) Alternativa **III**.

26. a) $\frac{1}{2}$ ou 50%. b) $\frac{1}{8}$ ou 12,5%. c) $\frac{3}{8}$ ou 37,5%.

27. $\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$ ou $58,\overline{3}\%$.

28. 9 bolinhas vermelhas, 18 verdes e 6 roxas.

30. a) Aproximadamente 1,92%.
b) Aproximadamente 7,69%.
c) Aproximadamente 30,77%.
d) Aproximadamente 15,38%.
e) Aproximadamente 19,23%.

31. a) $\frac{3}{4}$ ou 75%. b) $\frac{11}{12}$ ou $91,\overline{6}\%$. c) $\frac{1}{6}$ ou $16,\overline{6}\%$.

32. a) $\frac{1}{2}$ ou 50%. b) $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$.

33. $\frac{3}{4}$ ou 75%.

34. a) $\frac{19}{20}$ ou 95%. b) $\frac{17}{20}$ ou 85%. c) $\frac{1}{60}$ ou $1,\overline{6}\%$.

35. 60%

36. $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ ou 25%.

37. $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$ ou 40%.

38. 63%

39. a) $\frac{12}{19}$ ou aproximadamente 63,16%.
b) $\frac{3}{95}$ ou aproximadamente 3,16%.

40. a) Sim.
b) **AS** × **SS** ou **AS** × **AS**.
c) $\frac{9}{16}$ ou 56,25%; $\frac{3}{16}$ ou 18,75%.
d) $\frac{1}{2}$ ou 50%.

41. a) • $\frac{5}{47}$ ou aproximadamente 10,64%.
• $\frac{11}{47}$ ou aproximadamente 23,4%.
b) $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$.

42. Alternativa **b**. **43.** Alternativa **b**. **44.** Alternativa **c**.

45. $\frac{3}{10}$ ou 30%. **46.** $\frac{9}{100}$ ou 9%.

47. $\frac{3}{17}$ ou aproximadamente 17,65%.

49. a) $\frac{22}{100}$ ou 22%. b) $\frac{7}{20}$ ou 35%.

50. Aproximadamente 23,62%.

51. a) Aproximadamente 26,37%.
b) Aproximadamente 0,1%.
c) Aproximadamente 39,55%.
d) Aproximadamente 23,73%.

52. Aproximadamente 9,38%. **53.** 38,4%

54. a) Aproximadamente 25,41%.
b) Aproximadamente 0,007%.

55. Aproximadamente 99,88%.

56. Aproximadamente 0,16%.

57. a) $\frac{1}{8\,192}$ ou aproximadamente 0,012%. b) Igual.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Trabalho e juventudes (página 68)

2. A profissão de cientista de dados pode estar relacionada no campo matemático com o estudo de probabilidades, a fim de antever determinada situação.

Síntese do capítulo (página 75)

3. Sugestão de resposta: Calcular a probabilidade de sucesso de um tratamento médico baseado nas estatísticas de recuperação fornecidas por estudos clínicos e decidir a melhor rota para ir ao trabalho, considerando a probabilidade de trânsito.

4. **a)** Verdadeira.
b) Falsa, pois esse evento não inclui os números 1 e 10, logo não tem todos os elementos do espaço amostral.
c) Verdadeira.

5. Alternativa **b**. **6.** Alternativa **a**.

7. Dois eventos são independentes se a ocorrência de um não afeta a ocorrência do outro.

8. É usada a fórmula $P(Q|M) = \frac{n(Q \cap M)}{n(M)}$, em que Q é o evento "sortear um químico" e M é o evento "sortear uma mulher".

9. Sugestão de resposta: Inicialmente, determina-se a probabilidade de sortear uma bolinha azul na primeira retirada, que é $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Como restam 9 bolinhas na urna, sendo 4 delas azuis, a probabilidade de sortear uma bolinha azul na segunda retirada é $\frac{4}{9}$. Por fim, a probabilidade de ambos os eventos ocorrerem consecutivamente é dado por: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$.

CAPÍTULO 3 ESTATÍSTICA

Questões

A. Sugestão de resposta: Adicionaria os produtos de cada frequência à respectiva quantidade de gols, cujo total é de 47 gols.

B. Zero. **C.** Qualitativa ordinal.

D. 24 estudantes; aproximadamente 70,6%.

E. Empresa **A**: 37 funcionários; empresa **B**: 31 funcionários.

F. Empresa **A**: aproximadamente R$ 88 216,22; empresa **B**: aproximadamente R$ 62 903,23.

Exercícios e problemas

1. **a)** Pesquisa censitária. **b)** Pesquisa amostral.

2. Quantitativa discreta: idade (em anos) e quantidade de filhos; quantitativa contínua: massa (em kg) e altura (em cm); qualitativa ordinal: grau de instrução; qualitativa nominal: gênero e estado civil.

4. Quando todo elemento da população P também é elemento da amostra A, ou seja, quando todos os elementos da população são pesquisados.

6. **a)** Amostragem estratificada.
b) Variável qualitativa nominal.
c) Sugestão de resposta: Inicialmente, deveria organizar os elementos da população em determinada ordem ou listagem (possibilitando a identificação de cada um deles). Em seguida, escolher os elementos que compõem a amostra conforme um critério ou fator de repetição.

7. **a)** 0,4%

8. **a)** Na tabela **I**, é apresentado o consumo médio diário de água por pessoa no Brasil e nas regiões brasileiras, no ano de 2022. Na tabela **II**, é apresentada a quantidade média de água necessária para produzir alguns produtos.
b) Nordeste; Sudeste.
c) $3 \cdot 10^{10}$ L **d)** Milho. **e)** 18 219,5 L

9. **a)** Norte e Nordeste.
b) Norte, Nordeste e Sul.

10. **a)** O campo "Outro" é referente aos atendimentos interrompidos ou ao dado não ter sido informado nas ligações. De acordo com as informações, conclui-se que esses casos diminuíram de 2022 para 2023, o que pode ser positivo, pois demonstra que mais pessoas estão conseguindo concluir seus atendimentos e informar suas localizações.
b) Houve um aumento de ligações para o Ligue 180 em todas as regiões brasileiras. Consequentemente, esse aumento impactou na quantidade total de ligações recebidas pela central.

12. **a)** Não, pois os dados apresentados no gráfico são referentes à produção por pessoa. Para fazer uma comparação quantitativa, é necessário conhecer a quantidade de habitantes de cada região em questão.
b) Aproximadamente 24 042 t.

13. **a)** Norte e Nordeste.
b) • Norte: Aproximadamente 44,48%.
• Nordeste: Aproximadamente 31,22%.
• Centro-Oeste: Aproximadamente 11,80%.
• Sudeste: Aproximadamente 7,28%.
• Sul: Aproximadamente 5,20%.

14. **a)** Em todos os estados citados, verifica-se um aumento no número total de registros de crimes contra a população LGBTQIA+ em relação aos anos de 2022 para 2023.
b) Goiás: aproximadamente 10,7% de aumento; Bahia: aproximadamente 12,6% de aumento; Pará: aproximadamente 52,7% de aumento; Paraná: aproximadamente 7,2% de aumento; São Paulo: não é possível calcular por ausência de dados no ano de 2022.
c) Não.
d) A falta de informações completas pode levar a uma subestimação dos números reais de registros de crimes, criando uma visão imprecisa da situação da violência contra a população LGBTQIA+.

15. **a)** Cólon e reto.
b) 45 630 novos casos.
c) Aproximadamente 69,2%.

16. Entre 01/2015 e 01/2016; 24 472 351 acessos.

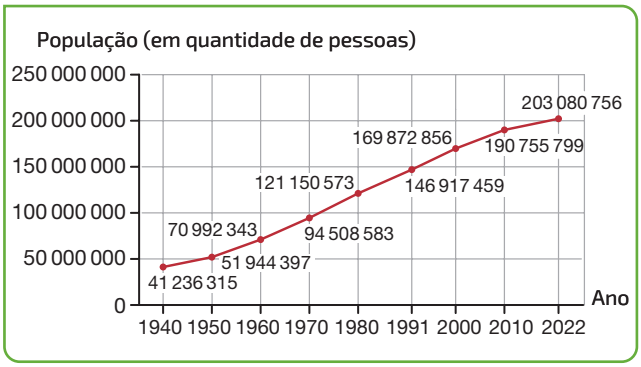
17. **a)** Sugestão de resposta: No decorrer dos anos, a quantidade tanto de candidaturas quanto de eleitos indígenas tem aumentado e, nas eleições municipais, as quantidades de candidatos e eleitos indígenas são muito superiores às das eleições gerais.
b) Eleições gerais: as candidaturas cresceram aproximadamente 121,62%; eleições municipais: as candidaturas cresceram aproximadamente 33,14%.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

18. **a)** Estados Unidos da América: 305 346; Brasil: 242 450; Índia: 271 867.

19.

População do Brasil, de 1940 a 2022

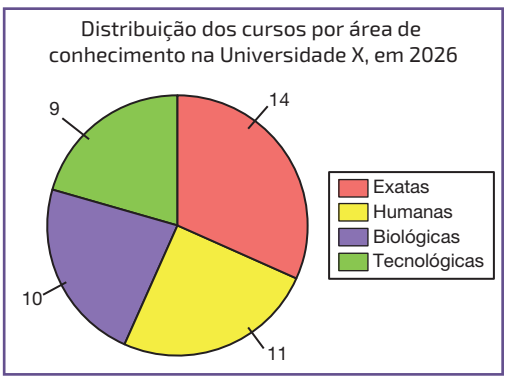


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: IBGE. População. *Panorama do Censo 2022*. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/?utm_source=ibge&utm_medium=home&utm_campaign=portal. Acesso em: 12 ago. 2024.

20. **a)** Cestas de 2 pontos.
b) 84 pontos.

21.



SERGIO L. FILHO E KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: Catálogo da instituição.

22. **a)** 15 a 19 anos e 35 a 39 anos.
b) Masculino; feminino.

23. **a)** 2021. **b)** Não. **c)** Aproximadamente 11,07%.

24. **a)** 11 977 000 pessoas.
b) Mulheres pretas ou pardas: 38%; homens pretos ou pardos: 35%; mulheres brancas: 14%; homens brancos: 12%; outros: 1%.

25. **a)** Não, pois diferentes tipos de pessoas frequentam diferentes tipos de supermercados. A amostra daria unicamente indicações sobre a população constituída pelos clientes desse supermercado.
b) Sim, as porcentagens somam mais de 100%. Nesse caso, a amostra utilizada não é representativa e a área do setor correspondente a 55% é maior do que a área do setor correspondente a 60%.

26. **a)** Concorrente **A**; Concorrente **B**.
c) Concorrente **A**.

27. Não, pois foram analisadas apenas as empresas que tiveram os maiores volumes de exportação no último ano, o que, geralmente, não representa a situação financeira de todas as empresas de um estado.

28. Não.

29. **b)** A marca **B** vendeu menos *notebooks* do que as marcas **D**, **E** e **F** juntas.

30. **a)** Média: 8; moda: 3; mediana: 7,5.
b) Média: −9,2; moda: −6 e −7; mediana: −7.
c) Média: 0; moda: −1; mediana: 0.

31. **a)** Média: 667,8 m; amodal; mediana: 632 m.
b) Burj Khalifa; 627,75 m.

32. Felipe: 42 anos; filho: 21 anos; pai: 84 anos.

33. 7,7

34. **a)** Não, pois sua média aritmética final será de, aproximadamente, 6,8, que é inferior à nota média mínima necessária.
b) 7,3
c) Sim, pois, para não ser eliminada na prova prática, a nota de Fátima deve ser igual ou superior a 5, nota com a qual sua média final ficará maior do que 7.

35. 67 **36.** Alternativa **b**.

37. **a)** 3 minutos.
b) Não, pois não é dado o tempo de cada vídeo para organizá-los em um rol e analisar esses dados.

38. **a)** A média é 8,1, o que significa que a nota média dos estudantes é 8,1 pontos; a moda é 8 e 10, ou seja, as notas que os estudantes mais obtiveram foram 8 e 10; e a mediana é 8. Assim, a nota mediana dos 25 estudantes é 8.

40. Alternativa **a**.

41. **a)** A média é 2,75, o que significa que a nota média do produto dado pelos consumidores é 2,75; a moda é 3, ou seja, a nota que os consumidores mais atribuíram ao produto é 3; e a mediana é 3. Assim, a nota mediana dos 3 000 consumidores é 3.

42. Sugestão de resposta: $a = 15$, $b = 8$, $c = 7$, $d = 6$, $e = 5$, $f = 4$, $g = 3$, $h = 2$, $i = 1$.

43. Alternativa **d**.

44. **a)** 5 **b)** 8 **c)** 2,5 **d)** 5 **e)** 1 **f)** 8

45. **a)** 101,23
b) Sugestão de resposta: 30% dos pilotos fizeram sua volta mais rápida em 101,23 s ou menos.

46. **a)** Falsa. Aproximadamente 40% dos estudantes obtiveram nota menor ou igual a 6,5.
b) Verdadeira.
c) Falsa. Sugestão de correção: Um estudante que obteve a nota 8 está no 8º decil.
d) Verdadeira.

47. **a)** 39 anos.
b) $Q_1 \simeq 21{,}1$: indica que 25% dos eleitos dessa seção têm 21 anos ou menos. $Q_2 \simeq 30{,}5$: indica que metade desses eleitores têm 31 anos ou menos. $Q_3 \simeq 38{,}2$: indica que 75% desses eleitores têm 39 anos ou menos.

49. **a)** $\bar{x} = 62$; amodal; $Md = 63$; $A = 21$; $Dm = 6$; $V = 50{,}25$; $Dp \simeq 7{,}09$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) $\bar{x} = 24$; $Mo = 14$; $Md = 25$; $A = 25$; $Dm \simeq 7{,}43$; $V \simeq 74{,}29$; $Dp \simeq 8{,}62$.

c) $\bar{x} = 6{,}15$; $Mo = 4{,}5$ e $Mo = 12$; $Md = 4{,}5$; $A = 10{,}8$; $Dm = 3{,}9$; $V \simeq 18{,}38$; $Dp \simeq 4{,}29$.

d) $\bar{x} = 2{,}5$; $Mo = 3$; $Md = 3$; $A = 31$; $Dm = 6{,}375$; $V = 81$; $Dp = 9$.

50. **a)** 1ª semana: 0,60%; 2ª semana: 0,60%.
b) R$6,69; R$6,72
c) 1ª semana: $Dm = 0{,}01$; $V \simeq 0{,}00016$; $Dp \simeq 0{,}013$.
2ª semana: $Dm \simeq 0{,}013$; $V = 0{,}0002$; $Dp \simeq 0{,}014$.

51. **a)** 16 anos. **b)** 28 anos.
c) A alteração do valor máximo do conjunto de valores altera muito a amplitude.

52. Não, pois, apesar de a média obtida por ela ser superior a 60 pontos, o desvio padrão foi superior a 5 pontos.

53. **a)** Piloto **A**. **b)** Piloto **B**.

55. **a)** Equipe **A**: $A = 27$; $V \simeq 73{,}1$; $Dp \simeq 8{,}6$.
Equipe **B**: $A = 33$; $V \simeq 141{,}2$; $Dp \simeq 11{,}9$.
b) As pontuações obtidas nas 8 primeiras partidas pela equipe **A** são menos variáveis do que as obtidas pela equipe **B**.

56. **a)** R$ 2 360,00 **b)** Aproximadamente R$ 773,12
c) Como o desvio padrão não está próximo de 0, os valores estão afastados da média, ou seja, não há uma regularidade na distribuição salarial dessa empresa.

58. Alternativa **c**.

59. **a)** 5 **b)** 9 **c)** 3

60. Resposta na página **299**.

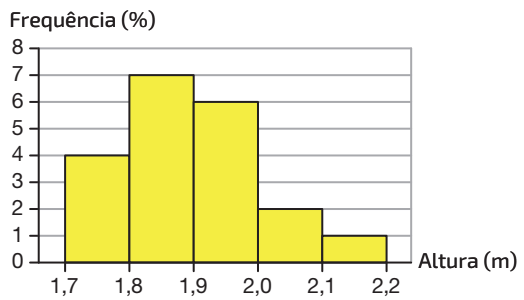
61. **a)** 40 apartamentos; 6 apartamentos.
b) Resposta na página **300**.
c) 21 apartamentos; 52,5%.

62. **a)** Resposta na página **300**. **b)** 6,25%

63. **a)** 24 pacientes. **b)** 45% **c)** 43 pacientes.

64. **a)** 20 atletas. **b)** 1,8 ⊢ 1,9 **c)** 3 atletas. **d)** 55%
e) Não, pois não conhecemos a altura de nenhum deles; sabemos apenas que existem 7 atletas com alturas entre 1,8 m e 1,9 m.
f)

Altura dos atletas da equipe de basquete juvenil, em março de 2025



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: Ficha técnica da equipe.

65. 32 020 pessoas.

67. **a)** 100 plantas.
b) $\bar{x} = 8{,}14$ cm; $Mo = 8$ cm; $Md = 8$ cm.
c) Não se pode afirmar uma quantidade exata, mas sabemos que é entre 29% e 76%.

68. **a)** 82 km/h **b)** Maior.

69. Aproximadamente 6,08.

70. Sugestões de resposta: Dois funcionários levam 5 minutos para ir da casa deles ao trabalho; aproximadamente 40% dos funcionários levam 25 minutos para ir da casa deles ao trabalho; o funcionário que leva mais tempo demora 45 minutos.

71. **a)** 15 produtores. **b)** 2025
c) Aproximadamente 38,5 toneladas; aproximadamente 65,5 toneladas.

72. Turma **A**: 11; Turma **B**: 9; Turma **C**: 10; Turma **D**: 11.

73. **b)** A resposta depende do gráfico indicado no item **a**.
c) Não, pois, dos 28 estudantes, apenas 13 estudam mais de 4 horas e 30 minutos, ou 270 minutos, ou seja, menos da metade.

74. **b)** A resposta depende do gráfico indicado no item **a**.

75. **b)** A resposta depende do gráfico indicado no item **a**.

76. **a)** Aproximadamente 97,2%.
b) Aproximadamente 1,9%.
c) 2022

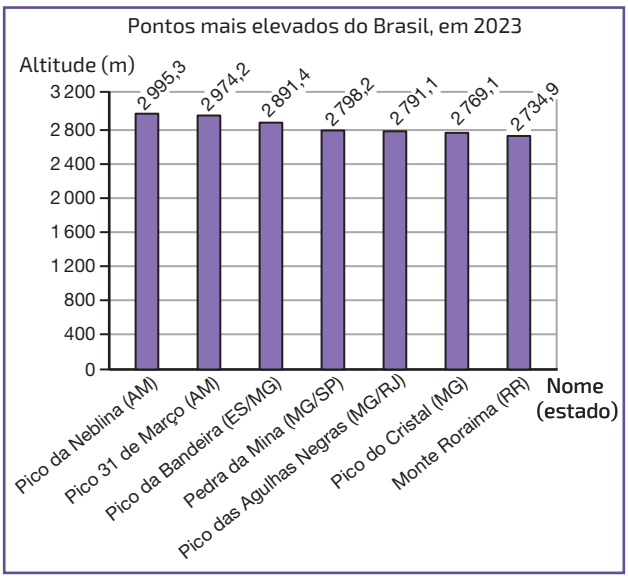
77. 0,3 ou 30%. **78.** 8 brancas; 17 pretas; 5 vermelhas.

79. Sim, pois a probabilidade de obter cada face deveria ser próxima da probabilidade teórica (16,$\overline{6}$%), porém existe uma tendência maior de saírem as faces de números 2 (25%) e 5 (22,$\overline{4}$%).

80. Sugestões de resposta: Abertura de um negócio; destino de uma viagem considerando a possibilidade de chuva.

Acessando tecnologias (páginas 86 e 87)

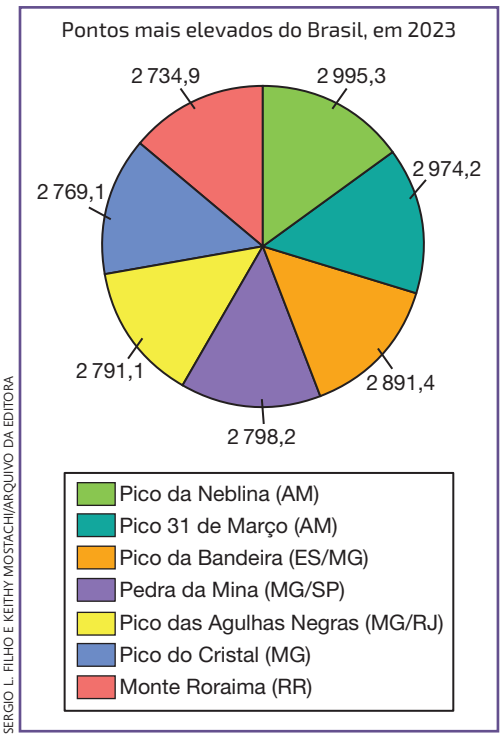
1.



SERGIO L. FILHO E KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: IBGE. *Anuário Estatístico do Brasil*. Disponível em: https://anuario.ibge.gov.br/images/aeb/2023/s1/2_pdf/s1t3201.pdf. Acesso em: 10 ago. 2024.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



SERGIO L. FILHO E KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: IBGE. *Anuário Estatístico do Brasil*. Disponível em: https://anuario.ibge.gov.br/images/aeb/2023/s1/2_pdf/s1t3201.pdf. Acesso em: 10 ago. 2024.

O gráfico mais adequado para representar essas informações é o gráfico de barras verticais, pois ele possibilita uma noção visual imediata sobre a proporção entre as altitudes dos picos, permitindo uma rápida comparação. O gráfico de setores não é adequado, nesse caso, porque não se trata de comparar as partes de um mesmo lado.

Desenvolvimento sustentável (páginas 88 e 89)

1. Acre, Rondônia, Amazonas, Roraima, Mato Grosso, Pará, Amapá, Tocantins e Maranhão.

2. Sugestão de resposta: Perda de biodiversidade, alterações nos recursos hídricos da região e mudanças climáticas causadas pelo aumento do aquecimento global, em razão da redução das árvores, causando acúmulo de CO_2 na atmosfera.

4. 2012: 4 571 km^2; 2022: 11 594 km^2.

Educação midiática (páginas 102 e 103)

2. Conteúdo fabricado, manipulação de conteúdos e conteúdo impostor sempre serão *fake news*, pois são conteúdos criados ou manipulados com a intenção de enganar. Conteúdo enganoso, falso contexto ou falsa conexão podem ser *fake news*, mas geralmente são baseados em conteúdos reais que podem ser compartilhados de maneira enganosa não intencional ou com interesses mercadológicos, sem necessariamente a intenção de prejudicar alguém. Sátira é um conteúdo de entretenimento e humor, sem a intenção de prejudicar, portanto não é considerada *fake news*.

Desenvolvimento sustentável (páginas 138 e 139)

2. 97%

Síntese do capítulo (página 141)

3. **a)** Salário: quantitativa contínua; tipo sanguíneo: qualitativa nominal.
b) Classe social: qualitativa ordinal; quantidade de filhos: qualitativa discreta.
c) Grau de instrução: qualitativa ordinal; idade em anos: quantitativa discreta.
d) IDH: quantitativa contínua; nacionalidade: qualitativa nominal.

4. O título sintetiza o conteúdo representado e a fonte de pesquisa identifica a origem dos dados.

5. **a)** Sugestão inadequada. Gráfico de linhas.
b) Sugestão adequada. Esse tipo de gráfico é utilizado para comparar dados entre si. Nesse caso, ele possibilita comparar as taxas de analfabetismo entre as grandes regiões.
c) Sugestão inadequada. Gráfico de barras ou gráfico de linhas.
d) Sugestão adequada. Esse tipo de gráfico costuma ser utilizado quando se deseja fazer uso de recursos visuais em sua apresentação. Nesse caso, seria adequado utilizar, por exemplo, a figura de uma motocicleta para representar certa unidade de vendas mensal.

6. **a)** $Md = 2$
b) Não é possível obter a média aritmética, pois não sabemos a quantidade de salários mínimos recebidos por dois dos funcionários.

7. Sugestão de resposta: Podemos concluir que, em relação às respectivas médias, as notas do 3º **A** são mais dispersas do que as do 3º **B**.

8. Sugestão de resposta: Ponto positivo: possibilita agrupar grande quantidade de dados sem perder a forma de distribuição desses dados; ponto negativo: perdem-se os valores exatos dos dados, uma vez que eles são agrupados em intervalos.

9. Diminuiu. Sugestão de resposta: **I**. Calcular a quantidade de população do gênero feminino, em porcentagem, no Brasil em 2000. **II**. Calcular a quantidade de população do gênero feminino, em porcentagem, no Brasil em 2022. **III**. Calcular a diferença entre as porcentagens encontradas.

CAPÍTULO 4 GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

Exercícios e problemas

1. **a)** Verdadeira.
b) Falsa. Sugestão de correção: Há infinitos pontos que pertencem a um plano e infinitos pontos que não pertencem a ele.
c) Falsa. Sugestão de correção: Três pontos colineares determinam uma única reta.
d) Verdadeira.
e) Falsa. Sugestão de correção: Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então essa reta está contida no plano.

2. **a)** Cinco planos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) Cada vértice da base está contido em três planos: um que contém a base e outros dois que contêm faces laterais. Já o outro vértice (que não pertence à base) está contido nos quatro planos que contêm, respectivamente, cada uma das faces laterais da pirâmide.

3. A construção do item **A**.

4. **a)** • Perpendiculares. • Reversas.
b) Não, pois se $r \perp t$, o triângulo formado por r, t e s teria dois ângulos internos retos, o que é um absurdo.

5. **a)** $\overleftrightarrow{FG}$
b) $\overleftrightarrow{AF}$, $\overleftrightarrow{BG}$ e $\overleftrightarrow{EJ}$.
c) $\overleftrightarrow{DI}$ e $\overleftrightarrow{EJ}$.
d) $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BG}$, $\overleftrightarrow{GH}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{DI}$, $\overleftrightarrow{HI}$, $\overleftrightarrow{EJ}$ e $\overleftrightarrow{AF}$.
e) $\overleftrightarrow{IJ}$, $\overleftrightarrow{DI}$, $\overleftrightarrow{IH}$, $\overleftrightarrow{CH}$, $\overleftrightarrow{GH}$, $\overleftrightarrow{BG}$ e $\overleftrightarrow{FG}$.

6. Sim, pois $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, de maneira que toda reta definida por dois pontos, entre A, B, C e D, é coplanar.

7. **a)** Sugestão de resposta: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.
b) $\overleftrightarrow{HG}$, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. **c)** $\overleftrightarrow{CI}$, $\overleftrightarrow{DI}$, $\overleftrightarrow{EI}$ e $\overleftrightarrow{HI}$. **d)** Ortogonal.

8. Alternativa **c**.

9. **a)** Verdadeira. **b)** Verdadeira.
c) Falsa. Sugestão de correção: Se uma reta r e um plano α são paralelos, então há retas perpendiculares a r que são perpendiculares a α.

10. **a)** Nenhuma. **b)** Concorrente. **c)** $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{HI}$.

11. Concorrentes (perpendiculares ou oblíquas) ou reversas (ortogonais ou oblíquas).

12. **a)** • Contida no plano. • Paralela.
b) $\overleftrightarrow{GH}$
c) $\overleftrightarrow{CH}$ e $\overleftrightarrow{GH}$.

13. Não, pois, por exemplo, considere as retas s e t e o plano α, tais que $s \perp t$, $t \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$. Assim, se uma reta s for perpendicular a apenas uma reta contida em um plano α, então não é possível afirmar que s é perpendicular a α.

14. α e γ.

15. **a)** Falsa, pois dois planos secantes têm uma reta em comum, ou seja, infinitos pontos em comum.
b) Verdadeira.
c) Falsa, pois se dois planos α e β são paralelos, então as retas paralelas a α são paralelas ou estão contidas em β.
d) Verdadeira.
e) Falsa, pois os planos α e β são concorrentes quando têm apenas uma reta em comum.

16. • α e β: concorrentes. • β e θ: concorrentes.
• α e δ: concorrentes.

17. **a)** Sim, pois eles têm apenas $\overleftrightarrow{AB}$ em comum.
b) Não.
c) Os planos que contêm as faces *ABFE*, *BCGF*, *CDHG* e *ADHE*.

18. **a)** Os planos que contêm as faces *IJKL*, *MNOP* e *ABCD*.
b) • 8 planos.
• O plano que contém a face *ABONKJGF*.

19. **a)** Verdadeira.
b) Falsa, pois uma reta não contida em α pode ser paralela a esse plano e estar contida em γ.
c) Verdadeira.
d) Falsa, pois pode haver um plano coincidente a δ.
e) Verdadeira.

20. **a)** • Os planos que contêm as faces *BCFG* e *ADEH*.
• Os planos que contêm as faces *CDEF*, *BCFG*, *ABGH* e *ADEH*.
• O plano que contém a face *ADEH*.
b) Sim, pois as retas $\overleftrightarrow{DC}$ e $\overleftrightarrow{EH}$ não estão contidas no mesmo plano, logo são reversas.
c) Nos planos que contêm as faces *CDEF* e *BCFG*.

21. Há um único plano.

22. **a)** Os planos α e θ são paralelos, logo qualquer reta perpendicular a α é também perpendicular a θ. Logo, o plano θ e a reta r são perpendiculares.
b) Perpendiculares. Não. **c)** Perpendicular.

23. Perpendicular.

24. **a)** Falsa, pois a projeção ortogonal pode ser uma única reta, por exemplo, se uma das retas for perpendicular ao plano de projeção.
b) Verdadeira.
c) Falsa, pois r e s podem ser retas reversas.
d) Falsa, pois a projeção ortogonal de qualquer polígono sobre um plano depende da posição relativa entre o objeto e o plano de projeção.
e) Verdadeira.

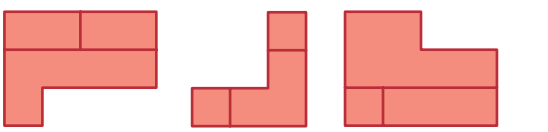
25. Alternativa **b**.

26. • Triângulo. • Segmento de reta. • Triângulo.

27. Alternativa **C**.

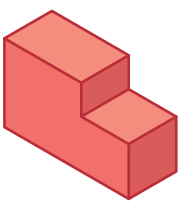
28. **a)** • Os planos que contêm as faces *ABCD*, *IJKL* e *MNOP*.
• Os planos que contêm as faces *ABCD*, *EFGH*, *IJKL*, *MNOP*, *BCFGJKON* e *ADEHILPM*.

b)



vista superior vista frontal vista lateral esquerda

c)



d) I. Sugestão de resposta: Vistas superior e lateral esquerda ou direita.
II. Sugestão de resposta: Vistas lateral direita, esquerda, frontal e superior.

29. **a)** Falsa, pois, se um ponto pertencer a uma reta, a distância entre eles é nula.
b) Verdadeira. **c)** Verdadeira.
d) Falsa, pois somente terão distância nula se o ponto pertencer à reta.

30. **a)** $\overline{MN}$, $\overline{IK}$ e $\overline{JH}$.
b) $\overline{EO}$ e $\overline{GN}$.
c) $\overline{BO}$
d) $\overline{CO}$ e $\overline{KL}$.

31. **a)** Três. **b)** • α e δ.
• α e β; β e δ.
c) $\overline{DH}$ e $\overline{EF}$.

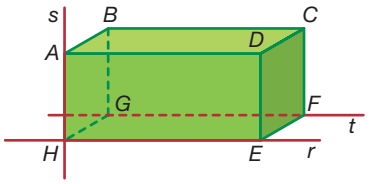
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolvendo por etapas (páginas 157 e 158)

2. Sim, é possível resolver o problema usando o plano apresentado na seção com algumas adequações. Para isso, basta construir um paralelepípedo reto retângulo e traçar as retas r, s e t da maneira apresentada na figura a seguir, em que se pode concluir que $r \perp s$, $r // t$ e que s e t são ortogonais entre si. Isso comprova que a afirmação de Aroldo é verdadeira.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



Trabalho e juventudes (página 163)

1. Arquitetos podem desenvolver projetos em diversos segmentos, desde industriais até hospitalares. Também podem trabalhar com reformas, revitalizações e renovações de estruturas, contribuindo para a modernização e a preservação histórica desses lugares.

Síntese do capítulo (página 167)

3. Os axiomas são afirmações tomadas como verdadeiras, sem a necessidade de demonstrações. Já os teoremas são conclusões baseadas em postulados ou em outros teoremas já demonstrados, necessitando de demonstrações para serem aceitos como verdadeiros.

4. Duas retas quaisquer são paralelas se, e somente se, elas são coplanares e não têm pontos em comum.

5. Não. Como duas retas coincidentes correspondem ao mesmo conjunto de pontos, isto é, são a mesma reta, elas não podem ser paralelas, pois duas retas paralelas são coplanares e não têm ponto em comum.

6. Sim, pois, tomando os pontos A e B distintos de P e não colineares, pertencentes às retas t e u, respectivamente, pelo **postulado 5**, há um plano que os contém.

7. **a)** A reta é paralela ao plano.
b) A reta é concorrente ou secante ao plano.

8. Para que uma reta r seja perpendicular ao plano α, é necessário e suficiente que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes contidas em α.

9. **a)** Verdadeira.
b) Falsa, pois planos paralelos não têm pontos em comum.
c) Falsa, pois planos coincidentes correspondem ao mesmo conjunto de pontos.
d) Verdadeira.

10. A. Segmento de reta.
B. Reta.
C. Ponto.

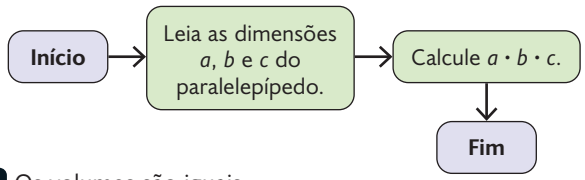
11. **a)** Falsa. A distância entre dois pontos coincidentes é nula.
b) Verdadeira.
c) Falsa. A distância entre uma reta r e um ponto A, não pertencente à reta, é determinada pelo comprimento do segmento de reta AB perpendicular a essa reta, tal que B pertence a r.

CAPÍTULO 5 POLIEDROS

Questões

A.

Início
1. Leia as dimensões a, b e c do paralelepípedo.
2. Calcule $a \cdot b \cdot c$.
Fim



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

B. Os volumes são iguais.

D. Temos um prisma qualquer e um paralelepípedo reto retângulo apoiados em um plano α, ambos de altura h e área da base igual a A. Suponha um plano horizontal β, paralelo a α, que produz seções de áreas A' e A'' no prisma qualquer e no paralelepípedo, respectivamente. Como essas figuras são prismas, então uma seção paralela à base é congruente com essa base. Logo, como figuras congruentes têm áreas iguais, temos $A' = A = A''$.

Consequentemente, pelo Princípio de Cavalieri, o paralelepípedo e o prisma qualquer têm volumes iguais. Como estudamos anteriormente, o volume do paralelepípedo reto retângulo é igual a $A \cdot h$. Assim, o volume do prisma qualquer também é igual a $A \cdot h$, ou seja, o produto da área da base por sua altura.

E. $150\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

I. Sabemos que o volume da pirâmide triangular é um terço do volume do prisma. Além disso, sabemos que o volume do prisma é o produto da área da base pela medida da altura. Assim, temos:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{prisma}} \Rightarrow V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

Exercícios e problemas

1. A. Poliedro.
B. Não poliedro.
C. Não poliedro.
D. Poliedro.
E. Não poliedro.
F. Poliedro.

2. A. 6 faces, 10 arestas e 6 vértices.
B. 8 faces, 18 arestas e 12 vértices.
C. 11 faces, 20 arestas e 11 vértices.
D. 8 faces, 12 arestas e 6 vértices.
E. 7 faces, 15 arestas e 10 vértices.
F. 9 faces, 21 arestas e 14 vértices.

3. A. Convexo.
B. Não convexo.
C. Não convexo.
D. Convexo.

4. A. Quadriláteros.
B. Triângulos e quadriláteros.
C. Quadriláteros e hexágonos.
D. Pentágonos.

5. Alternativa **c**.

7. 7 faces.

8. **a)** Não convexo, pois é possível traçar uma reta, não paralela a nenhuma de suas faces, e cortá-lo em mais de dois pontos.
b) 9 vértices; 16 arestas; 9 faces.
c) Sim, pois $\underbrace{9}_{\text{faces}} + \overbrace{9}^{\text{vértices}} = \underbrace{16}_{\text{arestas}} + 2$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

9. 32 vértices.

10. 4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares.

11. 6 vértices; 12 arestas; 8 faces.

12. 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais.

14. 20 faces e 30 arestas.

15. **a)** 4 faces; 4 vértices; 6 arestas.
b) Tetraedro regular.
c) Todas são triangulares equiláteras.

16. Não, pois o fato de esse poliedro ser de Platão não garante que seja regular. Para que isso ocorra, é necessário que suas faces tenham formato triangular equiláteros e sejam congruentes entre si.

17. 720°

18. A. 8 vértices e 12 arestas. B. 6 vértices e 12 arestas.

20.

Início
1. Leia a quantidade de faces triangulares F do poliedro.
2. Calcule a quantidade de arestas A. Para isso, efetue $A = \frac{3 \cdot F}{2}$.
3. Calcule a quantidade de vértices V. Para isso, efetue $V = A - F + 2$.
Fim

a) • 4 vértices. • 12 vértices.
b) Resposta na página **300**.

21. 60 vértices e 90 arestas.

22. **a)** Prisma regular hexagonal.
b) Prisma regular octogonal.
c) Prisma regular decagonal.

23. **a)** $AD = 10$ cm; $AK = 5\sqrt{13}$ cm.
b) Área: 75 cm²; perímetro: $5 \cdot (5 + \sqrt{13})$ cm.

24. $a = 3$ cm, $c = 4$ cm, $h = 12$ cm.

25. Comprimento: 9 cm; largura: 12 cm; altura: 15 cm.

26. 7 cm, 8 cm e 9 cm. **27.** Aproximadamente 8,5 cm.

28. **a)** $2\sqrt{3}$ cm **b)** 6 cm

29. 24 cm

30. A. 96 cm² C. 108 cm²
B. $375\sqrt{3}$ cm² D. $162\sqrt{3}$ cm²

31. **a)** 3 cm **b)** $6 \cdot (1 + \sqrt{2})$ cm

32. **a)** 27 000 cubinhos. **b)** 344 cubinhos. **c)** $\frac{1}{900}$

33. **a)** $225\sqrt{3}$ cm²
b) $A_l = 2\,700$ cm²; $A_t = 450 \cdot (6 + \sqrt{3})$ cm²

34. Aproximadamente 0,0025 L ou 2,5 mL. **35.** 3,46 cm

36. **a)** Caixas de base hexagonal: aproximadamente 550 cm²; caixa de base quadrada: 256 cm².
b) Aproximadamente R$ 0,60.

37. **a)** Aresta da base: 8 cm; aresta lateral: 16 cm.
b) 512 cm²

38. **a)** $x = 2$ cm
b) Área da base: 496 cm²; área lateral: 188 cm².

39. **a)** Aproximadamente 108 405 cm² ou 10,8405 m².
b) Aproximadamente R$ 67,75.

40. **a)** 24 cm **b)** 3 120 cm²

41. **a)** $\frac{1}{9}$
b) Peça cúbica maior: 486 cm²; peça amarela: 54 cm².

42. **a)** $a = 3$ cm, $b = 6$ cm e $c = 9$ cm.
b) $3\sqrt{14}$ cm
c) Área da base: 18 cm²; área lateral: 162 cm².

43. **a)** Aproximadamente 8,8 cm.
b) Área da base: aproximadamente 43,25 cm²; área lateral: aproximadamente 264 cm².

44. **a)** Resposta na página **301**. **45.** 88 cm²

46. **a)** Padrão **1**: 38,49 m³; padrão **2**: 77 m³.
b) Padrão **1**: 73,9 m²; padrão **2**: 135,27 m².

47. 4 cm **48.** Alternativa **c**.

49. **a)** 1680 cm³ **b)** 960 cm³ **c)** 6 cm

50. 36 m³

51. **a)** $\frac{1}{8}$ **b)** 12,5 cm

52. A medida de c deve ser aumentada em 25%.

53. **a)** Aproximadamente 124,7 m³. **b)** 798,08 m³

54. 27 000 L **55.** 7,5 L

56. Alternativa **a**. **57.** 4 h 30 min

58. Aproximadamente 16,46 m³. **59.** Alternativa **b**.

60. **a)** 20 cm **b)** Aproximadamente 610,27 cm².

61. **a)** 210 blocos. **b)** 12,6 m³

62. **a)** 2,5 m, 15 m e 15 m. **b)** 562,5 m³

63. Aproximadamente 10 dias.

64. **a)** 23 bancos. **b)** 4 latas.

65. **a)** Variação de 0 m² na área interna e redução de 2,8 m³ na capacidade máxima.

66. Área: aproximadamente 97,2 cm²; volume: 200 cm³.

67. 8 cm **68.** Aproximadamente 108,8 cm³.

70. • O número total de arestas é igual ao dobro do número de lados do polígono que compõe a base.
• O número de faces da pirâmide é igual ao número de lados do polígono que compõe a base mais 1.

71. **a)** 4 cm **b)** $4\sqrt{10}$ cm **c)** $2\sqrt{3}$ cm **d)** $2\sqrt{39}$ cm

72. Menor aresta: 3 cm; maior aresta: $5\sqrt{2}$ cm.

73. $2\sqrt{2}$ cm

74. **a)** $3\sqrt{3}$ cm² **b)** $4\sqrt{3}$ cm²

75. **a)** 10 dm **c)** 100 dm²
b) $5\sqrt{2}$ dm **d)** $100 \cdot (1 + \sqrt{5})$ dm²

76. 8 cm **77.** **a)** $12\sqrt{55}$ cm²

78. 2 000 telhas. **79.** $2\sqrt{3}$ cm²

80. Faltará; 9 cm². **82.** 6 m³

83. 1 cm e 12 cm; 2 cm e 6 cm; 3 cm e 4 cm.

84. **a)** • 3 cm **b)** • $6\sqrt{3}$ cm² **c)** $6\sqrt{2}$ cm³
• $\sqrt{3}$ cm • $6 \cdot (3 + \sqrt{3})$ cm²

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

85. $\frac{1}{2}$ **86.** 8 anos e 4 meses.

88. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm³ **89.** Aproximadamente 245 g.

90. a) $400\sqrt{3}$ cm² b) $\frac{20}{3}$ L

91. $250\sqrt{6}$ dm³ **92.** $9 \cdot \left(8 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ m²

93. a) 4 cm b) $128\sqrt{2}$ cm² c) $32 \cdot \left(4\sqrt{2} + 5\right)$ cm²

94. $24\sqrt{3}$ dm²; $34\sqrt{3}$ dm² **95.** 16 cm; 10 cm; $4\sqrt{3}$ cm

96. $4 \cdot \left(25 + 14\sqrt{2}\right)$ m² **97.** $\frac{637}{3}$ mm³

98. 24 500 cm³ **99.** Aproximadamente 5,9 cm.

100. a) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$ b) $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ c) $\frac{7a^3\sqrt{3}}{8}$

101. a) 9 m b) 4,632 m³

102. a) 63 cm² c) $9 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 3\right)$ cm³

b) $36 \cdot \left(\sqrt{5} + 6\right)$ cm³

103. $114\sqrt{3}$ cm³ **104.** 2 975 L **105.** $\frac{12\,800}{7}$ cm³

Acessando tecnologias (páginas 172 e 173)

1. A quantidade de vértices é 8.

2. Resposta na página **301**.

Educação midiática (páginas 182 e 183)

1. Por meio da ação dos algoritmos que coletam dados e informações sobre preferências e interesses dos usuários a partir de suas interações *on-line*, filtrando os conteúdos para que só cheguem as informações alinhadas aos interesses e opiniões deles.

Desenvolvimento sustentável (páginas 208 e 209)

1. Tratar dos patrimônios culturais da humanidade e a importância de preservá-los, trazendo como exemplo o Complexo de Pirâmides de Gizé, no Egito, especificamente a Grande Pirâmide, apresentando algumas características dessa construção.

2. Aproximadamente 84 308 m². **3.** 2 524 921 m³

Síntese do capítulo (página 215)

3. 9 vértices e 16 arestas.

5. a) 30 arestas e 20 faces. b) Icosaedro regular.
c) Sim, todo poliedro regular é um Poliedro de Platão.

6. Poliedro **A**: 12 faces, 20 vértices e 30 arestas; poliedro **B**: 20 faces, 12 vértices e 30 arestas.

7. Deve-se multiplicar as medidas do comprimento, da altura e da largura.

8.

Início
1. Leia o comprimento g do apótema da pirâmide.
2. Leia o comprimento m do apótema da base.
3. Calcule $g^2 - m^2$.
4. Calcule a raiz positiva de $g^2 - m^2$.
Fim

9. Sugestão de resposta: Multiplicaria a medida do volume por três e dividiria esse resultado pela medida da altura.

10. 302 cm³

CAPÍTULO 6 CORPOS REDONDOS

Abertura de capítulo

1. 27%

2. Uma possibilidade para determinar a altura aproximada em que a marcação de 50 mililitros deve ser feita é calcular a altura de um cilindro cujo volume interno mede 50 mililitros (ou 50 centímetros cúbicos) e o comprimento do raio da base, 1,5 centímetro. Para calcular a altura aproximada em que a marcação de 100 mililitros deve ser feita, o procedimento é o mesmo, porém consideramos um cilindro cujo volume interno mede 100 mililitros (ou 100 centímetros cúbicos) e o comprimento do raio da base, 1,5 centímetro.

Questões

B. Seja um prisma e um cilindro apoiados em um plano α, ambos de altura h e área de base igual a A. Vamos supor um plano β, paralelo a α, que produz seções de áreas A' e A'' no prisma e no cilindro, respectivamente. Como figuras congruentes têm áreas iguais, então $A' = A = A''$. Consequentemente, pelo Princípio de Cavalieri, o prisma e o cilindro têm volumes iguais. Como estudamos anteriormente, o volume do prisma é igual a $A \cdot h$. Assim, o volume do cilindro também é igual a $A \cdot h$, ou seja, o produto da área da base por sua altura.

D. Seja um cone e uma pirâmide apoiados em um plano α, ambos de altura H e área da base igual a A. Se um plano horizontal β, paralelo a α, distando h do vértice dessas figuras, intersecta ambas produzindo seções de áreas A' e A', então: $\frac{A'}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A''}{A}$. Ou seja, $A' = A''$. Pelo Princípio de Cavalieri, o cone e a pirâmide têm volumes iguais. Como estudamos anteriormente, o volume da pirâmide é igual a $\frac{A \cdot H}{3}$. Assim, o volume do cone também é igual a $\frac{A \cdot H}{3}$, ou seja, um terço do produto da área da base pela altura.

Exercícios e problemas

1. A. $A_b \simeq 12{,}56$ cm²; $A_l \simeq 62{,}8$ cm²; $A_t \simeq 87{,}92$ cm².
B. $A_b \simeq 28{,}26$ cm²; $A_l \simeq 169{,}56$ cm²; $A_t \simeq 226{,}08$ cm².

2. Aproximadamente 129 525 cm² ou 1 295,25 dm².

3. Aproximadamente 10 cm. **4.** Aproximadamente 5 m.

5. a) Aproximadamente 6,94 m².
b) Aproximadamente 346,97 m².

6. a) Aproximadamente 150,72 unidades de área.
b) Aproximadamente 251,2 unidades de área.

7. Aproximadamente 282,6 cm².

8. Aproximadamente 10 097,5 mL.

9. Aproximadamente 2,45 L.

11. Aproximadamente 863,5 m².

12. Aproximadamente 19,625 cm².

13. Aproximadamente 0,6 g.

14. A. Aproximadamente 56,52 m³.
B. Aproximadamente 502,4 m³.
C. Aproximadamente 169,56 m³.
D. Aproximadamente 565,2 m³.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

15. Aproximadamente 251,2 cm^3.

16. $\sqrt{5}$ cm **17.** Aproximadamente 113 040 L.

18. A. Aproximadamente 50,24 cm^3.
B. Aproximadamente 743,55 cm^3.

19. Aproximadamente 8 cm. **20.** Alternativa **c**.

21. **a)** Aproximadamente 1394,16 cm^2.
b) Aproximadamente 3 227,92 cm^3.

22. **a)** Aproximadamente 6 798,1 cm^3.
b) Aproximadamente 53 201,9 cm^3.

23. Alternativa **c**.

24. Aproximadamente 663,33 cm^3.

25. Aproximadamente 12 cm.

26. Alternativa **c**. **27.** Alternativa **c**.

28. 5 pontos. **29.** 40 min

30. Aproximadamente 2 960,2 cm^3.

31. Aproximadamente 15,7 m^3.

32. Aproximadamente 55,7 kg.

33. 80 mm **34.** Aproximadamente 12 cm.

35. Aproximadamente 28 cm.

36. Aproximadamente 4,55 cm.

37. **a)** Embalagens **A** e **C**.
b) Embalagem **C**.
c) Aproximadamente R$ 11435,00.

38. Aproximadamente 15 cm.

39. Alternativa **a**.

40. Aproximadamente 4 096 cm^3.

42. Peça vermelha: 14 cm; peça azul: 12 cm; peça roxa: 10 cm; peça verde: 8 cm; peça amarela: 6 cm.

43. Alternativa **c**. **44.** Aproximadamente 9161 m^2.

45. **a)** Aproximadamente 3768 cm^2.
b) Aproximadamente 1130,4 cm^2.

46. $8\sqrt{13}$ cm

47. A altura h, o raio r e a geratriz formam, nessa ordem, os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Assim:

$(2r)^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow h^2 = (2r)^2 - r^2 \Rightarrow h = r\sqrt{3}$

Portanto, a altura é $r\sqrt{3}$.

48. Alternativa **c**. **49.** Aproximadamente 854,08 cm^2.

50. Alternativa **C**.

51. A. Aproximadamente 401,92 cm^3.
B. Aproximadamente 127,17 cm^3.
C. Aproximadamente 39,25 cm^3.
D. Aproximadamente 37,68 cm^3.

52. Aproximadamente 15 cm. **53.** 200 mL

54. Aproximadamente 904,32 cm^3.

55. Aproximadamente 4,56 cm.

56. Aproximadamente 134 cm^3. **57.** Alternativa **A**.

58. **a)** Aproximadamente 28,26 cm^3.
b) Aproximadamente 9,42 cm^3.

59. Aproximadamente 9 992,3 cm^3.

60. $\frac{b}{a}$, em que a e b indicam, respectivamente, o comprimento do menor e do maior cateto do triângulo.

61. Aproximadamente 3165 sacas. **63.** Alternativa **c**.

64. **a)** 2,49 g **b)** 8,2 cm

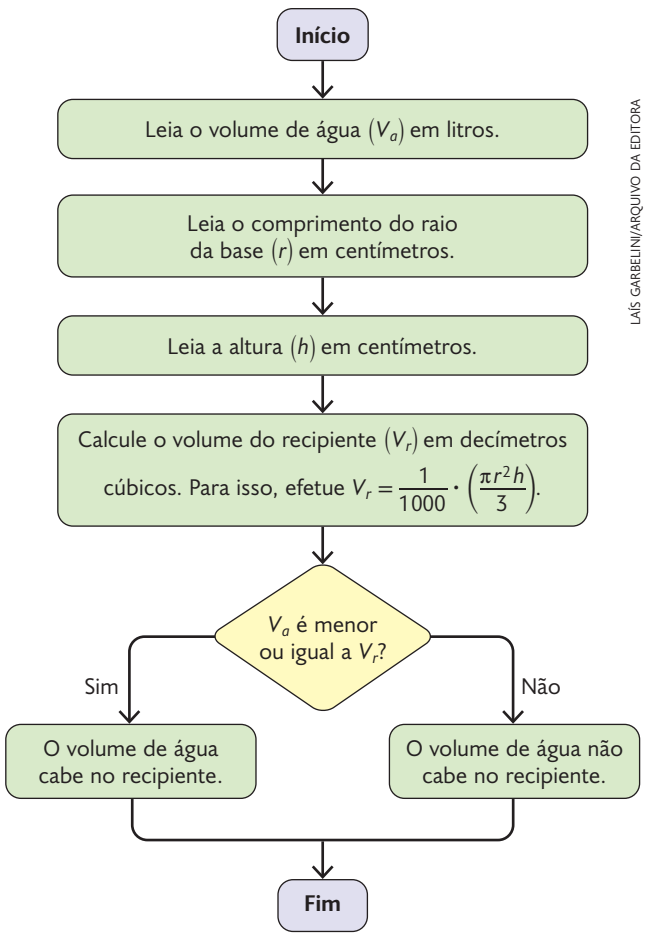
65. Aproximadamente 1929,2 cm^3.

66. Aproximadamente 1,2 m.

67.

Início
1. Leia o volume de água (V_a) em litros.
2. Leia o comprimento do raio da base (r) em centímetros.
3. Leia a altura (h) em centímetros.
4. Calcule o volume do recipiente (V_r) em decímetros cúbicos. Para isso, efetue $V_r = \frac{1}{1000} \cdot \left(\frac{\pi r^2 h}{3}\right)$.
5. Se $V_a \leq V_r$, então a água cabe no recipiente.
6. Se $V_a > V_r$, então a água não cabe no recipiente.
Fim

Por fim, organizamos o fluxograma.



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

68. Aproximadamente 23,61 cm^3.

69. Não. Sugestão de resposta: Para calcular a altura do reservatório cônico, é necessário apresentar o comprimento do diâmetro ou do raio da base.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

70. Alternativa **A**.

71. **a)** $4\sqrt{3}$ m **b)** 64π m³

72. A. Área: aproximadamente 1130,4 cm²; volume: aproximadamente 2110,08 cm³.
B. Área: aproximadamente 2135,2 cm²; volume: aproximadamente 7108,96 cm³.
C. Área: aproximadamente 2776,7 cm²; volume: aproximadamente 5861,33 cm³.

73. **a)** Raio menor: 8 cm; raio maior: 24 cm.
b) Aproximadamente 628 cm²; aproximadamente 5425,92 cm².

74. Alternativa **e**.

75. **a)** 18 cm; 9 cm **b)** 12 cm **c)** 810π cm²

76. Aproximadamente 2813,44 u.a.

77. Aproximadamente 602,88 cm².

78. Aproximadamente 3948,55 cm².

79. A. Aproximadamente 25773 cm³.
B. Aproximadamente 7790 cm³.
C. Aproximadamente 47728 cm³.

80. Aproximadamente 7108,96 cm³.

81. **a)** Aproximadamente 175,84 cm³.
b) Aproximadamente 715,92 cm³.

82. Aproximadamente 5496 cm².

83. 4 latas.

84. Aproximadamente 60 dm.

85. **a)** Aproximadamente 2505,72 cm³.
b) Aproximadamente 1879,29 mL.

86. Aproximadamente 12 cm.

87. 12 cm

88. Aproximadamente 65940 L.

89. **a)** Aproximadamente 263,76 mL. **b)** 5 xícaras.

91. Aproximadamente 11817,4 L.

92. Aproximadamente 3517 cm³.

94. **a)** $\frac{20}{3}$ dm **b)** Aproximadamente 625,21 dm³.

95. 142,5 cm **96.** Aproximadamente 904,32 cm³.

97. Aproximadamente 14,13 cm³.

98. Aproximadamente $7{,}1 \cdot 10^6$ mm³; aproximadamente $8{,}0 \cdot 10^6$ mm³.

99. 6400 km **100.** Aproximadamente 14130 cm³.

101. **a)** 7,232 g **b)** $2\sqrt[3]{6}$ cm

102. 6 **103.** 6589 cm³

104. $V_B = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot (2r)}{3} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$ e $V_C = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$. Assim:

$V_B + V_C = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3} + \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = 2 \cdot \pi \cdot r^3 = \pi r^2(2r) = V_A$

Portanto, $V_A = V_B + V_C$.

105. 54π cm³ **106.** Aproximadamente 2,5 cm.

107. Aproximadamente 78,5 cm².

108. Aproximadamente 314 dm².

109. 759,88 m²

110. **a)** Aproximadamente 113040 cm³.
b) Aproximadamente 24,3 cm.

111. 144π cm²

112. 900π cm²

113. **a)** 15° **b)** 21435733 km²

Acessando tecnologias (páginas 232 e 233)

1. O volume do recipiente, em centímetros cúbicos, dividido por 1000 deve ser menor do que o volume de água, em litros, que se deseja armazenar no recipiente.

2. Resposta na página **302**.

Resolvendo por etapas (páginas 254 e 255)

2. Sim. No máximo, 9 pedras de gelo.

Síntese do capítulo (página 259)

3. Sugestão de resposta: Cálculo do volume interno de um copo com formato cilíndrico ou de tronco de cone; cálculo da área da superfície do planeta Terra.

4. **a)** Verdadeira. **c)** Verdadeira.
b) Falsa. **d)** Verdadeira.

5. Sugestão de resposta: 1º. Calcule a área A_b de uma das bases do cilindro; para isso, efetue πr^2. 2º. Calcule a área lateral A_l do cilindro; para isso, efetue $2\pi rh$. 3º. Calcule $2A_b + A_l$; o resultado obtido é a área total do cilindro.

6. Alternativa **c**.

7. Alternativa **c**.

8. Sim, pois, conhecendo esses comprimentos, é possível determinar a altura do tronco de cone reto e utilizar a fórmula de cálculo do volume de um tronco de cone reto.

9. Sugestão de resposta: 1º. Multiplique o volume da esfera por 3. 2º. Divida o produto obtido no passo anterior por 12,56 (nesta etapa, considerou-se $\pi = 3{,}14$). 3º. Calcule a raiz cúbica do quociente obtido no passo anterior. O resultado obtido é o comprimento aproximado do raio da esfera.

10. Esfera; cilindro.

CAPÍTULO 7 PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

Abertura de capítulo

1. Projeção de Mercator, Projeção de Gall-Peters, Projeção de Dymaxion e Projeção de Robinson.

2. Não, pois é impossível representar uma esfera em um plano sem que haja distorções.

Questões

A. Sugestão de resposta: As projeções equivalentes, como é o caso da projeção de Albers.

Exercícios e problemas

1. Alternativa **a**.

2. Azimutal.

3. Alternativa **B**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4. • Projeção de Lambert. • Projeção de Albers.

5. a) **1**: projeção cilíndrica; **2**: projeção cônica.
b) A projeção **2** apresenta deformação de ângulo. Ambas as projeções têm deformação de área.

Acessando tecnologias (página 270)

1. O aplicativo é interativo e mostra o tamanho preciso dos países. Podemos selecioná-los e comparar o tamanho real deles no mapa. Portanto, pode-se dizer que a projeção é equivalente quando permite a utilização da função mover/transportar.

Síntese do capítulo (página 271)

3. Sugestão de resposta: Aplicativo de GPS para se locomover; em mapas de cidades para se localizar ou encontrar endereços; ao planejar viagens utilizando mapas de estradas, entre outras situações.

4. Sugestão de resposta: Como todos os tipos de mapas mantêm as ligações existentes entre as regiões, o posicionamento dos países e a presença dos oceanos, a estratégia seria observar cada um deles e dar enfoque às diferentes características.

Respostas referente ao capítulo **2**

3. a) $\Omega = \{(A,A,V),(A,V,A),(A,V,V),(V,V,A),(V,A,V),(V,A,A)\}$

5. a)

Quadro de possibilidades

Face do dado	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

b) • $A = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$
• $B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
• $C = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$
• $D = \varnothing$
• $E = \{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

9. b) $\Omega = \{\text{R\$ 120,00; R\$ 130,00; R\$ 140,00; R\$ 150,00; R\$ 160,00; R\$ 180,00}\}$

11. a) $\Omega = \{(A,B,C,D),(A,B,D,C),(A,C,B,D),(A,C,D,B),(A,D,B,C),(A,D,C,B)\}$

Resposta referente ao capítulo **3**

60.

Nascimentos diários, em setembro de 2025

Quantidade de nascimentos	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
1	3	3	10%	10%
2	10	13	33,3%	43,3%
3	6	19	20%	63,3%
4	8	27	26,7%	90%
5	3	30	10%	100%
Total	30		100%	

Fonte de pesquisa: Maternidade.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

61. b)

Quantidade de moradores por apartamento, em um condomínio residencial, em janeiro de 2025

Quantidade de moradores	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
0	4	4	10%	10%
1	5	9	12,5%	22,5%
2	12	21	30%	52,5%
3	11	32	27,5%	80%
4	6	38	15%	95%
5	2	40	5%	100%
Total	40		100%	

Fonte de pesquisa: Administração do condomínio.

62. a)

Quantidade média de horas de sono diário dos estudantes de 14 a 17 anos de um grupo de estudos, em fevereiro de 2025

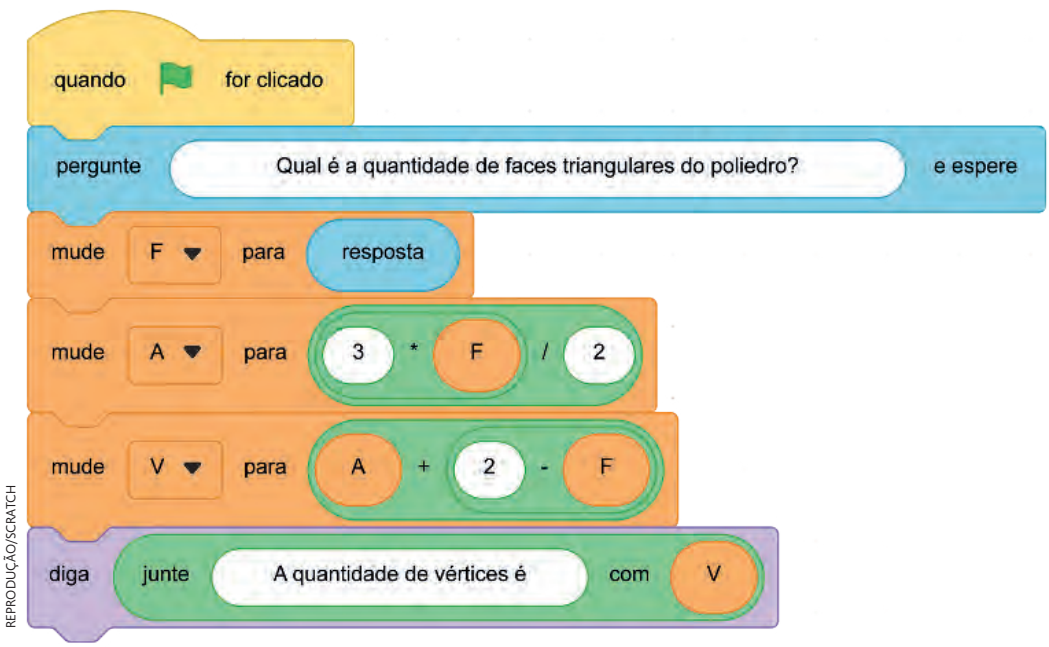
Quantidade de horas de sono	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
4	1	1	3,125%	3,125%
5	2	3	6,25%	9,375%
6	6	9	18,75%	28,125%
7	12	21	37,5%	65,625%
8	6	27	18,75%	84,375%
9	3	30	9,375%	93,75%
10	2	32	6,25%	100%
Total	32		100%	

Fonte de pesquisa: Resultado do questionário.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Respostas referentes ao capítulo **5**

20. b)



REPRODUÇÃO/SCRATCH

44. a) Sugestão de resposta:

Início

1. Leia os comprimentos x, y, w e z, em metros.

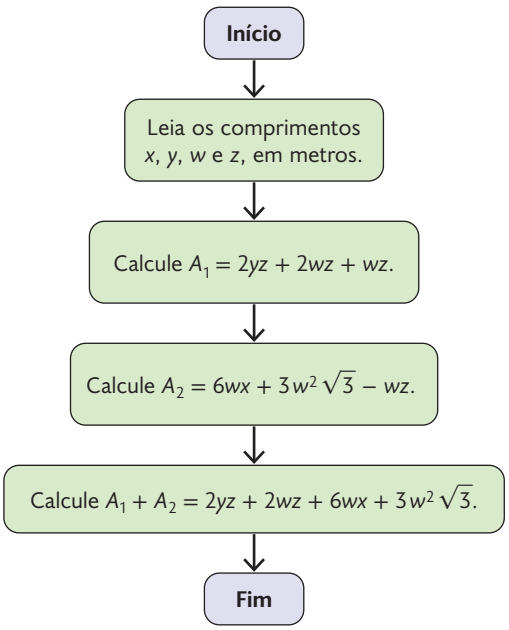
2. Calcule $A_1 = 2yz + 2wz + wz$.

3. Calcule $A_2 = 6wx + 3w^2\sqrt{3} - wz$.

4. Calcule $A_1 + A_2 = 2yz + 2wz + 6wx + 3w^2\sqrt{3}$.

Fim

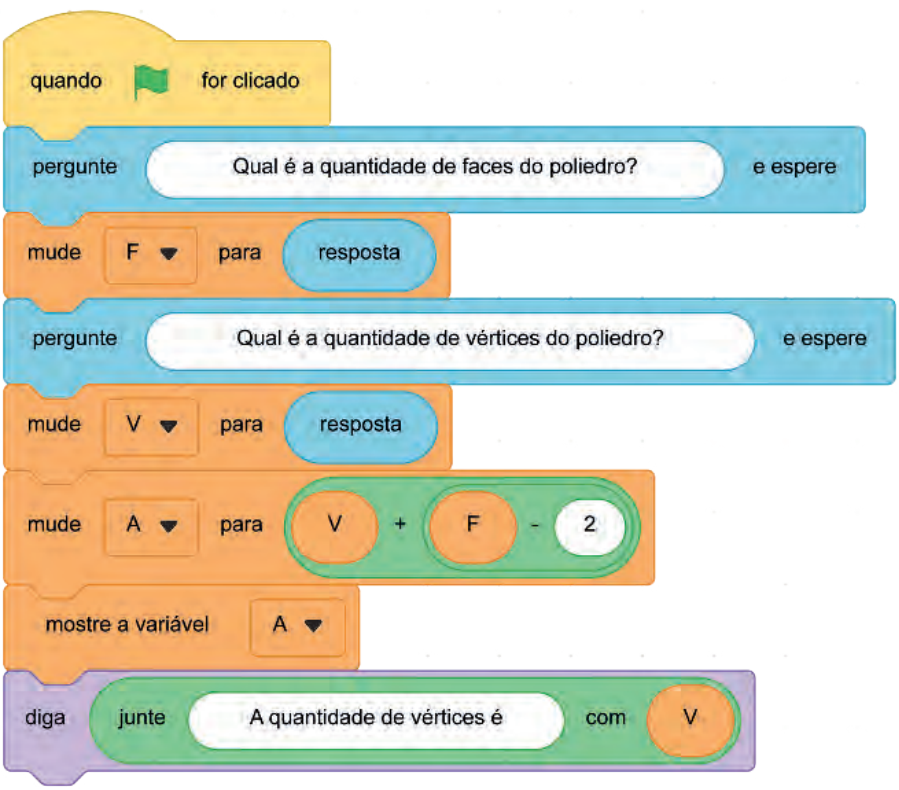
Organizando o algoritmo em um fluxograma, temos:



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Acessando tecnologias (página 173)

2.

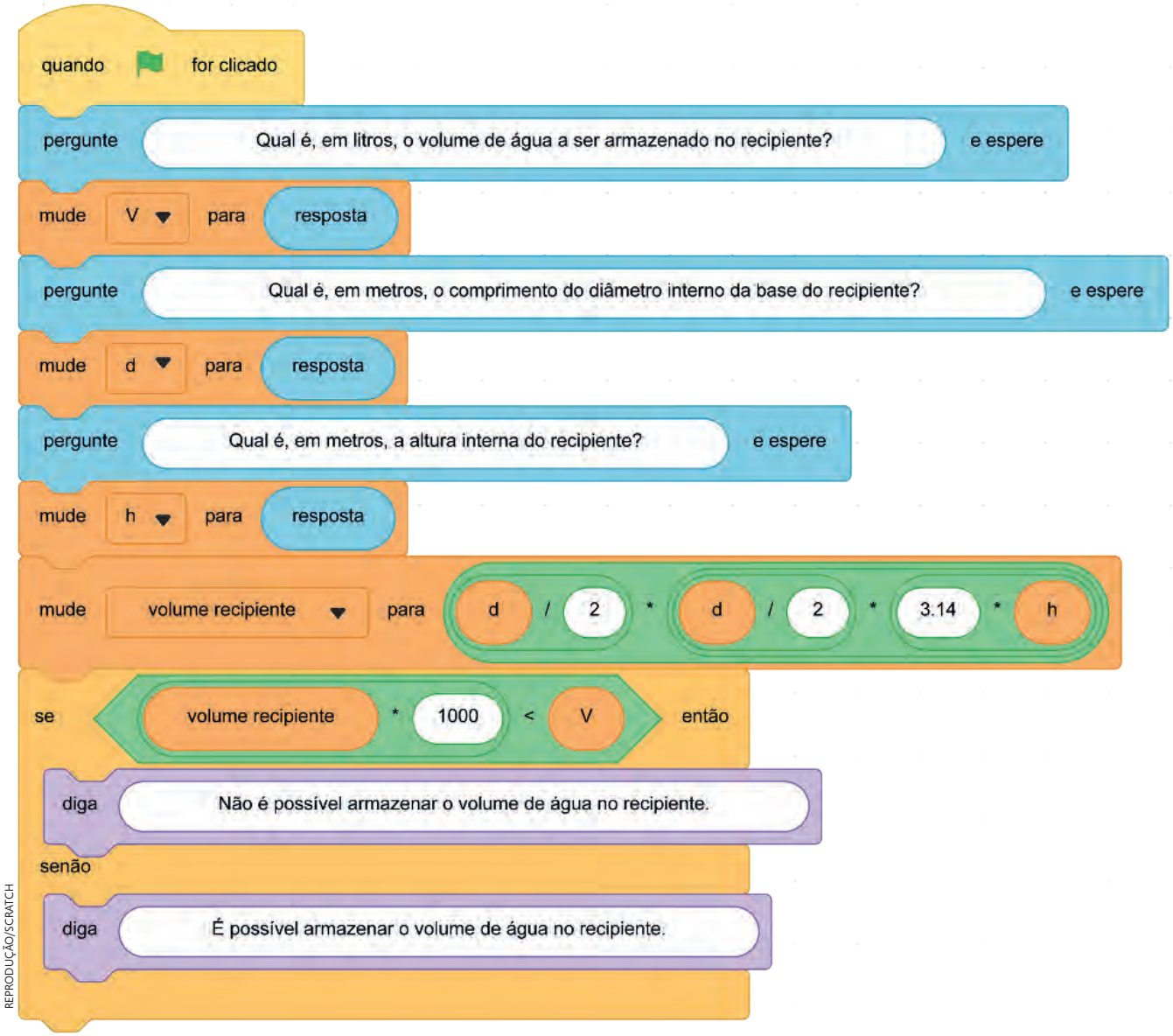


REPRODUÇÃO/SCRATCH

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resposta referente ao capítulo **6** - **Acessando tecnologias (páginas 232 e 233)**

2.



REPRODUÇÃO/SCRATCH

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. *Diálogo e aprendizagem em educação matemática*. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2021.

Nessa obra, os autores discutem como um diálogo efetivo pode melhorar significativamente a qualidade da educação, contribuindo para a maior retenção do conhecimento pelos estudantes.

BADÔ, Fernando. Como funciona o motor de um carro? *Mundo Estranho*, São Paulo, 81. ed., 18 abr. 2011. Disponível em: https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-funciona-o-motor-de-um-carro. Acesso em: 26 out. 2024.

Esse artigo explica o funcionamento do motor de um carro, inclusive as diversas ações que ocorrem no interior de um motor que possibilitam seu funcionamento, além de elucidar alguns termos técnicos envolvidos.

BARRETO, Márcio. *Trama matemática*: princípios e novas práticas no ensino médio. Campinas: Papirus, 2013.

Esse livro oferece uma abordagem acessível e envolvente aos fundamentos matemáticos para estudantes do Ensino Médio, explorando temas como teoria dos conjuntos, funções, álgebra e geometria.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 26 out. 2024.

A BNCC é o documento que norteia os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo os principais conhecimentos, competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. *Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)*. Brasília. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 26 out. 2024.

Esse documento discute a condução do aprendizado nos diferentes contextos e condições de trabalho das escolas brasileiras, de modo a responder às transformações sociais e culturais da sociedade contemporânea, levando em conta as leis e diretrizes que redirecionam a Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211. Acesso em: 26 out. 2024.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio auxiliam as equipes escolares na execução de seus trabalhos, servindo de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática pedagógica, ao planejamento de aulas e, sobretudo, ao desenvolvimento do currículo da escola.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2019.

Nessa obra, o autor propõe a adoção de uma nova abordagem do sistema de ensino e aprendizagem, tecendo considerações a respeito de aspectos relacionados à cognição, à natureza da Matemática e às questões teóricas da educação, além de discutir temas ligados à sala de aula e às inovações na prática docente.

DUARTE, Maria Dolores. A grande pirâmide de Gizé. *Aventuras na história*, 45. ed. 1º maio 2007. p. 22-23.

Esse artigo traz diversas curiosidades e informações históricas a respeito da construção das Pirâmides de Gizé, além de inúmeras implicações políticas que permeiam essa obra faraônica.

GÓES, Natália Moraes; BORUCHOVITCH, Evely. *Estratégias de aprendizagem*: como promovê-las? Petrópolis: Editora Vozes, 2020.

Esse livro oferece uma análise detalhada sobre estratégias eficazes de aprendizagem, abordando quais são essas estratégias e como podem ser aplicadas na prática educativa. As autoras proporcionam atividades práticas, orientações e fundamentos teóricos que auxiliam educadores a melhorar o processo de ensino e aprendizagem. A obra é uma ferramenta valiosa para professores e educadores interessados em otimizar suas metodologias pedagógicas.

LIMA, Diana Maia de; GONZALEZ, Luis Eduardo Fernandes. *Matemática aplicada à informática*. Porto Alegre: Grupo A/Bookman, 2015.

O livro apresenta de maneira clara e objetiva os fundamentos da Matemática aplicada à Informática. Os autores exploram conteúdos essenciais, como lógica

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

matemática, teoria dos conjuntos, relações, funções, matrizes, frações, análise combinatória e probabilidade, demonstrando a aplicação prática desses conceitos na resolução de problemas e na otimização de processos computacionais.

LIMA, Elon Lages *et al*. *Temas e problemas*. 4. ed. São Paulo: SBM, 2022.

Essa obra abrange uma ampla gama de temas matemáticos, desde trigonometria até funções exponenciais, logarítmicas e quadráticas.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. *História na educação matemática*: propostas e desafios. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

Neste livro, os autores abordam a História da Matemática e a História da Educação Matemática, estabelecendo uma relação entre essas duas áreas e o modo pelo qual elas podem se relacionar com a Educação Matemática.

MORGADO, Augusto César de Oliveira *et al*. *Análise combinatória e probabilidade*: com as soluções dos exercícios. Rio de Janeiro: SBM, 2020.

Esse livro aborda análise combinatória e probabilidade de forma aprofundada, destinado especialmente a estudantes do Ensino Médio. Inclui exercícios resolvidos para reforçar o aprendizado, facilitando o entendimento dos conceitos matemáticos fundamentais nessa área.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Geometria*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

Esse livro aborda a geometria utilizando um método lógico-dedutivo, proporcionando um estudo profundo de suas teorias e aplicações práticas. É uma ferramenta essencial para quem busca aprimorar o entendimento matemático e suas aplicações no mundo real, ideal para estudantes e professores interessados em aprofundar seus conhecimentos na área.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Tópicos de matemática elementar*. Combinatória. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2024. v. 4.

Focado na análise combinatória, esse volume guia os leitores por uma revisão dos métodos elementares e uma exploração dos fundamentos da disciplina. Ao destacar teorias e aplicações, o autor busca tornar a Matemática acessível e intrigante, oferecendo um recurso valioso tanto para estudantes quanto para professores interessados em aprofundar seus conhecimentos matemáticos.

O LIVRO da matemática. Tradução: Maria da Anunciação Rodrigues. Rio de Janeiro: Globo Livros, 2020.

Esse livro aborda de maneira simples e concisa diversos conceitos matemáticos, destacando sua aplicabilidade no cotidiano. A obra é uma excelente ferramenta para quem deseja compreender como a Matemática influencia diversos aspectos da vida diária, tornando-a acessível e relevante para um público amplo.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

Nesse livro, são apresentados passos para a resolução de problemas. No final, alguns problemas são propostos ao leitor, seguidos por suas respectivas soluções.

RIFO, Laura. *Probabilidade e estatística*: aspectos de tomada de decisões e incerteza para o ensino fundamental e médio. 2. ed. São Paulo: SBM, 2024.

Esse livro explora a teoria da decisão e apresenta modelos para quantificar incertezas e otimizar escolhas, destinado principalmente a professores do Ensino Básico. Inclui exercícios e atividades que foram aplicados em escolas públicas, visando integrar o ensino de probabilidades, análise exploratória e inferência estatística ao cotidiano escolar.

SKOVSMOSE, Ole. *Um convite à educação matemática crítica*. Campinas: Papirus, 2014.

Esse livro aborda a educação matemática sob uma perspectiva crítica, discutindo os principais aspectos que envolvem essa área. Ole Skovsmose propõe uma reflexão sobre como a Matemática é ensinada e aprendida, destacando a importância de uma abordagem que seja ao mesmo tempo crítica e inclusiva.

Lista de siglas

Enem: Exame Nacional do Ensino Médio

Famema-SP: Faculdade de Medicina de Marília

Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia do Estado de São Paulo

Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular

IBFC: Instituto Brasileiro de Formação e Capacitação

UEA: Universidade do Estado do Amazonas

UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina

Uerj: Universidade do Estado do Rio de Janeiro

UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora

UFMS-MS: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Unesp-SP: Universidade Estadual Paulista

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SUPLEMENTO PARA O PROFESSOR

APRESENTAÇÃO

Um meio de inclusão e democratização de oportunidades é a educação. O Ensino Médio representa um momento decisivo na vida de qualquer indivíduo. Assim, cabe ao livro didático auxiliar professores e estudantes nessa fase, oferecendo-lhes ferramentas úteis no processo de ensino e aprendizagem. Pensando nisso, esta coleção procurou tratar a Matemática e suas Tecnologias como parte integrante do cotidiano dos estudantes, além de estabelecer associação com outros componentes curriculares e com outras áreas do conhecimento.

Tomando diversos documentos oficiais como diretrizes e levando em conta as particularidades das diferentes culturas juvenis, esta coleção contempla os conteúdos essenciais para esse nível de ensino, apresentando-os de maneira contextualizada e empregando uma linguagem clara e objetiva, em uma sequência que favorece a aprendizagem.

O objetivo dessa proposta é possibilitar aos estudantes o desenvolvimento das competências gerais, competências específicas e habilidades listadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), referentes ao Ensino Médio. Porém, é importante que o professor tenha autonomia e consciência de que pode selecionar os conteúdos a serem abordados em sala de aula adotando uma ordem diferente da sugerida no **Livro do Estudante**, de acordo com a proposta didático-pedagógica da escola.

Este **Suplemento para o professor** busca oferecer aos docentes subsídios teórico-metodológicos de maneira a auxiliar seu trabalho no uso desta coleção em sala de aula e em suas demais atribuições.

SUMÁRIO

Estrutura da coleção MP003

O Livro do Estudante MP003

Suplemento para o professor MP004

O Ensino Médio MP005

Organização do espaço e recepção dos estudantes MP005

O estudante do Ensino Médio MP007

O professor MP007

O combate à violência e a promoção da saúde mental dos estudantes MP009

O convívio social em sala da aula MP009

A Base Nacional Comum Curricular na etapa do Ensino Médio MP011

As áreas do conhecimento MP011

Competências gerais, competências específicas e habilidades MP011

Temas contemporâneos transversais MP013

Orientações didáticas e metodológicas MP014

Tendências no ensino de Matemática nesta coleção MP015

O computador e o ensino da Matemática MP016

Interdisciplinaridade MP017

Pensamento computacional MP018

O estudante no centro do processo de aprendizagem MP019

A avaliação MP020

A BNCC e a coleção MP023

Sugestão de cronograma MP023

Panorama do volume MP024

Quadro de conteúdos MP024

Orientações, comentários e sugestões MP026

Capítulo 1 – Análise combinatória MP026

Capítulo 2 - Probabilidade MP030

Capítulo 3 - Estatística MP033

Capítulo 4 – Geometria espacial de posição MP040

Capítulo 5 - Poliedros MP043

Capítulo 6 – Corpos redondos MP046

Capítulo 7 – Projeções cartográficas MP050

Resoluções MP052

Referências bibliográficas comentadas MP094

Referências bibliográficas complementares comentadas MP096

ESTRUTURA DA COLEÇÃO

Esta coleção de Matemática e suas Tecnologias, destinada ao Ensino Médio, é composta de três volumes impressos do **Livro do Estudante**, cada um deles com seu respectivo **Suplemento para o professor**. Além do livro impresso, é disponibilizado o livro digital de cada volume, tanto para o estudante quanto para o professor, que tem como objetivo atender, de forma acessível, todos os estudantes e apresentar recursos digitais, como *podcasts*, vídeos, carrosséis de imagens, infográficos clicáveis e mapas clicáveis.

O Livro do Estudante

Cada volume desta coleção está dividido em sete capítulos, organizados em tópicos, subtópicos e seções. Essa estrutura auxilia o professor em seu planejamento diário e permite ao estudante tornar-se protagonista de seu processo de aprendizagem. Os tópicos e os conteúdos são adequados à essa etapa de ensino e foram selecionados de acordo com as habilidades, as competências gerais e as competências específicas, elencadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), assim como os temas contemporâneos transversais.

A seguir, são apresentados os elementos que compõem a organização do **Livro do Estudante** desta coleção.

Abertura do capítulo

As páginas de abertura apresentam uma temática cujas características permitem estabelecer relações com os conteúdos que serão trabalhados no capítulo. Nessas páginas, há uma imagem representativa, que faz uma conexão do cotidiano com o conteúdo que será abordado; algumas questões, que servem como estratégias de estudos para explorar o conhecimento prévio dos estudantes e promover uma reflexão inicial sobre o conteúdo; e a indicação dos conteúdos que serão desenvolvidos no capítulo.

Desenvolvimento da teoria

A parte teórica, relacionada ao ensinamento de conteúdos e conceitos, é apresentada por meio de tópicos e subtópicos. No desenvolvimento do conteúdo, sempre que possível, são apresentadas situações relacionadas ao cotidiano. Em alguns momentos também é possível notar informações referentes à história da Matemática.

Questão de intervenção

Essas questões, que podem apresentar cunho matemático ou caráter pessoal, estão localizadas na parte teórica e têm o objetivo de levar os estudantes a refletir a respeito das aplicações práticas que envolvem o conteúdo apresentado.

Exercícios e problemas resolvidos

Essa seção tem como objetivo complementar a teoria abordada e os exemplos apresentados no decorrer do capítulo. Ela contribui para o desenvolvimento de tarefas, apresentando resoluções de maneira detalhada, que facilitam a compreensão da aplicação prática do conteúdo em questão. Além disso, ela auxilia os estudantes a exercitar suas habilidades e estratégias na resolução de tarefas que são propostas em outras seções, aperfeiçoando, assim, sua autonomia.

Resolvendo por etapas

Essa seção apresenta aos estudantes diferentes maneiras de organizar o pensamento para solucionar um problema.

Exercícios e problemas

Nessa seção, são apresentadas tarefas relacionadas ao conteúdo estudado no capítulo, organizadas em nível gradual de complexidade, que podem ser exploradas, em sua maioria, em sala de aula. Ela tem como objetivo contribuir para a consolidação do aprendizado e para a recuperação de defasagens dos estudantes.

Acessando tecnologias

Essa seção apresenta propostas de tarefas cujos contextos permitem desenvolver os conceitos estudados com o auxílio de recursos tecnológicos, complementando as estratégias apresentadas. O principal objetivo dessa seção é motivar o uso de ferramentas tecnológicas computacionais, como *softwares* de geometria dinâmica, planilhas eletrônicas e linguagem de programação, as quais permitem aprofundar diversos conteúdos matemáticos. Os recursos sugeridos são disponibilizados gratuitamente na internet, contribuindo, portanto, para a execução das tarefas realizadas por todos.

Educação midiática

Essa seção tem como principal objetivo desenvolver a educação midiática de maneira transversal. Nela, são propostas reflexões a respeito dos conceitos de mídia e informação, promovendo o uso responsável, democrático, ético e crítico dos meios digitais, seja na interpretação, no compartilhamento ou na produção de conteúdo.

Desenvolvimento sustentável

Essa seção desenvolve um trabalho com os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS). Ela tem como principal objetivo explicitar o alinhamento deles com a **Agenda 2030** e ajudar os jovens a reconhecê-los como parte de uma ação global, com desdobramentos práticos em diferentes contextos.

Trabalho e juventudes

Essa seção aborda assuntos do mundo do trabalho que permitem aos estudantes compreender e valorizar diferentes profissões, mapeando possibilidades de inserção profissional. O contexto desenvolvido pode abordar a cultura jovem e apresentar perspectivas profissionais, tanto aquelas relacionadas ao ensino superior, quanto as de caráter técnico, levando os estudantes a refletir sobre a importância de cada profissão.

Síntese do capítulo

Essa seção, proposta como uma estratégia de estudo, apresenta questões analíticas e críticas, com o objetivo de

avaliar o conhecimento, o desempenho e as habilidades relacionadas ao conteúdo abordado no capítulo, levando o estudante a aprimorar a compreensão do que foi estudado.

Ação e participação

Essa seção desenvolve um trabalho interdisciplinar que pode integrar conteúdos de diferentes componentes curriculares e de outras áreas do conhecimento, visando desenvolver nos estudantes habilidades como pensamento crítico, autonomia, criatividade, argumentação, cooperação, cidadania, entre outras.

Para fixar

Esse boxe, proposto como uma estratégia de estudo, apresenta informações complementares sobre o conteúdo matemático trabalhado.

Para expandir

Esse boxe, proposto como uma estratégia de estudo, apresenta sugestões de livros, textos ou vídeos com informações complementares ao contexto relacionado. Em diversas situações, os recursos sugeridos podem ser usados como fomentadores de discussão.

Vocabulário

Informa o significado de algumas palavras que estão indicadas em destaque no texto e são geralmente pouco utilizadas ou desconhecidas por parte dos estudantes, a fim de auxiliar na compreensão do contexto ou teoria apresentado.

Dica

Boxe que traz informações para auxiliar na resolução de exercícios e problemas propostos aos estudantes.

Observação

Nesse boxe, estão apresentadas informações complementares àquelas presentes na parte teórica, nas tarefas ou em seções.

Ser consciente

Ícone utilizado para destacar as tarefas que desenvolvem a formação cidadã, propondo reflexões a respeito de diferentes assuntos, como ética, educação financeira, saúde e cidadania.

Desafio

Ícone utilizado para destacar as tarefas com caráter desafiador, possibilitando o desenvolvimento de estratégias próprias de resolução.

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

Ícones que identificam que o assunto trabalhado tem relação com os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS). Cada ícone é composto pela sigla ODS, o número e o símbolo correspondente ao ODS.

Objeto digital

Ícone que identifica o momento em que é possível acessar um objeto digital relacionado à tarefa ou ao conteúdo.

Ampliando seus conhecimentos

Essa seção apresenta para os estudantes sugestões de livros, filmes, *sites* e *podcasts* para complementar o estudo dos conteúdos trabalhados no volume.

Respostas

Essa seção apresenta respostas de tarefas, atividades e questões presentes no volume.

Referências bibliográficas comentadas

Nessa seção são apresentadas as principais referências teóricas que foram utilizadas como base para a elaboração do livro, com um breve comentário sobre cada uma delas.

Lista de siglas

Essa seção esclarece o significado das siglas de vestibulares e exames de larga escala usadas no volume.

Suplemento para o professor

O **Suplemento para o professor** é constituído de uma parte com orientações gerais, uma parte com orientações específicas para o desenvolvimento dos capítulos e uma seção de resoluções dos exercícios e problemas, finalizando com referências bibliográficas comentadas e referências bibliográficas complementares comentadas. A parte com orientações gerais é composta por: pressupostos teórico-metodológicos que fundamentam a coleção; orientações didático-pedagógicas; relações feitas com a BNCC; quadro de distribuição dos conteúdos do volume; propostas de cronogramas. Já a específica, desenvolvida no tópico **Orientações, comentários e sugestões**, apresenta as principais orientações para o desenvolvimento dos conteúdos, das tarefas e das seções, com comentários sobre o uso de diferentes estratégias de aprendizagem, o desenvolvimento do pensamento computacional, da argumentação e da inferência no decorrer do ano letivo.

A seguir, são apresentados os elementos que compõem a organização do **Suplemento para o professor** desta coleção.

Objetivos

Apresenta os principais objetivos que se almeja atingir no trabalho com os conteúdos do capítulo.

Justificativas

Apresenta as justificativas dos objetivos e dos conteúdos trabalhados em cada capítulo.

BNCC

Destaca e comenta as principais relações entre o que está sendo abordado no Livro do Estudante e o que é proposto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Sugestão de avaliação

Apresenta sugestões de avaliação para que o professor acompanhe a aprendizagem dos estudantes em momentos oportunos.

Tarefa extra

Apresenta sugestões de tarefas extras com o objetivo de complementar o trabalho com o conteúdo e auxiliar na consolidação da aprendizagem.

Educação midiática

Apresenta orientações para o desenvolvimento do trabalho com a seção **Educação midiática** do **Livro do Estudante**.

Desenvolvimento sustentável

Apresenta orientações para o desenvolvimento do trabalho com a seção **Desenvolvimento sustentável** do **Livro do Estudante**.

Trabalho e juventudes

Apresenta orientações para o desenvolvimento do trabalho com a seção **Trabalho e juventudes** do **Livro do Estudante**.

Informação

Apresenta informações que auxiliam ou complementam as orientações apresentadas.

Resoluções

Nessa seção são apresentadas as resoluções de questões, atividades e tarefas propostas no **Livro do Estudante**.

Referências bibliográficas comentadas

Nessa seção são apresentadas as referências teóricas que foram utilizadas como base para a elaboração do **Suplemento para o professor**, com um breve comentário sobre cada uma delas.

Referências bibliográficas complementares comentadas

Nessa seção são apresentadas sugestões de livros, revistas, artigos, *podcasts*, filmes e *sites* para pesquisas e consultas que podem ser complementares aos assuntos tratados no volume e ser usadas como subsídios teórico-metodológicos para o trabalho em sala de aula.

O ENSINO MÉDIO

O Ensino Médio, última etapa da Educação Básica, deve ser compreendido como uma etapa de grande importância política e social, aspecto que supera o conceito de apenas ser uma fase passageira na vida dos jovens. Na verdade, constitui-se como um momento fundamental de protagonismo e de desenvolvimento pessoal. É nessa fase que os estudantes ampliam suas perspectivas culturais, convivendo em um espaço de ampla diversidade de ideias e de opiniões. Também desenvolvem suas capacidades de tomada de decisão, cujo maior desafio é aprender a fazer escolhas coerentes e alinhadas com seu projeto de vida.

Assim, é fundamental que a escola do Ensino Médio desenvolva uma atitude acolhedora das juventudes, estando preparada para os desafios que essa fase exige, principalmente no que se refere à formação profissional e à construção da cidadania. Isso requer condutas que priorizem a construção da autonomia dos estudantes, que em breve atuarão na vida pública sem o acompanhamento de adultos. Desse modo, como podemos preparar os jovens para participar da sociedade de modo responsável?

> [...]
>
> A experiência participativa representa uma das formas de os jovens vivenciarem processos de construção de pautas, projetos e ações coletivas. Além disso, a experiência participativa também é importante por permitir a vivência de valores, como os da solidariedade e da democracia, e o aprendizado da alteridade. O que significa, em última instância, aprender a respeitar, perceber e reconhecer o outro e suas diferenças. [...]
>
> BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Organização: Paulo Carrano, Juarez Dayrell. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013. p. 46.

É no Ensino Médio também que ocorre a preparação mais intensa e aprofundada dos estudantes para os vestibulares e os exames de larga escala, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Esses exames têm como objetivo verificar o desempenho e avaliar o preparo dos jovens para os desafios da vida adulta, seja no âmbito profissional, seja no social. Além disso, as avaliações em larga escala contribuem para monitorar as redes de ensino de modo a oferecer soluções educacionais viáveis por meio de políticas públicas.

Esta coleção apresenta diversos subsídios para auxiliar os estudantes na preparação para esses exames, entre eles o Enem. Nas seções **Exercícios e problemas resolvidos** e **Exercícios e problemas**, por exemplo, sempre que possível, apresentamos questões extraídas diretamente do Enem e de vestibulares para que os estudantes possam se familiarizar com o formato das provas fornecidas por essas instituições. Além disso, há propostas de elaboração de problemas e articulações interdisciplinares e transdisciplinares, com abordagens que podem contribuir para o desempenho dos estudantes em futuras avaliações.

Organização do espaço e recepção dos estudantes

Muitas vezes, o Ensino Médio representa um momento decisivo na vida dos estudantes, que convivem com uma diversidade de sentimentos, expectativas e incertezas. É nessa etapa que eles começam a definir suas trajetórias acadêmicas e profissionais, enfrentando desafios pessoais e explorando novas oportunidades de construção de conhecimento.

Nesse sentido, o acolhimento no ambiente escolar é fundamental para o desenvolvimento emocional e acadêmico e para a formação integral desses estudantes. Cabe ao professor

legitimar as diferenças, escutar ativamente e criar um ambiente seguro, buscando que todos se sintam confortáveis para expressar seus sentimentos e suas necessidades. Perguntar aos estudantes a maneira como eles podem se sentir mais à vontade e como acreditam que podem aprender melhor e incentivá-los a compartilhar experiências de aprendizagem prévias e marcantes são práticas que ajudam nesse processo, promovendo uma relação de confiança e colaboração que favorece o desenvolvimento de habilidades e competências e o crescimento pessoal.

Para acolher os estudantes do Ensino Médio, é importante criar momentos em que eles possam se conhecer e compartilhar práticas e vivências. Atividades como rodas de conversa, produções em que falem sobre si mesmos, sobre o que gostam e o que sabem fazer e a elaboração de um contrato de convivência, mesmo que informal, são estratégias que podem ser mobilizadas. Propor que escrevam uma carta para si mesmos expressando as expectativas para o futuro pode ser uma maneira de autorreflexão. Além disso, abrir espaço para a comunicação, a cooperação e a empatia dentro e fora da sala de aula é determinante para construir um ambiente seguro, de respeito e apoio mútuo.

A forma como o professor age desempenha um papel crucial para ajustar distâncias culturais, sociais e de aprendizagem e para legitimar diferenças, valorizando a diversidade dentro da sala de aula com base no desenvolvimento de atitudes e valores. Ao assumir esse papel, o professor torna-se um facilitador na promoção de um ambiente inclusivo e acolhedor. Isso envolve não apenas reconhecer as múltiplas identidades e experiências de estudantes de diferentes perfis, mas também refletir sobre como esses elementos influenciam o cotidiano educacional. Ao adaptar suas práticas pedagógicas e pensar modos de organização do espaço escolar para melhor atender às necessidades individuais e coletivas dos estudantes, o professor enriquece o ambiente de aprendizagem, fortalece os laços comunitários e promove um senso de pertencimento entre todos os envolvidos na educação escolar.

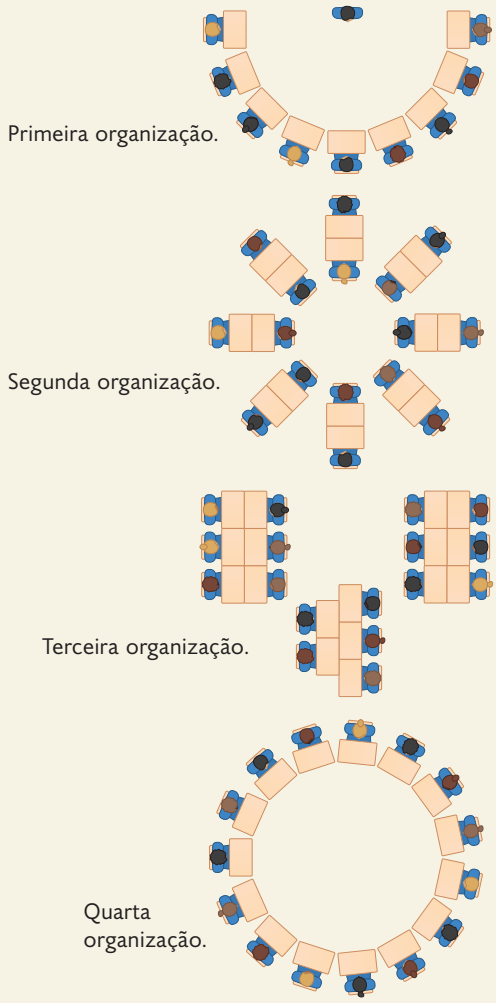
Nesse sentido, a sala de aula deve ser vista como um espaço de encontro e inclusão entre estudantes e professor, no qual a organização é um elemento crucial para potencializá-lo. A formação de um grupo por meio do diálogo, da produção em equipe e do direito à voz deve ser priorizada. É importante considerar o que a sala de aula comunica, criando e organizando um ambiente que promova a interação e o aprendizado. Essa organização passa, segundo Reis, Daros e Tomelin (2023), pelas dimensões física (objetos, materiais e recursos do ambiente), funcional (forma como o ambiente é utilizado), temporal (modo como o tempo é organizado e distribuído) e relacional (relações estabelecidas durante o desenvolvimento das atividades).

[...]

> A sala de aula organizada em fileiras, voltadas para frente, pode ser adequada para as explicações do professor sobre determinado assunto ou para o trabalho individual silencioso, mas é, sem dúvida, pouco interessante para o trabalho colaborativo e comunicativo entre os estudantes.
>
> É importante ter em mente que precisamos mudar a configuração das salas de aula não somente para atender alguma atividade específica, a intencionalidade do trabalho pedagógico, mas também para provocar a aproximação dos estudantes, mudar o seu ponto de vista, promover o contato visual, trazer respiro e vida para a sala de aula, mantendo aceso o interesse e a motivação por aprender.
>
> [...]

REIS, Ana Valéria Sampaio de Almeida; DAROS, Thuinie; TOMELIN, Karina Nones. Layouts *criativos para aulas inovadoras*. Maringá, PR: B42, 2023. p. 22.

As imagens apresentadas a seguir são exemplos de *layouts* para organização da sala de aula.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Na primeira organização, as carteiras estão dispostas em semicírculo e um estudante encontra-se à frente e ao centro. Ela pode ser utilizada para promover a compreensão profunda de conteúdos, incentivando os estudantes a assumir diferentes papéis e perspectivas. A segunda, chamada Mandala da Amizade, pode ser utilizada para promover integração e também ser feita de pé. Na terceira, o trabalho em grupo é favorecido, o que contribui para movimentos colaborativos, enquanto a quarta pode ser utilizada em rodas de conversa, por exemplo (REIS; DAROS; TOMELIN, 2023).

Cada disposição pode favorecer a ocorrência de experiências diversas: há *layouts* que promovem criação de vínculos, colaboração, imersão, investigação, consolidação, avaliação, e o professor deve analisar a viabilidade de utilizar determinada disposição com base nos objetivos que tem e na proposta pedagógica a ser desenvolvida.

[...]

> Neste contexto, pode-se afirmar que, mais do que um espaço físico, é o local que precisa ser dinamizado pela constituição das relações psicopedagógicas e, por isso, deve ser planejado para atender as finalidades educativas. [...]

REIS, Ana Valéria Sampaio de Almeida; DAROS, Thuinie; TOMELIN, Karina Nones. Layouts *criativos para aulas inovadoras*. Maringá, PR: B42, 2023. p. 19.

Para enriquecer o ambiente, é possível, ainda, que as paredes e os espaços visíveis sejam preenchidos com produções, registros e memórias dos estudantes. Esses elementos personalizam o ambiente, tornando-o acolhedor e familiar, e valorizam as conquistas e os aprendizados individuais e coletivos. Ao expor trabalhos, textos significativos e reflexões, os estudantes podem se sentir reconhecidos e motivados a contribuir com o ambiente educacional de forma ativa e contínua e fortalecer o sentimento de pertencimento àquele local e ao grupo que o frequenta.

É interessante que exista flexibilidade na configuração do espaço ao longo do ano letivo. A mudança na disposição física das carteiras e dos demais móveis e objetos pode acompanhar o desenvolvimento das atividades pedagógicas e das necessidades de aprendizagem dos estudantes. Essas variações devem ser acompanhadas de movimentos reflexivos por parte do professor em relação ao alinhamento entre cada disposição, as atividades propostas e a perspectiva que o estudante tem em cada uma delas.

Além da sala de aula, é essencial que o professor explore outros espaços disponíveis na escola, como laboratórios científicos e espaços ao ar livre, como o pátio e a quadra, bibliotecas, áreas de convivência e até mesmo a cozinha. Cada um desses ambientes oferece oportunidades para experiências educativas por meio de experimentos práticos, pesquisas em grupo, leitura e exploração de diferentes mídias, interação social, entre outras. Ao utilizar esses espaços de maneira integrada ao currículo, o professor amplia os horizontes e proporciona a construção de conhecimentos de modo significativo e qualificado.

O estudante do Ensino Médio

Por muito tempo, a juventude foi compreendida como um período de passagem, uma etapa prévia da vida adulta, marcada por uma faixa etária delimitada. Porém, de acordo com o estudioso Juarez Dayrell (2016), as pesquisas têm demonstrado que a juventude deve ser compreendida como uma categoria socialmente construída na qual os jovens se assumem como verdadeiros sujeitos, ou seja, têm determinada origem familiar, estão inseridos em relações sociais, apresentam uma historicidade específica, movem-se por desejos e se constituem como seres ativos e produtores de conhecimento.

> [...]
>
> A juventude constitui um momento determinado, mas que não se reduz a uma passagem. Ela assume uma importância em si mesma como um momento de exercício de inserção social, no qual o indivíduo vai se descobrindo e descortinando as possibilidades em todas as instâncias de sua vida, desde a dimensão afetiva até a profissional. Essa realidade ganha contornos próprios em contextos históricos, sociais e culturais distintos. As distintas condições sociais (origem de classe, por exemplo), a diversidade cultural (a cor da pele, as identidades culturais e religiosas, os diferentes valores familiares etc.), a diversidade de gênero e de orientação afetiva e até mesmo as diferenças territoriais se articulam para a constituição das diferentes modalidades de se vivenciar a juventude.
>
> [...]

DAYRELL, Juarez (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016. p. 27.

Para que as relações possam ser fecundas e mutuamente respeitosas no ambiente escolar, uma opção interessante é investir no trabalho com as diversas manifestações culturais juvenis, ou seja, fazer da escola um território de produção cultural da juventude, e não apenas um local de aprendizado de uma cultura externa ou "adulta". Nesse contexto, o jovem deve se identificar com as produções culturais com as quais convive, deve se sentir incluído e, principalmente, valorizado.

Para realizar esse trabalho de aproximação e de valorização das culturas juvenis, a primeira etapa é compreender o jovem como um sujeito de interlocução, com o qual se pode aprender e expandir os horizontes culturais. Essa aproximação requer uma flexibilidade por parte dos professores, que muitas vezes terão de superar visões estereotipadas e superficiais sobre a juventude atual. Assim, deve-se considerar que os jovens não estão inseridos em uma cultura única. A juventude se constitui como categoria socialmente construída, que deve ser analisada com base no contexto de cada comunidade. Existem jovens, por exemplo, que já estão inseridos no mercado de trabalho e que vivenciam a juventude de um modo muito diferente daqueles que têm mais tempo de lazer ou de estudo.

Compreender as múltiplas culturas juvenis que permeiam o contexto escolar faz parte do processo de inovação que tem marcado o curso educativo nos últimos anos. Em vez de "transmitirmos os saberes" aos jovens, por que não trocarmos e compartilharmos conhecimento, abrindo espaços e criando condições para que as culturas juvenis se expressem no ambiente escolar? Essas novas práticas compõem um caminho de construção coletiva do conhecimento. Sob esse ponto de vista, a aprendizagem passa a ser encarada como uma via de mão dupla, como uma troca e, assim, tende a criar um clima mais saudável e menos impositivo, sendo menos propício ao desenvolvimento de problemas indisciplinares e de relações conflituosas.

O professor

Diante desses novos desafios educacionais, que envolvem, inclusive, a interdisciplinaridade e o trabalho com metodologias ativas e tecnologias, o professor assume cada vez mais o papel de mediador das relações entre os estudantes e o conhecimento, orientando o caminho a ser adotado no processo de ensino e aprendizagem. Essa mediação ocorre de acordo com um planejamento bem definido das aulas, no qual são explicitadas as estratégias de engajamento e protagonismo dos estudantes. Supera-se a postura de um profissional meramente transmissor de informações e almeja-se uma conduta mais interativa, que toma como base a colaboração.

Sabe-se que no Brasil as turmas de Ensino Médio são diversificadas e formadas por grupos de estudantes que têm diferenças nos modos de aprender. O processo de ensino e aprendizagem é complexo e envolve diversas dimensões da vida dos sujeitos. Knud Illeris (2013), por exemplo, descreve a aprendizagem em três dimensões: a de conteúdo, a de incentivo e a de interação. A dimensão de **conteúdo** envolve a aprendizagem cognitiva, relacionada aos conhecimentos que são internalizados. Já a dimensão de **incentivo** se relaciona às sensibilidades, ao equilíbrio mental e às motivações que instigam as pessoas no aprendizado. Por fim, a dimensão de **interação** é aquela que está ligada à sociabilidade e à comunicação do indivíduo.

Desse modo, uma maneira de o professor lidar com a diversidade em sala de aula é identificar em qual dimensão de aprendizagem estão as defasagens dos estudantes. Com esse

diagnóstico, pode-se, então, desenvolver estratégias adequadas ao tipo de dificuldade específica apresentada por eles. Por exemplo, em casos de defasagem na dimensão de interação, o professor poderá desenvolver estratégias de trabalho em grupo e dinâmicas que exijam a troca de ideias. Quando o problema for em relação à dimensão de incentivo, o professor poderá repensar as maneiras pelas quais aquele conteúdo instiga os estudantes e se relaciona com o cotidiano deles.

A fim de contribuir para o processo de adequação dos professores aos novos parâmetros que têm sido delimitados na educação no século XXI, sugerimos a seguir algumas condutas que podem ser utilizadas durante o planejamento e as aulas com turmas do Ensino Médio.

- Analisar os estudantes de modo personalizado, adequando os desafios e as propostas às características de cada um e procurando colocar a diferença como um agregador e um ponto positivo em relação ao coletivo.
- Organizar planejamentos coletivos e individuais para lidar com as turmas como um todo e também de modo personalizado.
- Relacionar os temas e conteúdos à realidade próxima dos estudantes, problematizando as experiências vivenciadas e alinhando os conteúdos aos interesses da turma.
- Dar importância à significação dos conteúdos que serão trabalhados em sala de aula.
- Propor constantemente diferentes maneiras de autoavaliação, permitindo aos estudantes um momento de reflexão a respeito de suas atividades e seu aprendizado e também permitindo ao professor avaliar suas práticas em sala de aula.
- Desenvolver flexibilidade para improvisar, quando necessário, e para adequar as propostas metodológicas à realidade de cada turma.
- Acompanhar a evolução de cada grupo ou estudante, avaliando-a sob uma perspectiva processual.
- Evitar propostas que abordem capacidades meramente interpretativas e que não desafiem os estudantes a desenvolver sua criatividade e seu pensamento crítico.
- Inserir opiniões e sugestões dos estudantes no planejamento das tarefas, considerando suas dificuldades e preferências.
- Capacitar os estudantes em determinadas atividades com as quais eles possam não estar acostumados, como a realização de uma pesquisa bem fundamentada ou a produção de um texto-síntese.
- Gerir o tempo de modo personalizado, observando os ritmos de aprendizagem específicos das turmas.
- Aderir a dinâmicas que alterem o posicionamento tradicional das carteiras em sala de aula, promovendo atividades em grupo e explorando os diversos ambientes da escola.
- Propor trabalhos em grupos, para que os estudantes desenvolvam as capacidades de expressão e de socialização.

Planejamento

A complexidade do trabalho docente está ancorada em diversos fatores, uma vez que ele não se restringe à sala de aula por estar diretamente ligado a exigências sociais e à experiência de vida dos estudantes. Nesse sentido, o planejamento torna-se uma etapa fundamental, pois nele são estabelecidos as diretrizes e os meios de realização do trabalho docente (LIBÂNEO, 2013).

> [...]
>
> O planejamento é um processo de racionalização, organização e coordenação da ação docente, articulando a atividade escolar e a problemática do contexto social. A escola, os professores e os alunos são integrantes da dinâmica das relações sociais; tudo o que acontece no meio escolar está atravessado por influências econômicas, políticas e culturais. [...] A ação de planejar, portanto, não se reduz ao simples preenchimento de formulários para controle administrativo; é, antes, a atividade consciente de previsão das ações docentes, fundamentadas em opções político-pedagógicas, e tendo como referência permanente as situações didáticas concretas [...]
>
> LIBÂNEO, José Carlos. *Didática*. São Paulo: Cortez, 2013. p. 246.

Um bom planejamento ajuda a antecipar possíveis dificuldades dos estudantes e elaborar estratégias para superá-las, contribuindo, dessa forma, para uma construção de conhecimento sólida e contextualizada. Além disso, ao planejar as aulas, o professor pode alinhar seus objetivos pedagógicos com as necessidades e os interesses dos estudantes. O planejamento acaba se configurando como um guia de orientação. Para tanto, deve haver uma ordem sequencial e progressiva que alinhe o que se planeja com a realidade com a qual se vai trabalhar. É importante, ainda, buscar coerência entre os objetivos delineados, os conteúdos a serem trabalhados, os métodos a serem mobilizados e a avaliação que será conduzida no processo.

O planejamento individual permite que o professor organize as aulas de acordo com o ritmo e as características da turma, enquanto o planejamento coletivo, realizado em colaboração com outros professores de Matemática ou de diferentes componentes curriculares, enriquece o processo educativo por meio da troca de experiências e ideias. Essa abordagem interdisciplinar favorece a articulação entre os componentes curriculares e a contextualização dos conteúdos, promovendo o desenvolvimento de habilidades e competências de forma integrada e diversificada.

Nesse sentido, considera-se principalmente três níveis de planejamento: o plano da escola, com orientações mais gerais, o plano de ensino, com a previsão do trabalho docente para um ano ou semestre, e o plano de aula, de caráter mais específico, com a previsão do desenvolvimento do conteúdo para uma aula ou conjunto de aulas (LIBÂNEO, 2013). Ao planejar as aulas, o professor deve sempre considerar o Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola e os currículos municipal e estadual. Esses documentos orientam as práticas pedagógicas e garantem que o ensino esteja alinhado com as diretrizes educacionais estabelecidas. É essencial que o planejamento didático seja flexível e adaptável, permitindo que o professor faça ajustes conforme necessário para atender às especificidades do contexto escolar e das culturas juvenis em sua comunidade educativa.

Em algumas situações, pode ser necessário elaborar um Planejamento Educacional Individual (PEI) para atender às necessidades específicas de estudantes com deficiências ou transtornos. O PEI deve ser cuidadosamente elaborado para garantir que esses jovens tenham acesso a uma educação de qualidade e equitativa, com conteúdos e atividades adaptados às suas capacidades e potencialidades. Essa prática promove a inclusão e

o respeito às diferenças, contribuindo para a formação integral de todos, independentemente do perfil.

Um dos primeiros passos no planejamento é realizar um diagnóstico dos conhecimentos, das habilidades, das atitudes e dos valores prévios dos estudantes. Esse levantamento pode ser feito por meio de avaliações diagnósticas, observações e atividades diversificadas que permitam ao professor compreender o nível de desenvolvimento de cada um. Com base nesses dados, o professor pode planejar as aulas de forma mais assertiva, criando oportunidades para que eles ampliem e aprofundem os conhecimentos.

Por fim, o planejamento deve contemplar práticas e vivências diversificadas, que dinamizem a aprendizagem e contribuam para o pluralismo de ideias e para o desenvolvimento do pensamento crítico e científico. Atividades práticas, projetos interdisciplinares, debates e estudos de caso são exemplos de abordagens que podem enriquecer o ensino de Matemática, tornando-o mais relevante e interessante para os estudantes. Por meio dessas experiências, eles não apenas aprendem os conteúdos curriculares, mas também desenvolvem competências essenciais para a vida em sociedade, como a argumentação, a inferência e a autonomia de pensamento.

O combate à violência e a promoção da saúde mental dos estudantes

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), a adolescência é o período de 10 a 19 anos de idade (BRASIL, 2018c). Nessa etapa da vida, o indivíduo ainda está em desenvolvimento e vários fatores podem interferir em seu comportamento e em sua saúde mental. Trata-se de um período de mudanças e descobertas, no qual o jovem constrói e reconstrói sua identidade. Fatores emocionais associados à realidade social, econômica, histórica e cultural tornam essa parcela da população muito vulnerável mental e emocionalmente.

Entre os problemas relacionados à saúde mental que mais afetam os jovens estão a violência familiar, o *bullying*, o *cyberbullying*, a depressão, a ansiedade e a dependência química.

Os casos de *bullying*, por exemplo, envolvem relações de poder e dominação que provocam violência psicológica e, muitas vezes, física, sem motivos aparentes. Já o *cyberbullying* envolve relações de insultos, intimidação e violência psicológica que são potencializadas, principalmente, por meio das redes sociais.

Tanto o *bullying* quanto o *cyberbullying* podem causar sofrimento às vítimas e ter consequências extremas. Em alguns casos, os indivíduos agressores recebem punição, mas é necessário promover um trabalho de conscientização para que esses jovens possam refletir sobre as próprias ações e analisar os impactos emocionais que elas acarretam nas vítimas. Os jovens que praticam *bullying* geralmente são atraídos por um imaginário preestabelecido de padrões de beleza, comportamento, consumo e configurações sociais. Por isso, as ações de combate a essa prática devem contribuir para a desconstrução desses padrões e para o respeito à diversidade.

Além disso, é preciso analisar o contexto familiar desses jovens, que, muitas vezes, vivem em ambientes onde há violência e/ou negligência. Por essas razões, é imprescindível o papel da escola no cuidado com a saúde mental dos estudantes, combatendo ativamente todos as formas de discriminação e de violência.

Para isso, são necessários programas para prevenir o *bullying* e qualquer outro tipo de violência, além do abuso de substâncias nocivas. Esses programas devem ter a participação da escola, dos familiares, da comunidade e de profissionais, como psicólogos e psicopedagogos. Tal união pode contribuir para detectar os sinais de problemas envolvendo a saúde mental dos estudantes e para tomar as medidas necessárias antes que esse tipo de comportamento resulte em alguma consequência grave.

Como a escola pode contribuir para a promoção da saúde mental dos estudantes?

A escola deve ser um espaço de disseminação do respeito e da proteção social dos jovens, atuando com a participação ativa das famílias. No ambiente escolar, os estudantes podem ser organizados em grupos a fim de possibilitar a troca de experiências em debates mediados por um psicólogo. Assim, os jovens tendem a se sentir mais à vontade para discutir e relatar a própria realidade, compartilhando emoções e descobrindo os gatilhos que os fazem reagir com violência, ansiedade ou tristeza, por exemplo. Trata-se de uma oportunidade para trabalhar o autoconceito, a autoimagem e a autoestima dos jovens.

Averigue a possibilidade de a escola oferecer espaços em horários alternativos para que os estudantes desenvolvam práticas extracurriculares, como esportes, oficinas de teatro, atividades de cuidado com a escola e com os colegas, oficinas de dança, gincanas, competições e simulados. Nesses momentos, é importante incluir estudantes de diferentes perfis. A convivência é essencial para o desenvolvimento do respeito mútuo e da empatia, colaborando com a saúde mental deles.

Atividades envolvendo atitudes solidárias podem contribuir para que os estudantes se coloquem no lugar de outras pessoas, desenvolvendo a empatia. Uma sugestão é promover campanhas de coleta de produtos com o intuito de disponibilizá-los às pessoas vulneráveis e em situação de necessidade assistidas por instituições sociais do município.

Outras atividades podem envolver o futuro dos estudantes, identificando os potenciais de cada um a fim de construir um projeto de vida. Mostrar que as atitudes de hoje influenciam o futuro incentiva-os a refletir sobre suas escolhas e opções. A escola, então, tem o papel de ajudá-los a ultrapassar as barreiras com atividades que envolvam a autoestima, o autoconhecimento e o autocuidado.

O professor deve ficar atento aos sinais que denotem mudança de comportamento dos estudantes e que demandem o encaminhamento para avaliação pela equipe de profissionais que cuidam da saúde mental, ações que contribuem para prevenir transtornos. Para isso, é muito importante que o professor converse com a administração da escola sobre a possibilidade de promover eventos de formação continuada relacionada à saúde mental.

O convívio social em sala de aula

Vivemos constantemente em interação com outras pessoas e dependemos delas em muitas atividades do dia a dia. Por isso, é necessário ter harmonia no convívio social, com proveito mútuo e respeito constante. Não ter preconceitos, compreender as necessidades do outro, aprender a lidar com as próprias limitações e contribuir para criar um ambiente propício para o crescimento em conjunto exige, além de boa vontade, ações de inclusão e integração comunitária.

Na socialização humana, em especial no ambiente escolar, lidamos com indivíduos de diferentes perfis, com diversas crenças e opiniões. Respeitar essas diferenças é dever de cada um e a palavra-chave, em todos os casos, é empatia.

Comumente, a escola é um dos primeiros lugares onde boa parte dos jovens tem contato com outras pessoas. Assim, entre as tarefas do professor está a necessidade de orientar e instruir os estudantes a ser empáticos, desenvolvendo a tolerância, a sensibilidade e, principalmente, o respeito para com os demais. Por meio de práticas saudáveis e bons exemplos, é possível que o professor consiga influenciar os estudantes em um sentido positivo de comportamento socialmente responsável, o qual poderá ter impactos benéficos na sociedade como um todo.

Ações que podem facilitar a construção de um ambiente com essas características incluem, por exemplo, conversas amistosas nas quais, um a um, os estudantes possam expressar suas opiniões e compartilhar suas emoções sobre os mais variados assuntos. Tal prática pode ser incrementada com atividades complementares, como a solicitação de pesquisas extraclasse, para posterior debate construtivo, a respeito de temas como as relações familiares, a importância dos vínculos de amizade, a aceitação de ideias contrárias às nossas e o respectivo respeito, o pluralismo cultural na escola e no ambiente de trabalho, o combate ao racismo, o combate à homofobia, a promoção da paz na comunidade escolar, entre outros.

A Matemática, nesse contexto, pode ser uma ferramenta para analisar dados acerca da distribuição de renda ou das discriminações em razão de etnia, sexualidade, identidade de gênero ou crença, investigando e interpretando as porcentagens de cada grupo sociocultural em diferentes estudos estatísticos. Com base em análises quantitativas, é possível discutir os desafios que a sociedade enfrenta rumo à efetividade da justiça social, que pode ser um ponto de partida para a troca de ideias e o autoconhecimento por parte dos estudantes, inclusive com o envolvimento do professor. Para isso, noções de proporcionalidade, de causas e consequências lógicas e até mesmo da objetividade dos números na descrição dos fenômenos naturais, incluindo os socioeconômicos, são fatores importantes para a compreensão da realidade e também para aumentar a consciência dos jovens de modo a auxiliá-los no embasamento de argumentos.

Ademais, sempre que julgar conveniente, o professor pode conversar com os estudantes, dispondo-se a ouvi-los e incentivando-os a expressar suas ideias. Atitudes desse tipo favorecem o respeito e a admiração mútuos, contribuindo para o engajamento saudável e natural em sala de aula.

Além disso, é importante conversar com os estudantes sobre traçar planos em busca de sonhos e alcançar os meios necessários para consolidá-los pelo próprio esforço. Justamente por essa razão, o planejamento do futuro também está entre os desafios da prática docente.

Nesse processo dinâmico, muitas vezes sem fim, a educação assume um papel importantíssimo, em especial nas peculiares etapas de transição entre a infância e a vida adulta. Ao lado da família, da sociedade e da autodeterminação do próprio sujeito, a escola é o fator mais importante na produção desse despertar de consciência e de responsabilidade no jovem, instruindo-o, tanto quanto possível, na estruturação gradativa e na viabilização sensata de um projeto de vida tão necessário. Tal projeto, constituindo o alicerce em que o futuro do jovem será edificado, deve levar em consideração os múltiplos âmbitos interconectados em que a vida se manifesta: pessoal, educacional, profissional, social, político, moral, intelectual e emocional.

O anseio por objetivos de vida maiores e mais realistas do que aqueles dos primeiros sonhos da infância costuma despontar com ímpeto durante a juventude, e, em geral, os estudantes o desenvolvem de maneira desordenada, cheia de agitação, ingenuidades, inseguranças e receios. Assim, a escola deve se preocupar com a formação integral dos jovens e assumir o compromisso de lidar adequadamente com essas questões, elegendo a construção da autonomia como o eixo central em torno do qual organizar suas atividades.

Como última etapa da Educação Básica, no Ensino Médio tais questões devem ser trabalhadas pelo professor com maior atenção e de maneira mais explícita, ora no contexto das tarefas do componente curricular, ora em conversas com a turma, mas sempre por meio de exemplos e de aconselhamentos que fomentem o delineamento de planos de vida e o recrudescimento do caráter.

Nesse sentido, a trajetória escolar deve ser capaz de dialogar com os jovens, desenvolvendo neles habilidades e conhecimentos que incentivem atitudes efetivas para lidar com os desafios da sociedade, promovendo a maturação de valores que incidirão sobre seus processos de tomada de decisão ao longo da vida. Além disso, ela os prepara para o mercado de trabalho, fornece orientação vocacional e os capacita para eventuais estudos mais complexos no ensino superior ou para aperfeiçoamento técnico em cursos profissionalizantes, conforme as circunstâncias de cada caso.

O estabelecimento do projeto de vida, como já frisado, é um processo dinâmico que conta com diálogos entre jovens, família, amigos, escola e sociedade. Contudo, a liberdade e o protagonismo são exclusivos do indivíduo: é ele que escolherá a própria profissão, decidirá constituir família ou não e direcionará atenção e esforços para a área de seu interesse. Desse modo, o projeto de vida que os estudantes almejam, projetam e redefinem para si ao longo de suas trajetórias, praticamente coincidindo com o desenvolvimento da própria identidade, é apenas motivado e instruído pela escola, nunca imposto por ela. As escolhas devem ocorrer naturalmente em uma multiplicidade de influências, experiências e aprendizagens que enriquecem à medida que se tornam plurais, de tal modo que os estudantes de diferentes perfis aprendem uns com os outros por interação mútua e convívio constante, mediados – e não determinados – pela família, pelo professor, pela escola como um todo e, ainda mais amplamente, pelas conjunturas socioculturais nas quais estão inseridos.

É, enfim, no ambiente escolar que os jovens podem experimentar, de modo controlado, as interações com o outro e com o mundo, vislumbrando, na valorização da diversidade, oportunidades de crescimento para seu presente e seu futuro. É nessa riqueza de motivação que ele deve traçar o próprio caminho, explorando seus talentos e suas potencialidades, assumindo deveres e responsabilidades, aprendendo a fruir e a conter desejos, a dosar razão com emoção, a harmonizar lazer com labor, a mesclar estudos com diversão, e disciplina com curiosidade. Com isso, ele estará apto a constituir-se um ser humano íntegro, seguro de si, cônscio de quem é, dos próprios méritos e das próprias limitações, atento ao seu papel no mundo e ativo quanto às necessidades de seu tempo e de sua comunidade.

A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR NA ETAPA DO ENSINO MÉDIO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que estabelece os principais conhecimentos, competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Com o intuito de substituir o currículo do Ensino Médio isolado em componentes curriculares, a BNCC apresenta, para essa etapa, as aprendizagens essenciais distribuídas por áreas do conhecimento. Assim, para cada área são definidas competências específicas que se relacionam diretamente com as habilidades da área. Essa estrutura constitui a formação geral básica que, segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM):

> [...] é composta por competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e articuladas como um todo indissociável, enriquecidas pelo contexto histórico, econômico, social, ambiental, cultural local, do mundo do trabalho e da prática social [...]

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 22 nov. 2018. p. 5. Disponível em: https://web.archive.org/web/20231025202209/http://portal.mec.gov.br/docman/novembro-2018-pdf/102481-rceb003-18/file. Acesso em: 5 out. 2024.

Além de estabelecer que os conteúdos sejam apresentados por área (formação geral básica), a BNCC prevê, com base nas DCNEM como documento orientador, os itinerários formativos, em que os estudantes poderão escolher, por exemplo, a formação técnica como maneira de complementar a formação escolar.

Com essa estruturação, a BNCC do Ensino Médio articula-se às habilidades e competências do Ensino Fundamental, com o objetivo de consolidar, aprofundar e ampliar a formação integral dos estudantes, possibilitando, assim, a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

As áreas do conhecimento

A etapa do Ensino Médio requer a elaboração de um currículo que integre não só os conteúdos dos componentes de determinada área (interdisciplinaridade), mas também os componentes de outras áreas, estabelecendo relações transdisciplinares.

Áreas do conhecimento e seus respectivos componentes curriculares na BNCC

Áreas do conhecimento	Componentes curriculares
Linguagens e suas Tecnologias	Arte Educação Física Língua Inglesa Língua Portuguesa
Matemática e suas Tecnologias	Matemática
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Biologia Física Química
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Filosofia Geografia História Sociologia

Competências gerais, competências específicas e habilidades

As dez competências gerais da Educação Básica, previstas na BNCC, têm como principal objetivo formar cidadãos conscientes de seu papel na sociedade e que saibam agir de maneira justa. Essas competências se desdobram na construção de conhecimentos e no desenvolvimento de habilidades, valores e atitudes.

Competências gerais da Educação Básica previstas na BNCC

1 – Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2 – Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3 – Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4 – Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5 – Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6 – Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7 – Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8 – Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9 – Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10 – Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 9-10. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 24 set. 2024.

Além das competências gerais, a BNCC estabelece as competências específicas para cada componente curricular. Essas competências determinam o trabalho com habilidades, conceitos e noções que orientam a prática docente e que estão relacionados às unidades temáticas e aos objetos de conhecimento, promovendo também o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio

1 – Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2 – Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3 – Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4 – Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5 – Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 531. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 24 set. 2024.

Habilidades de Matemática e suas Tecnologias desenvolvidas neste volume

(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das

medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 543-546. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 24 set. 2024.

Cabe destacar que as competências específicas e as habilidades estabelecidas para o Ensino Médio, articuladas às aprendizagens essenciais definidas para o Ensino Fundamental, contribuem para o desenvolvimento das competências gerais da Educação Básica. Dessa forma, para que os estudantes desenvolvam as competências gerais, é preciso, primeiro, que adquiram as aprendizagens essenciais de cada área, por meio das habilidades correspondentes, desenvolvendo também os princípios das competências específicas. Ao fazer o planejamento das práticas pedagógicas, o professor deve estar atento aos diferentes graus de amplitude e complexidade das competências (gerais e específicas) e ter autonomia para fazer as adaptações necessárias no que foi proposto no Projeto Político Pedagógico da escola de acordo com a realidade da turma.

Esta coleção foi organizada de maneira a contemplar as habilidades e as competências específicas relacionadas à área do conhecimento **Matemática e suas Tecnologias**, bem como a contemplar as competências gerais propostas na BNCC. Essas relações estão presentes nas abordagens dos conteúdos, nas teorias, nas seções e nas tarefas apresentadas. O **Livro do Estudante** aborda as relações entre as habilidades e/ou competências, de maneira que os conteúdos de Matemática estão destacados, permitindo que tanto os estudantes quanto o professor confiram como esses elementos são desenvolvidos. Já o **Suplemento para o professor** aborda as relações entre as habilidades e/ou competências e os conteúdos da área de **Matemática e suas Tecnologias**, assim como as competências específicas da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, auxiliando o professor a verificar como esses itens podem ser desenvolvidos, a fim de contribuir para a formação integral dos estudantes.

A fim de auxiliar o professor no planejamento do trabalho em sala de aula, são apresentadas a seguir as competências específicas da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias para o Ensino Médio**.

1 – Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

2 – Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

3 – Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 553. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 26 jul. 2024.

Temas contemporâneos transversais

Os temas contemporâneos transversais não são novidade nos documentos oficiais para a Educação Básica. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de 1997, eram chamados **temas transversais** e pressupunha-se que fossem incluídos nos currículos das escolas. Contudo, como os PCNs não tinham caráter obrigatório e os seis temas listados não eram pautados em nenhuma legislação ou norma específica, nem sempre essa inclusão acontecia no contexto escolar.

Com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) de 2013, os Temas transversais receberam o nome de **eixos temáticos** ou **eixos norteadores** e pressupunham que os professores e os estudantes escolhessem temas/assuntos vinculados ao componente curricular que desejassem estudar, contextualizando-os com outros. O trabalho interdisciplinar e transdisciplinar, por meio de eixos temáticos, tornou-se obrigatório a fim de conduzir os estudantes na reflexão sobre a vida em sociedade.

Com a homologação da BNCC em 2018, eles passaram a ser chamados **temas contemporâneos** e tornaram-se referência obrigatória para a elaboração dos currículos. Em 2019, com a publicação do documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC*, passaram a ser chamados **temas contemporâneos transversais** (TCTs). Essa mudança de nomenclatura é pautada na BNCC, que afirma:

> [...] cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma **transversal** e integradora. [...]

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 19. (Grifo nosso). Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 3 set. 2024.

Na BNCC, os TCTs foram distribuídos em seis áreas temáticas, conforme apresentado a seguir.

Temas contemporâneos transversais

Macroáreas temáticas	Temas
Ciência e tecnologia	Ciência e tecnologia
Meio ambiente	Educação ambiental e Educação para o consumo
Economia	Trabalho, Educação financeira e Educação fiscal
Multiculturalismo	Diversidade cultural e Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras
Cidadania e civismo	Diversidade cultural e Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras
Saúde	Saúde e Educação alimentar e nutricional

Os TCTs não pertencem a nenhuma área específica do conhecimento e devem ser abordados por todas elas de maneira integrada e complementar, possibilitando aos estudantes a melhor compreensão da sociedade em que vivem. Seguindo essa premissa, e com o objetivo de orientar o trabalho com os TCTs, esta coleção aborda esses temas por meio de recursos e tarefas, tanto no **Livro do Estudante** quanto neste **Suplemento para o professor**. Essas abordagens são feitas de maneira interdisciplinar e percorrem as áreas do conhecimento, proporcionando aos estudantes a reflexão sobre seu papel na sociedade e contribuindo para sua formação cidadã.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS E METODOLÓGICAS

Esta coleção propõe a contextualização sociocultural do estudante, tornando-o protagonista de seu processo de aprendizagem. Embora a Matemática seja, "[...] por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados [...]" (BRASIL, 2018a, p. 265), o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática tem importância considerável e deve fazer parte, sempre que possível, das tarefas discentes, a fim de produzir questionamentos saudáveis, levantar conjecturas e buscar contraexemplos, entre outras situações. Nesse sentido, em diversos momentos desta coleção a condução dos conceitos busca ferramentas da tendência socioetnocultural, amparada na Etnomatemática, que propõe troca de conhecimento entre professor e estudante, incentivando sua autonomia crítica, criativa e transformadora na aprendizagem de um saber prático e dinâmico. Além disso, a realidade do estudante é, muitas vezes, problematizada e tomada como contexto para explorar novos conceitos e ampliar os conhecimentos prévios deles.

O ponto de partida da tendência socioetnocultural está pautado nos:

> [...] problemas oriundos do meio cultural, das práticas cotidianas. Professor e alunos trocariam seus conhecimentos [...]. Isso se evidencia pelo trabalho pedagógico a partir da abordagem de temas envolvendo o conhecimento cotidiano dos alunos.
>
> [...]

ZIMER, Tania Teresinha Bruns. *Aprendendo a ensinar matemática nas séries iniciais do ensino fundamental*. 2008. 299 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. p. 86-87. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-24062008-162627/publico/TeseTaniaBrunsZimer.pdf. Acesso em: 30 set. 2024.

A Matemática é uma ciência prática e dinâmica, produzida histórica e culturalmente em diversos contextos sociais, em que sua história desmitifica a realidade e estabelece estratégias que incentivam e facilitam as ações dos estudantes, contribuindo para a construção de uma consciência cidadã e democrática. Além disso, as trocas de conhecimentos entre o professor e os estudantes por meio de metodologias ativas objetivam a formação crítica, pessoal e social.

Ademais, os recursos tecnológicos são ferramentas potenciais de ensino ao apoiar a autoprodução de conhecimentos por parte dos estudantes.

Tendências no ensino de Matemática nesta coleção

Sabe-se que os resultados matemáticos são obtidos por meio de deduções pautadas em axiomas, teoremas, corolários, lemas, postulados ou proposições. Grande parte do ensino atual está relacionada à mera reprodução de algoritmos. No entanto, não podemos reduzir a Matemática à simples aplicação de fórmulas e à resolução de exercícios, pois são procedimentos mecânicos, que não possibilitam o desenvolvimento do pensamento crítico do estudante. Com o objetivo de mudar essa abordagem em sala de aula, algumas concepções no ensino de Matemática podem ser adotadas, visando tornar o estudante protagonista do próprio processo de aprendizagem. Entre elas, temos a Etnomatemática, a História da Matemática, a Investigação matemática, a Resolução de problemas e a Modelagem matemática.

No Brasil, o precursor da Etnomatemática é o professor doutor Ubiratan D'Ambrosio. Etimologicamente, Etnomatemática significa a maneira, a técnica ou a arte (*tica*) de explicar, conhecer e entender (*mathema*) a realidade natural e sociocultural em que o indivíduo está inserido (*etno*). Para D'Ambrosio, a Matemática é espontânea e individual, motivada e desenvolvida de acordo com o ambiente social e cultural em que o indivíduo se encontra. Ao sugerir um vínculo entre a Etnomatemática e a sala de aula, D'Ambrosio argumenta que:

> [...]
>
> A proposta pedagógica da etnomatemática é fazer da matemática algo vivo, lidando com situações reais no tempo [agora] e no espaço [aqui]. E, através da crítica, questionar o aqui e agora. Ao fazer isso, mergulhamos nas raízes culturais e praticamos dinâmica cultural. [...]
>
> D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. p. 46.

Nesta coleção, a Etnomatemática é trabalhada em alguns contextos e tarefas que apresentam o conhecimento matemático atrelado a diversas culturas, oportunizando momentos de reflexão quanto ao papel social que a Matemática representa nas relações humanas. Por meio dessa abordagem, é esperado que os estudantes descubram métodos úteis para resolver, de maneira eficaz, problemas em contextos não tão comuns à própria realidade. No tópico **Orientações, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, são apresentadas diversas situações que permitem ao professor promover, com os estudantes, um debate acerca da importância da Etnomatemática.

A História da Matemática, como uma tendência de ensino, excede a descrição de fatos históricos ou a apresentação de biografias de matemáticos famosos. Esse ramo envolve a recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático, favorecendo a contextualização dos objetos de conhecimento. Segundo Lopes e Ferreira (2013), uma dinâmica interessante para introduzir um novo conteúdo em sala de aula é proporcionar aos estudantes o contato com o desenvolvimento histórico desse conceito, apontando, sempre que possível, quais eram as condições sociais, econômicas e políticas que, possivelmente, levaram ao surgimento daquela ideia. Para Miguel e Miorim (2008), o professor pode buscar na História da Matemática o apoio de que necessita para atingir os objetivos pedagógicos que levem os estudantes a perceber:

> [...] (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.
>
> [...]
>
> MIGUEL, Antonio; MIORIN, Maria Ângela. *História na educação matemática*: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2008. p. 53.

Nesta coleção, a História da Matemática é abordada, sempre que oportuno, por meio de situações motivadoras, que propiciam o trabalho com os aspectos históricos dos conceitos envolvidos. Essas situações podem ser encontradas tanto no decorrer das teorias quanto nos enunciados das tarefas propostas.

A Investigação matemática, por sua vez, consiste no trabalho com situações abertas, isto é, situações em que a questão principal não está bem definida. Visto que os estudantes podem tomar diferentes pontos de partida, é provável que os resultados obtidos também sejam diferentes ao final do processo de investigação. O desenvolvimento de atividades de investigação envolve quatro momentos distintos: exploração e formulação de questões; conjecturas; testes e reformulação; justificação e avaliação (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2016). Em um primeiro momento, os estudantes devem reconhecer e explorar a situação-problema proposta, além de formular questões que serão investigadas no decorrer desse processo. Em um segundo momento, eles são levados a organizar os dados coletados e propor conjecturas com base nas informações obtidas até então. Depois, eles devem testar tais conjecturas, verificando sua validade e reformulando-as, caso necessário. Por fim, devem justificar essas conjecturas, avaliando o raciocínio desenvolvido e os resultados obtidos.

Nesta coleção, a Investigação matemática é trabalhada em contextos nos quais os estudantes são levados a: investigar algoritmos e representá-los por meio de um fluxograma; elaborar enunciados de problemas, nos quais eles devem investigar questões parecidas que envolvam os conceitos estudados, tomando-os como base para criar uma nova situação; investigar propriedades matemáticas e estabelecer relações entre diferentes conceitos, de modo a formular conjecturas e validá-las sempre que necessário; entre outros casos.

Outra tendência no ensino de Matemática é a Resolução de problemas, que consiste em trabalhar com situações cujos procedimentos que permitem sua resolução não estão predefinidos. Em primeiro lugar, é preciso definir o conceito de problema. Para Onuchic e Allevato (2011), problemas são situações nas quais não se sabe o que fazer, mas há interesse em solucioná-las. Em outras palavras, são situações que levam o estudante a pensar em algum procedimento de resolução que ainda não está bem definido. Polya (1995), ao tratar da Resolução de problemas no ensino de Matemática, propõe uma heurística de resolução, isto é, resolver um problema

consiste em seguir determinadas etapas. O primeiro passo é compreender o problema interpretando o enunciado. Em seguida, elabora-se um plano de resolução, no qual é possível identificar procedimentos matemáticos que podem ser úteis. Definido o plano, deve-se colocá-lo em execução, encontrando uma solução para o problema. Por fim, a última etapa consiste na comparação dos resultados obtidos com o enunciado do problema, verificando todos os procedimentos utilizados e analisando se a solução é consistente com o que foi solicitado.

Nesta coleção, a Resolução de problemas é abordada na seção **Resolvendo por etapas**, em que são apresentadas situações que complementam os conteúdos trabalhados no **Livro do Estudante**. Por meio de orientações específicas detalhadas em algumas etapas, os estudantes são levados a determinar a resposta do problema proposto. Dependendo do que o professor julgar conveniente, o trabalho com essa seção poderá ser desenvolvido individualmente ou em grupos.

As atividades de cunho predominantemente investigativo, que não têm procedimentos de resolução já determinados, não se restringem apenas à Resolução de problemas ou à Investigação matemática. A Modelagem matemática, como tendência de ensino, também tem como base as atividades investigativas. Porém, o que a diferencia das outras tendências é o fato de que as atividades abordam situações do mundo real, em contextos próximos à realidade dos estudantes. Nesse sentido, ao trabalhar com uma tarefa na perspectiva da Modelagem matemática, os estudantes têm como ponto de partida uma situação-problema cujo contexto está relacionado ao mundo real e cujos dados só serão conhecidos por meio da coleta de informações. Essa etapa leva os estudantes a elaborar problemas que serão investigados por meio da Matemática, resultando em um modelo formado por um sistema conceitual expresso em linguagem matemática. A construção desse modelo matemático requer que os estudantes criem estratégias que os auxiliem na resolução do problema, mesmo que tais estratégias não sejam determinadas *a priori*. Por fim, é necessário que eles determinem a resolução do problema por meio do modelo matemático elaborado, cuja resposta será confrontada com o enunciado, buscando possíveis divergências de valores. Essa interpretação do resultado pode resultar em uma solução que satisfaça o problema ou, então, em uma solução que não seja condizente com as informações previamente apresentadas. Neste último caso, é necessário orientar o estudante a retomar os procedimentos a fim de encontrar o erro cometido e, assim, executá-los novamente com o intuito de encontrar a solução correta. Esse tipo de atividade, além de proporcionar uma aprendizagem significativa, pode causar motivação nos estudantes, visto que são estudadas situações do cotidiano deles. O desenvolvimento de atividades sob a luz da Modelagem matemática exige que o professor desempenhe o papel de orientador, tornando o estudante o próprio protagonista de seu processo de aprendizagem.

Apesar das diferentes características entre as tendências citadas, todas elas destacam o papel do professor distinto do modelo usual de ensino. Quando inserido em atividades com as características descritas, ele deve se tornar um mediador do ensino, na intenção de fazer com que os estudantes utilizem suas habilidades e técnicas na resolução dos problemas e/ou situações que surgirem. Nesse sentido, há dois caminhos que podem ser percorridos: primeiro, o professor encaminha os estudantes na resolução do problema por meio de dicas e orientações que, na verdade, não os auxiliam no desenvolvimento do raciocínio crítico; segundo, o professor, por meio de questionamentos, auxilia os estudantes na resolução da situação proposta sem revelar a solução do problema inicial. Em qualquer caso, cabe ao professor utilizar todo o conhecimento relacionado à sua prática pedagógica para refletir acerca do caminho mais adequado para aquela situação, de acordo com o trabalho que estiver sendo desenvolvido.

O computador e o ensino da Matemática

Os computadores, celulares, *tablets* e outros dispositivos eletrônicos estão presentes em qualquer ambiente, inclusive na sala de aula. Assim, é de se esperar que tais equipamentos passem a fazer parte do cotidiano escolar dos estudantes, contrariando grande parte da população que considera instrumentos escolares apenas a lousa, o giz e o livro didático.

Enquanto alguns professores encaram os equipamentos tecnológicos como eficazes transmissores de conhecimento (informática na educação), outros ainda acreditam que deveria ser criado um componente curricular específico no currículo escolar dos estudantes com o intuito de auxiliá-los a manipular tais equipamentos (educação informática). Mas qual seria a diferença entre esses dois conceitos?

De maneira geral, o objetivo da educação informática é preparar o indivíduo para o mercado de trabalho, ensinando-lhe alguns conceitos computacionais, os fundamentos sobre como um computador funciona e o uso de alguns *softwares* para trabalhos específicos. Já em relação à informática na educação, o computador assume outro papel: sua inserção na rotina escolar tem participação no processo de ensino e aprendizagem. Nesse caso, é possível obter e trocar informações, desenvolver conceitos, entre outras possibilidades.

Focando no segundo conceito, informática na educação, podem surgir algumas perguntas que merecem reflexão.

- De quais maneiras é possível inserir o computador no ambiente escolar?
- Que tipo de contribuição esse instrumento pode trazer para o processo de ensino e aprendizagem?
- Quais são os *softwares* mais adequados para o trabalho em sala de aula?
- Que cuidados devemos ter para que o computador seja uma ferramenta efetiva utilizada para fins educativos?

As respostas para essas e outras perguntas devem surgir de acordo com o planejamento do projeto pedagógico da escola, tendo em vista os objetivos a serem alcançados.

O uso de um computador como recurso didático requer muito mais do que a simples instalação desse equipamento e de como os professores farão uso dele. É necessário que eles sejam capazes de extrair todo o potencial desse equipamento no ambiente escolar. Com o objetivo de alcançar resultados cada vez mais satisfatórios, ao trabalhar com o auxílio da tecnologia, o professor deve explorá-la como uma ferramenta pedagógica capaz de auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. É importante enfatizar que, diante de todas essas transformações, o professor em sala de aula deixa de ser apenas um transmissor de informações para ser mediador do processo de ensino e aprendizagem.

Em certos momentos, especificamente nas aulas de Matemática, a utilização de alguns *softwares* pode facilitar algumas dinâmicas em sala de aula ou propiciar a exploração de algo que seria inviável sem esses recursos. Os *softwares* contribuem de maneira significativa no processo de ensino e aprendizagem, pois são interativos, promovem maior abertura para o desenvolvimento da criatividade dos estudantes, estimulam a pesquisa e auxiliam na construção de um saber coletivo. Portanto, quanto maior a gama de *softwares* distintos conhecidos pelo professor, mais rica, dinâmica e produtiva será a aula ministrada.

Nesta coleção, alguns temas relacionados ao uso do computador em sala de aula são abordados em diversos momentos. Por exemplo, na seção **Acessando tecnologias** são apresentados *softwares* e outros recursos tecnológicos que complementam o ensino dos conteúdos abordados no **Livro do Estudante**. O trabalho com essa seção poderá ser realizado no laboratório de informática da escola ou, ainda, proposto como tarefa extraclasse.

Interdisciplinaridade

A interdisciplinaridade "é o conjunto de relações, interações, diálogos estabelecidos no espaço escolar por diferentes disciplinas" (STECANELA, 2013, p. 27). Ela surgiu pela necessidade de enfrentar a fragmentação disciplinar em que as ciências se dividiram, procurando favorecer a construção de um conhecimento integrador. Nesse sentido, entende-se que o trabalho interdisciplinar é uma abordagem pedagógica que integra conhecimentos de diferentes disciplinas, promovendo a articulação entre os componentes curriculares, permitindo que os estudantes percebam as relações entre diferentes áreas do saber.

> [...]
>
> As vivências interdisciplinares preveem ações articuladas entre os vários campos do conhecimento sistematizado ao integrarem a realidade vivida pelos alunos e ao promoverem a interação entre os educadores que devem estar comprometidos com a ética, com a profissão e, especialmente, com a realidade sociopolítica, construindo uma atitude integrada no desenvolvimento da prática pedagógica, prevendo superar a produção do conhecimento fragmentado na formação do cidadão.
>
> [...]
>
> STECANELA, Nilda. Ler e escrever na EJA: práticas interdisciplinares. *Caderno de EJA*. Caxias do Sul: Educs, 2013. p. 25.

Sendo assim, é salutar destacar que, além de integrar conteúdos, o trabalho interdisciplinar envolve atitude e postura interdisciplinares e se associa a processos de investigação, envolvimento, responsabilidade e troca. A importância desse trabalho no Ensino Médio reside no desenvolvimento de relações múltiplas sobre um saber com base em vivências significativas. Ao conectar diferentes áreas do conhecimento, os estudantes desenvolvem habilidades críticas e analíticas, necessárias para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo. A interdisciplinaridade também favorece a formação integral, preparando os jovens para a vida acadêmica e profissional, em que a capacidade de integrar conhecimentos de diversas fontes é cada vez mais valorizada. Além disso, essa abordagem favorece a colaboração e o trabalho em equipe, fundamentais para o desenvolvimento de competências socioemocionais.

Para que a interdisciplinaridade seja efetiva, é fundamental que ela considere as diversas culturas juvenis e as vivências dos estudantes do Ensino Médio, utilizando nas situações de ensino contextos vinculados à realidade próxima deles. A aprendizagem se torna mais relevante quando os estudantes podem relacionar os conteúdos escolares com as próprias experiências e os próprios interesses. Projetos que envolvam questões locais, culturais ou sociais, por exemplo, permitem que eles vejam a aplicação prática do que aprendem e se sintam mais motivados.

A articulação da Matemática com os componentes curriculares da área do conhecimento de Ciências da Natureza e suas Tecnologias pode ser implementada por meio de projetos que integram conhecimentos para solucionar problemas complexos. Por exemplo, um projeto sobre sustentabilidade ambiental pode envolver cálculos matemáticos para medir a eficiência energética, princípios físicos para entender os processos de produção de energia, conceitos químicos para analisar a poluição e fundamentos biológicos para avaliar os impactos nos ecossistemas. Essa abordagem não só fortalece as competências específicas das áreas, mas também promove uma compreensão integrada dos fenômenos naturais e tecnológicos, contribuindo para a formação integral dos estudantes.

Apesar dos benefícios, a implementação da interdisciplinaridade enfrenta vários desafios. Uma dificuldade importante reside na estrutura tradicional das escolas, que muitas vezes segmenta as disciplinas e limita a colaboração entre os professores. Além disso, a falta de formação específica para docentes e a resistência a mudanças metodológicas podem dificultar a mobilização dessa abordagem. Para superar esses desafios, é essencial promover uma cultura escolar que valorize a inovação pedagógica, oferecendo formação continuada e incentivando a colaboração entre os educadores.

O papel do professor é determinante na implementação da perspectiva interdisciplinar. Como mediador, o professor deve reconhecer a aula como um momento com cultura própria, incentivar a curiosidade e a autonomia de pensamento dos estudantes, estar aberto a novas metodologias e buscar constantemente refletir sobre suas práticas pedagógicas. A colaboração entre os professores de diferentes componentes curriculares é vital para o sucesso da interdisciplinaridade, pois permite a troca de experiências e a cocriação de projetos integrados que enriqueçam os processos de ensino e de aprendizagem.

A BNCC enfatiza a importância da interdisciplinaridade para o desenvolvimento das competências gerais dos estudantes. Segundo ela, a integração entre as áreas do conhecimento é essencial para a construção de uma educação mais contextualizada, diversa e significativa. A BNCC orienta que as escolas adotem práticas pedagógicas que favoreçam a conexão entre os saberes, incentivando uma abordagem integrada e colaborativa do currículo.

Nesta coleção, a interdisciplinaridade é promovida por meio de tarefas e projetos que conectam os conteúdos matemáticos com outras áreas do conhecimento. Os conteúdos são abordados, sempre que possível, com base em contextos reais e próximos à realidade dos estudantes. A abordagem interdisciplinar visa fortalecer as competências matemáticas, desenvolver habilidades críticas e analíticas e preparar os estudantes para enfrentar os desafios acadêmicos e profissionais de maneira ética, consciente, inclusiva e responsável.

Pensamento computacional

Vivemos em uma sociedade na qual a presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) provoca importantes transformações em diversos setores, como na economia, na cultura e na educação. Nesse caso, é importante trabalharmos com programação e conceitos oriundos da ciência da computação, pois, assim, desenvolve-se, por exemplo, capacidades relacionadas ao pensamento computacional.

Mas o que é o pensamento computacional?

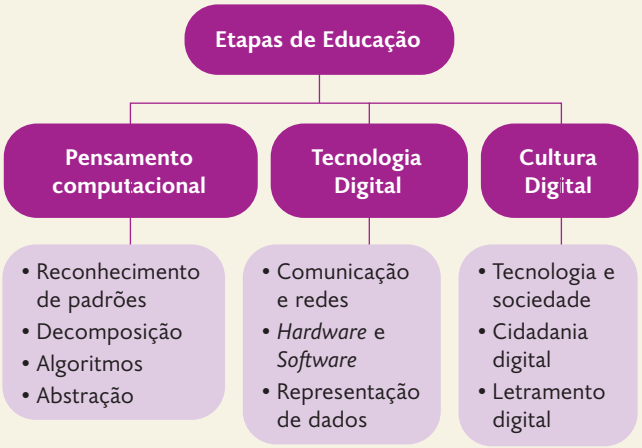
> [...] Pensamento computacional é uma forma para seres humanos resolverem problemas; não é tentar fazer com que seres humanos pensem como computadores. Computadores são tediosos e enfadonhos; humanos são espertos e imaginativos. Nós humanos tornamos a computação empolgante. Equipados com aparelhos computacionais, usamos nossa inteligência para resolver problemas que não ousaríamos sequer tentar antes da era da computação e construir sistemas com funcionalidades limitadas apenas pela nossa imaginação;
>
> [...]

WING, Jeannette. Computational Thinking. Tradução: Cleverson Sebastião dos Anjos. *Communications of the ACM*, n. 3, 2006. p. 4. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711. Acesso em: 5 out. 2024.

Um dos eixos do currículo de referência em tecnologia e computação, do Centro de Inovação para a Educação Brasileira (Cieb), é o pensamento computacional, o qual disserta sobre a resolução de problemas que envolvem tecnologias digitais considerando quatro pilares: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmo (CIEB, 2018; BRACKMANN, 2017).

- **Decomposição:** decompor o problema em problemas menores, conhecidos como subproblemas, mais fáceis de serem resolvidos.
- **Reconhecimento de padrões:** analisar os subproblemas individualmente, com o objetivo de reconhecer padrões e identificar características comuns que ajudam na sua resolução.
- **Abstração:** filtrar, classificar e organizar as informações relevantes ao considerar apenas os dados essenciais para a resolução do problema e ignorar as informações irrelevantes, atingindo uma generalização dos padrões identificados.
- **Algoritmo:** construção de estratégias ou instruções claras e ordenadas que auxiliam a resolução dos subproblemas e, consequentemente, a obter a solução do problema principal.

Para mais informações a respeito do currículo de referência em tecnologia e computação, acesse o *site* do Cieb. Disponível em: https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf. Acesso em: 5 out.2024.



Fonte de pesquisa: CENTRO DE INOVAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO BRASILEIRA (CIEB). *Currículo de referência em tecnologia e computação*. Disponível em: https://curriculo.cieb.net.br/. Acesso em: 5 out.2024.

Como estratégia didática para o desenvolvimento do pensamento computacional, os conceitos relacionados à linguagem de programação, quando o contexto assim solicitar, podem ser utilizados de modo contextualizado a fim de que os estudantes exercitem sua aprendizagem e autonomia para estabelecer relações com situações do cotidiano. O uso de simulações, *softwares* ou equipamentos específicos, por exemplo, pode levar os estudantes a estudar determinados fenômenos reais que dificilmente seriam possíveis sem o auxílio desses recursos.

No Ensino Médio, ao trabalhar com abordagens que desenvolvem o pensamento computacional, deve-se planejar a maneira como as atividades propostas serão efetuadas, considerando diferentes perfis de estudantes, bem como as características de cada turma, além de fazer uso dos recursos disponíveis no ambiente escolar e de perseguir os objetivos a serem alcançados.

Sabe-se que as escolas públicas brasileiras, muitas vezes, não possuem o aparato tecnológico e computacional necessário para o desenvolvimento de atividades com essas tecnologias. Nesses casos, o professor deve recorrer ao trabalho com o pensamento computacional sem o auxílio de recursos tecnológicos, conhecido como pensamento computacional desplugado, ou *unplugged*. Segundo Brackmann (2017), essa alternativa, por ser de fácil aplicação em diferentes realidades, foi pensada justamente com o intuito de atender às escolas públicas que não possuem condições socioeconômicas de ter acesso a computadores ou outras tecnologias. Desse modo, o professor pode aplicar abordagens lúdicas, como truques de mágica e competições entre os estudantes ou, ainda, usar objetos manipuláveis, como jogos (de tabuleiro, de cartas, de peças), livros, fichas, figuras e, até mesmo, o próprio material escolar dos estudantes.

Além disso, de acordo com a BNCC, o pensamento computacional:

> [...] envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos; [...]

[...]

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 474. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 5 out. 2024.

Assim, nesta coleção, o pensamento computacional é incentivado eventualmente: em tarefas que envolvem a organização do pensamento; no registro e na análise de resultados e dados por meio de planilhas e gráficos; no uso de *softwares* de geometria dinâmica; nas construções de algoritmos e fluxogramas; por meio de linguagem de programação usando o *software* Scratch.

O estudante no centro do processo de aprendizagem

Nas últimas décadas, o advento da tecnologia e as discussões envolvendo novos métodos de ensino têm gerado grandes desafios aos professores e às escolas. Estruturas de ensino tradicionais, nas quais professores transmitem conhecimentos aos estudantes, têm sido cada vez mais questionadas quanto ao seu papel efetivo no processo de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, as metodologias ativas são uma maneira de transformar essa realidade, engajando o estudante e tornando o processo de ensino e aprendizagem mais significativo.

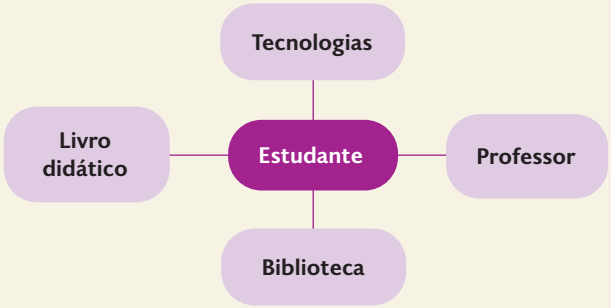
As metodologias ativas

As estratégias de metodologias ativas são um processo de ensino e aprendizagem em que o estudante é o protagonista da construção do conhecimento, tendo o professor como mediador para atingir um objetivo de aprendizagem de modo interativo, dinâmico, reflexivo e colaborativo.

Nesse tipo de abordagem, o professor deixa de ser o transmissor do conhecimento, passando a ser um mediador ao planejar as aulas com foco em orientar e incentivar os estudantes.

> [...] As metodologias ativas dão ênfase ao papel protagonista do estudante, ao seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor [...]
>
> MORAN, J. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. *In*: BACICH, L; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 4.

Ao empregar estratégias de metodologias ativas no processo de ensino e aprendizagem, os estudantes são incentivados a construir o conhecimento de modo integrado às necessidades do cotidiano. Nesse processo, é possível agregar o uso de recursos diversos, como o livro didático usado em sala de aula, os livros disponíveis na biblioteca e os recursos provenientes da tecnologia, como o computador, o celular, a internet e as plataformas digitais.



Considerando esse contexto, esta coleção busca explorar diferentes estratégias de metodologias ativas por meio de tarefas que incentivam o protagonismo dos estudantes. No tópico **Orientações, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, sempre que conveniente, sugere-se o trabalho com a estratégia de metodologia ativa mais adequada para ser adotada naquele contexto específico.

Estratégias

Gallery walk (Caminhada na galeria)

Gallery walk é uma estratégia que desenvolve a habilidade de síntese e estimula a interação, o trabalho em equipe e a socialização do conhecimento. Nela, os estudantes exibem seus trabalhos em cartazes que devem ser afixados em paredes, como obras de arte em uma galeria. Em seguida, a turma circula pela sala, observando os cartazes afixados, debatendo e refletindo sobre o tema proposto.

Há diversas possibilidades de condução dessa estratégia: trabalhos individuais apresentados enquanto a turma percorre a "galeria" em conjunto; circulação livre dos estudantes pela "galeria", colando notas adesivas nos cartazes com dúvidas ou sugestões; entre outras.

Essa dinâmica pode ser aplicada na apresentação, revisão ou mesmo na avaliação de conteúdos. Cabe ao professor definir os objetivos e o tema a serem trabalhados, orientando a turma em relação à tarefa. Durante o processo, o docente assume o papel de observador, permitindo que os estudantes se organizem e intervindo somente se for necessário. Ao final, é importante promover um debate geral com a turma ou fazer uma breve explanação sobre os trabalhos e o processo da *Gallery walk*.

Think-pair-share (Pensar-conversar-compartilhar)

Think-pair-share é uma estratégia de aprendizagem cooperativa que consiste em pensar, individualmente, sobre uma questão ou um problema levantado pelo professor, compartilhar o raciocínio individual com um colega e, em seguida, socializar com um grupo maior os pensamentos e as conclusões aos quais a dupla chegou.

Essa estratégia favorece os estudantes que não se sentem à vontade em compartilhar suas opiniões ou seus conhecimentos com a turma ou com um grupo, mas são capazes de conversar com um colega sobre determinada situação antes de se posicionar diante de um grupo maior.

- *Think*: o professor expõe o problema e o estudante reflete individualmente sobre a situação.

- *Pair*: o estudante reúne-se com um colega para trocar percepções sobre a situação. É interessante que as duplas sejam definidas antes de a questão ser exposta, a fim de que as reflexões dos estudantes não sejam interrompidas para que eles encontrem um par.
- *Share*: as duplas se unem em grupos maiores para compartilhar as conclusões a que chegaram após a discussão conjunta. O grupo discute todas as percepções e chega a uma nova síntese das ideias com base na discussão coletiva. Em outro modelo de socialização, o professor pode pedir a algumas duplas que compartilhem suas conclusões com toda a turma.

Essa estratégia desenvolve habilidades de oralidade e argumentação, além de incentivar os estudantes a ouvir e respeitar diferentes opiniões.

Quick writing (Escrita rápida)

Quick writing é uma estratégia que consiste em escrever uma resposta relacionada a um conteúdo em, no máximo, cinco minutos.

Essa dinâmica desenvolve a fluência na escrita e a capacidade de síntese. A pergunta é feita pelo professor e pode se relacionar tanto aos assuntos estudados quanto à vivência dos estudantes. É possível aplicar essa estratégia baseando-se em abordagens como: explicação de conceitos ou vocabulários de um texto; formulação de hipóteses; ou inferências e explanação de conhecimentos prévios.

Argumentação e inferência

A argumentação e a inferência são pilares importantes para o desenvolvimento do pensamento crítico e do pensamento científico dos estudantes. Essas habilidades favorecem a compreensão dos conteúdos e desempenham um papel significativo na formação cidadã. A argumentação permite que os estudantes construam e expressem opiniões com base em dados científicos e princípios éticos, promovendo um entendimento profundo e crítico da realidade. A inferência, por sua vez, facilita a análise e a avaliação de informações, ajudando os estudantes a desenvolver uma visão ampla e fundamentada sobre os temas discutidos. Juntas, essas habilidades contribuem para uma aprendizagem significativa e para a formação de cidadãos informados e participativos.

Fiorin (2015) considera que um argumento são proposições destinadas a fazer admitir-se uma dada tese. Argumentar é construir um discurso que tem a finalidade de convencer. A argumentação, portanto, pode ser vista como um processo de construção de discurso. Promover práticas fundamentadas em dados científicos e princípios éticos é essencial para garantir que os estudantes desenvolvam uma capacidade argumentativa sólida e responsável. Por meio da argumentação bem fundamentada, eles podem aprender a analisar situações de forma coerente e ética.

Inferência é a capacidade intelectual de se afirmar a verdade de uma proposição com base em informações disponíveis ou outras proposições já consideradas verdadeiras. O desenvolvimento da capacidade inferencial permite aos estudantes analisar e avaliar informações de maneira crítica, favorecendo um entendimento abrangente e profundo dos conteúdos estudados. Ao aprender a fazer inferências, os estudantes desenvolvem habilidades de análise e síntese, essenciais para a construção de argumentos robustos e para a resolução de problemas complexos.

Diversas atividades e estratégias podem ser empregadas para desenvolver as habilidades argumentativas e inferenciais dos estudantes. Debates estruturados, estudos de caso, simulações e produções de vídeos, por exemplo, permitem que os estudantes pratiquem a construção e a defesa de argumentos ao mesmo tempo que aprendem a ouvir e considerar diferentes pontos de vista. É importante que o professor incentive essas interações em um ambiente respeitoso e que acolhe os diferentes pontos de vista.

A análise crítica de textos também é uma estratégia profícua, pois ajuda os estudantes a identificar e avaliar argumentos, além de detectar falácias e fragilidades argumentativas. Outras práticas, como a pesquisa, a elaboração de relatórios e a apresentação de seminários, promovem a mobilização prática das habilidades argumentativas e inferenciais, contribuindo com a aprendizagem.

Nessa perspectiva, trabalhar com textos, reportagens e postagens em redes sociais pode ser uma opção interessante para ajudar os estudantes a identificar digressões, generalizações indevidas e incoerências. Essa análise crítica permite que os estudantes desenvolvam uma compreensão sobre como construir e avaliar argumentos de forma coerente e fundamentada. A prática contínua dessa habilidade contribui para o aprimoramento da capacidade argumentativa dos estudantes e para a construção de um pensamento crítico e analítico.

Para apoiar o desenvolvimento das habilidades argumentativas e inferenciais, é fundamental utilizar uma variedade de abordagens e práticas diversificadas. Além disso, é importante considerar os diferentes perfis e necessidades dos estudantes, ajustando as práticas pedagógicas para garantir que todos possam participar e se beneficiar das atividades propostas. Nesse sentido, a contextualização das atividades de argumentação e inferência é central para atender às necessidades e aos perfis diversos.

É importante, ainda, que o professor estabeleça uma reflexão contínua sobre a adequação das práticas utilizadas, para garantir que todos os estudantes desenvolvam suas habilidades argumentativas e inferenciais de maneira apropriada. O professor deve, também, avaliar regularmente as estratégias e as atividades implementadas, ajustando-as conforme necessário para melhorar os resultados da aprendizagem. Essa abordagem reflexiva e adaptativa permite que o ensino seja consistente e acolhedor. A prática da reflexão crítica é um componente importante para assegurar que a formação integral dos estudantes seja alcançada.

A avaliação

A etapa escolar do Ensino Médio busca o desenvolvimento **integral** dos estudantes. Os objetivos pedagógicos, portanto, de acordo com as orientações da BNCC, devem propiciar o desenvolvimento de **competências** não apenas no sentido de **saber**, mas principalmente de **saber fazer**. Desse modo, nesta coleção, os estudantes são envolvidos em situações de estudo que perpassam suas necessidades e seus interesses, ampliam seus conhecimentos e permitem a mobilização desses conhecimentos visando atender às demandas do mundo onde vivem.

Portanto, a **avaliação das aprendizagens** desses estudantes, como parte indissociável do processo de ensino e aprendizagem, deve estar alinhada a esses objetivos na atividade escolar.

A prática avaliativa tem sido cada vez mais reconhecida por sua importância, pois auxilia o trabalho do professor, e por seu caráter legítimo na validação da condução didático-pedagógica. Desse modo, faz-se necessário compreender a essência de algumas modalidades de avaliação e implementá-las de acordo com os objetivos definidos para cada momento do processo de ensino e aprendizagem.

Avaliação diagnóstica

Toda avaliação tem caráter diagnóstico, pois tende a obter informações sobre a aprendizagem dos estudantes. Essa é uma prática muito importante ao iniciar um conteúdo, pois, por meio dela, é possível identificar os conhecimentos prévios de cada um. Desse modo, é possível tomar decisões sobre seu planejamento de ensino, caso seja necessário complementá-lo ou resumi-lo.

Avaliação somativa

Em geral, é aplicada ao final do estudo de um conteúdo e pode valer-se de diferentes tipos de instrumentos. Fornece dados ou informações que sintetizam os avanços das aprendizagens dos estudantes em relação a tal conteúdo. Busca, de maneira pontual e conclusiva, sintetizar e registrar os resultados verificados, com finalidade informativa ou classificatória.

Avaliação formativa

É parte integrante de todo o processo de ensino e aprendizagem, pois busca melhorias na atividade em curso. Oferece subsídios que respaldam a interferência no processo de atuação do professor e de aprendizagem dos estudantes, com vistas ao seu aprimoramento. Desse modo, permite a retomada e a revisão de conceitos e temas, além do ajuste da prática pedagógica.

Avaliação comparativa

Consiste em comparar o desempenho dos estudantes tendo como referência um padrão externo, um critério estabelecido, uma norma ou outros grupos de estudantes. Permite analisar o que os estudantes aprenderam em relação ao que deveria ter sido ensinado, e seus resultados podem auxiliar o professor na tomada de decisões a respeito de sua prática pedagógica. Pode ser feita por meio de provas padronizadas, simulados, relatórios e exames de larga escala.

Avaliação ipsativa

O progresso do estudante é analisado tendo como referência o próprio estudante. Em vez de compará-lo com os outros, observa-se como ele evoluiu em relação a si mesmo, levando em conta suas próprias metas e seus objetivos de aprendizagem. O foco, portanto, está no desenvolvimento individual, na evolução e no crescimento pessoal do estudante.

Avaliação em larga escala

Tendo como responsável o Ministério da Educação, as avaliações em larga escala são elaboradas por instituições vinculadas ao governo. Seu principal objetivo é avaliar e monitorar a situação da educação no país. Por meio dos diagnósticos obtidos, é possível orientar reformas e apoiar políticas públicas que visem a melhoria do sistema educacional brasileiro. O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e a Prova Brasil são exemplos de avaliações em larga escala nacionais.

A avaliação e o trabalho do professor

Alguns fatores são fundamentais para que a prática avaliativa possa contribuir de modo efetivo com o professor em seu trabalho diário.

A avaliação e a prática pedagógica

É possível observar casos de práticas avaliativas que se limitam, na maioria das vezes, a uma verificação resumida de notas, seguida de progressão e certificação. Essas práticas, em geral, estão relacionadas a encaminhamentos pedagógicos em que o professor é um transmissor de conhecimento e os estudantes, meros receptores. Por outro lado, em algumas metodologias, nas quais o estudante assume parte importante no processo de construção e ampliação de seu conhecimento, a avaliação preocupa-se mais com "como" o estudante aprende e menos com "o que" ele aprende. Portanto, o acompanhamento das aprendizagens dos estudantes está intrinsecamente relacionado à **opção teórico-metodológica** escolhida, ou seja, o modo como se avalia diz muito sobre o modo como se ensina, e vice-versa.

Uma prática constante

A avaliação não deve ser estanque ou limitada a determinados momentos. Uma prova ao final do estudo de um conteúdo não é suficiente para obter todas as informações necessárias sobre a aprendizagem de cada estudante. Desse modo, a **diversificação** de dinâmicas e instrumentos de avaliação, assim como o registro das informações que ela fornece sobre o processo de aprendizagem, devem ser analisados e confrontados constantemente, a fim de embasar o prosseguimento do trabalho do professor.

Há diferentes maneiras de **registrar** a trajetória dos estudantes em relação à sua aprendizagem. Muitos professores fazem relatórios de observação diária, constroem um portfólio ou anotam comentários em um diário de aulas. Esses registros podem conter descrições ou conceitos que indiquem o progresso ou as dificuldades dos estudantes de maneira individual, em pequenos grupos ou de toda a turma. Com base neles, é possível decidir sobre a retomada de explicações, sugestões de leituras ou atividades paralelas, que auxiliem o acompanhamento dos estudantes em relação aos objetivos de aprendizagem estabelecidos. Esse **aspecto qualitativo** da prática avaliativa exige do professor uma postura ativa, reflexiva e reguladora em relação ao processo de ensino e aprendizagem. E, portanto, é inevitável que a avaliação seja **constante** e esteja inserida em diversos momentos desse processo.

A seguir, apresentamos um modelo de **relatório** que pode auxiliar no acompanhamento da aprendizagem dos estudantes. Lembramos que esse relatório figura como modelo que pode (e deve) ser adaptado de acordo com as necessidades e a realidade de trabalho de cada turma ou escola.

Modelo de relatório de acompanhamento da aprendizagem

Nome do estudante _____

Componente curricular _____ **Ano** _____

Período letivo do registro _____ **Turma** _____

Objetivos, habilidades da BNCC e atividades propostas avaliadas

Objetivos/habilidades ou atividades propostas	NÃO consegue executar	Executa com DIFICULDADE	Executa com FACILIDADE	Apresentou progressos	NÃO apresentou progressos
Reconhecer algumas unidades de medida de base do Sistema Internacional de Unidades (SI).					
EM13MAT103					
Síntese conclusiva da utilização de diferentes unidades de medida de base pertencentes ou não ao SI.					

MODELO

Observações: _____

Instrumentos de avaliação diversificados

Independentemente do instrumento de avaliação que o professor decida utilizar, é fundamental que os objetivos a serem atingidos estejam bem definidos. Obter **indicadores** da aprendizagem dos estudantes deve ser a essência de cada instrumento de avaliação elaborado pelo professor. Portanto, provas objetivas ou discursivas, seminários, produções de textos, sínteses de pesquisas, debates, dramatizações, produção de esquemas ou desenhos e trabalhos em grupo ou individuais estão entre as variações possíveis.

Quanto ao professor, é preciso esclarecer os **objetivos** de ensino a serem investigados em relação à aprendizagem dos estudantes. Já os estudantes devem receber, por parte do professor, toda e qualquer **orientação** possível sobre a dinâmica proposta, de modo que estejam conscientes a respeito de como e quando serão avaliados.

Mas por que a avaliação deve ter essa **diversificação**? Porque os estudantes são diferentes, aprendem de maneiras distintas e expressam-se também de modos diversos. Alguns têm mais facilidade em aprender ouvindo explicações, enquanto outros precisam ler textos, resumos ou esquemas. Há aqueles que demonstram o que sabem por meio de conversas ou debates, mas apresentam dificuldade para se expressar por meio da escrita. Enquanto alguns têm facilidade em compreender raciocínios lógico-matemáticos, outros têm destreza na produção de textos.

A variedade de estratégias, como dinâmicas em grupo ou individuais, ou de participação anônima, por exemplo, também é um recurso que auxilia no trabalho com grupos de **diferentes perfis**. O incentivo à socialização e à junção de grupos heterogêneos, a relevância dos temas de estudos e o envolvimento dos jovens também são fatores que podem tornar eficaz o trabalho de professores e estudantes no processo de ensinar, aprender e avaliar.

A avaliação nesta coleção

Nesta coleção, a opção por um trabalho que destaque o protagonismo dos estudantes do Ensino Médio apresenta **oportunidades constantes** de avaliação do processo de ensino e aprendizagem, privilegiando **dinâmicas diversificadas**, em especial aquelas fundamentadas em **metodologias ativas**. Para tanto, no trabalho com as diferentes unidades temáticas, são propostas dinâmicas e tarefas variadas, com a exploração de diversos recursos (textuais e imagéticos), ocasiões que permitem o acompanhamento do professor em relação à aprendizagem dos estudantes.

Também são disponibilizadas, no tópico **Orientações, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, diversas orientações com dicas pontuais, alinhadas aos objetivos de ensino e a uma avaliação formativa. Destacamos o boxe **Sugestão de avaliação**, que apresenta, em geral, orientações específicas para os momentos de avaliação, com sugestões de como obter informações a respeito da aprendizagem dos estudantes, e possibilidades de escolher o melhor procedimento a ser tomado.

Em alguns momentos, como no desenvolvimento da seção **Síntese do capítulo**, é possível propor aos estudantes que façam uma **autoavaliação**, ferramenta que colabora com o propósito de que eles assumam o protagonismo no processo de formação do conhecimento. Essa proposta de reflexão a respeito de sua aprendizagem, participação, limitações e potencialidades deve ser mediada pelo professor como um processo construtivo e positivo, para que não se encaminhe de modo depreciativo e interfira na autoestima dos estudantes. Ao contrário, deve ser encarada e assimilada como um procedimento de verificação dos caminhos possíveis para superar os diferentes desafios que a vida lhes colocará.

Em se tratando de desafios, esta coleção também se preocupa em preparar os estudantes para os **exames de larga escala**. Para isso, a condução dos estudos é norteada pelo objetivo de desenvolver **habilidades** e **competências** que permitam o embasamento em conhecimentos científicos, o exercício da criatividade, a resolução de problemas com base em saberes interdisciplinares e transdisciplinares, a valorização da cultura em suas diversas expressões, e expressar-se e argumentar por meio de diferentes linguagens, inclusive a tecnológica e a digital, agindo com respeito a si mesmo e aos outros, sempre com responsabilidade.

A BNCC E A COLEÇÃO

Cada volume desta coleção foi organizado e desenvolvido de maneira a contemplar as competências gerais, as competências específicas, as habilidades e os temas contemporâneos transversais elencados na BNCC, estabelecendo, sempre que possível, conexões com outras áreas do conhecimento. É possível perceber tais relações na maneira como os capítulos foram estruturados e abordados, nas questões de intervenção ao longo do desenvolvimento dos conteúdos, nas seções especiais e nas tarefas propostas no decorrer do **Livro do Estudante**. No tópico **Orientações, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, há o aporte para o desenvolvimento desse trabalho.

Sugestão de cronograma

Apresentamos, a seguir, três propostas de cronograma para elaborar o planejamento deste volume: uma bimestral, uma trimestral e outra semestral. No entanto, cabe ao professor a decisão de como utilizar o livro didático como apoio pedagógico, seguindo critérios de seleção dos capítulos e levando em consideração diversos fatores, como o projeto pedagógico da escola, as condições da turma, a carga horária e a grade curricular.

Sugestão de cronograma bimestral

1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Capítulo 1 (p. 14 a 45) Capítulo 2 (p. 46 a 75)	Capítulo 3 (p. 76 a 141)	Capítulo 4 (p. 142 a 167) Capítulo 5 (p. 168 a 215)	Capítulo 6 (p. 216 a 259) Capítulo 7 (p. 260 a 271)

Sugestão de cronograma trimestral

1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre
Capítulo 1 (p. 14 a 45) Capítulo 2 (p. 46 a 75)	Capítulo 3 (p. 76 a 141) Capítulo 4 (p. 142 a 167)	Capítulo 5 (p. 168 a 215) Capítulo 6 (p. 216 a 259) Capítulo 7 (p. 260 a 271)

Sugestão de cronograma semestral

1º semestre	2º semestre
Capítulo 1 (p. 14 a 45) Capítulo 2 (p. 46 a 75) Capítulo 3 (p. 76 a 141)	Capítulo 4 (p. 142 a 167) Capítulo 5 (p. 168 a 215) Capítulo 6 (p. 216 a 259) Capítulo 7 (p. 260 a 271)

PANORAMA DO VOLUME

Quadro de conteúdos

O quadro a seguir apresenta os principais conceitos, as competências gerais, as competências específicas, as habilidades e os temas contemporâneos transversais trabalhados neste volume, organizados de acordo com cada capítulo, especificando também as competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, quando forem abordadas. Com base nesse quadro, o professor poderá organizar as suas aulas de acordo com as necessidades e a realidade escolar em que trabalha e com os seus planejamentos.

Neste quadro, por exemplo:
CG1 indica a **Competência geral 1**.
CE2MAT indica a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 2**.
CE3CNT indica a **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 3**.

Quadro de conteúdos

Capítulo	Principais conceitos	Habilidades da BNCC	Competências gerais; Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias; Competências específicas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Temas contemporâneos transversais
1	Métodos de contagem: princípio aditivo e princípio multiplicativo Fatorial Arranjo simples Permutação simples e com repetição Combinação simples Binômio de Newton Triângulo de Pascal Fórmula e termo geral do Binômio de Newton	EM13MAT310	CG3 CG4 CE3MAT	
2	Experimento aleatório, espaço amostral e evento Calculando probabilidades Probabilidade da união de dois eventos Probabilidade condicional Eventos dependentes e eventos independentes Experimentos binomiais	EM13MAT106 EM13MAT311 EM13MAT312 EM13MAT511	CG1 CG2 CG3 CG4 CG7 CG10 CE1MAT CE3MAT CE5MAT CE1CNT CE2CNT	Saúde Direitos da criança e do adolescente Educação ambiental Educação para o consumo

3	Variáveis estatísticas População e amostra estatística Gráficos e tabelas Inadequações em gráficos e tabelas Medidas de tendência central Medidas separatrizes Medidas de dispersão Distribuição de frequência Intervalo de classe Medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos de classes Diagrama de ramo e folhas Diagrama de pontos Estatística e probabilidade	EM13MAT102 EM13MAT106 EM13MAT202 EM13MAT316 EM13MAT406 EM13MAT407	CG4 CG6 CG8 CG10 CE1MAT CE2MAT CE3MAT CE4MAT CE2CNT CE3CNT	Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras Saúde Educação para o consumo Educação ambiental
4	Ponto, reta e plano Posições relativas entre duas retas Posições relativas entre reta e plano Posições relativas entre dois planos Propriedades de paralelismo e perpendicularismo Projeções ortogonais sobre um plano Distâncias no espaço		CG1 CG2 CG3 CE3MAT CE4MAT	Diversidade cultural
5	Poliedros Poliedros convexos e poliedros não convexos Relação de Euler Poliedros de Platão Poliedros regulares Prismas Área da superfície de um prisma Volume do paralelepípedo reto retângulo Princípio de Cavalieri Volume de um prisma qualquer Pirâmides Área da superfície de uma pirâmide Volume de uma pirâmide Tronco de pirâmide reta Área da superfície e do volume do tronco de uma pirâmide	EM13MAT309 EM13MAT315 EM13MAT405 EM13MAT504	CG1 CG4 CG10 CE2MAT CE3MAT CE4MAT CE5MAT CE2CNT CE3CNT	
6	Corpos redondos Cilindro Área da superfície e do volume de um cilindro Cone Área da superfície e do volume de um cone Tronco de um cone reto Área da superfície e do volume de um tronco de cone reto Esfera Volume e área da superfície da esfera	EM13MAT309 EM13MAT315 EM13MAT405 EM13MAT504	CG1 CG2 CG4 CE1MAT CE3MAT CE4MAT CE5MAT CE1CNT CE2CNT	Educação ambiental
7	Cartografia O formato do planeta Terra Estudando projeções cartográficas	EM13MAT509	CG1 CG5 CG9 CE5MAT	Trabalho

ORIENTAÇÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Nesta seção do **Suplemento para o professor**, são oferecidos subsídios para o trabalho docente em sala de aula, além de orientações e comentários que podem enriquecer o processo de ensino e aprendizagem por meio de propostas de condução de momentos da aula, informações complementares e algumas sugestões de avaliação formativa.

CAPÍTULO 1

Análise combinatória

Nesse capítulo, são desenvolvidas as unidades temáticas de Matemática **Probabilidade e Estatística**, focando em problemas de contagem que envolvem agrupamentos de elementos ordenáveis ou não. Além disso, são trabalhados os conceitos de permutações e combinações, aplicando os princípios multiplicativo e aditivo.

Objetivos específicos

- Reconhecer o princípio aditivo e o princípio multiplicativo da contagem.
- Identificar a técnica adequada de contagem para cada tipo de situação-problema.
- Conhecer e aplicar a função fatorial de um número natural, deduzindo algumas de suas propriedades.
- Exercitar cálculos e reconhecer situações-problema envolvendo arranjos simples.
- Reconhecer permutações (com e sem repetições) e desenvolver métodos para determinar as quantidades possíveis de permutações dos elementos de certos conjuntos.
- Compreender permutações como arranjos simples de n elementos tomados n a n.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo permutações com ou sem repetições.
- Reconhecer combinação simples.
- Analisar e identificar uma expressão binomial.
- Reconhecer e desenvolver o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal.
- Reconhecer e aplicar a fórmula do termo geral do Binômio de Newton.

Justificativa

Esse capítulo aborda os fundamentos introdutórios da análise combinatória, partindo de uma visão intuitiva de métodos de contagem para formalizar conceitos e técnicas matemáticas úteis. São exploradas situações cotidianas para ilustrar a importância da análise combinatória em resolver problemas práticos e complexos, iniciando com percepções elementares da contagem, passando pelo conceito de fatorial e introduzindo o arranjo simples como forma de calcular quantidades de elementos e possibilidades em situações específicas.

Em seguida, são apresentadas permutações com e sem repetições, explorando o conceito de permutação e métodos para calcular a quantidade de permutações de elementos de certos conjuntos. Problemas práticos e abstratos são úteis para motivar a apresentação desses conceitos, fornecendo aos estudantes noções intuitivas e deduções matemáticas dos resultados. A combinação simples é comparada ao arranjo simples, destacando a diferença principal de que na combinação a ordem não importa.

Por fim, são trabalhados as combinações simples e o Binômio de Newton, associando-os ao Triângulo de Pascal e identificando suas inter-relações. Desse modo, o objetivo é que os estudantes desenvolvam habilidades para identificar utilidades dessas ferramentas matemáticas e para aplicar a fórmula do termo geral do Binômio de Newton em diversas situações, exercitando o raciocínio lógico e adquirindo conhecimentos sobre levantamentos de possibilidades presentes em diversas áreas do conhecimento.

Páginas 14 e 15

Na questão **1**, verifique se os estudantes conhecem alguma série que pode ser vista sem seguir uma ordem cronológica dos episódios, de maneira que não perca o sentido. Incentive a turma a conversar sobre o assunto e a refletir sobre quais fatores são necessários, em uma série, para que isso aconteça.

Na questão **2**, explique o conceito de permutações aos estudantes, ressaltando que se trata da reordenação de um conjunto de elementos. Apresente exemplos visuais ou atividades práticas, como cartões com os nomes dos episódios, para que experimentem fisicamente a troca de posições. Reforce que a permutação de três elementos resulta em seis combinações distintas e peça aos estudantes que escrevam todas as possibilidades, incentivando a compreensão prática do conceito.

Ao trabalhar a questão **3**, incentive-os a verificar se a sequência dada $(X, Y, Z, X, Y, X, Z, Y, X)$ é de fato a superpermutação mínima. Peça-lhes que analisem cada bloco de três episódios na sequência e confirmem se todas as combinações possíveis de três episódios aparecem na ordem correta. Encoraje-os a justificar as respostas, promovendo o desenvolvimento de habilidades analíticas e argumentativas. Essa tarefa pode ser realizada em pares, com discussão e verificação cruzada dos resultados.

Páginas 16 e 17

Esse tópico contempla a habilidade **EM13MAT310** da BNCC ao levar os estudantes a resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. Desse modo, aborda-se a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

A fim de verificar o conhecimento prévio dos estudantes sobre o conteúdo, proponha-lhes tarefas de contagens em níveis progressivos de dificuldade e verifique quais métodos são empregados para realizar essas contagens. Verifique também se eles contam os elementos um a um ou realizam cálculos com notações ou diagramas. Confira a seguir uma possibilidade de tarefa.

Sugestão de avaliação

Paula quer presentear um amigo com uma coleção que contém um livro, um filme e uma peça de vestuário. Contudo, ela está em dúvida entre os seguintes itens: um livro de suspense, um livro de terror, um livro de fantasia e um livro de não ficção; um filme de comédia e um filme de ação; uma camiseta azul, uma camiseta preta e uma camiseta estampada. Considerando essas opções, quantas são as possibilidades diferentes de *kits* que Paula pode formar para presentear o amigo?

Resolução e comentários

$$4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

Portanto, Paula tem 24 possibilidades diferentes de *kits*.

Páginas 18 e 19

Ao solicitar aos estudantes que elaborem o enunciado de um problema para posteriormente resolvê-lo, a tarefa **3** busca explorar o desenvolvimento das capacidades de escrita e argumentação, contribuindo para que eles se expressem e compartilhem informações por meio da linguagem verbal, contemplando assim a **Competência geral 4** da BNCC.

A tarefa **6** aborda o futebol, um esporte muito admirado e acompanhado por diversas culturas e gerações, utilizando essa manifestação cultural para o trabalho com os conteúdos vistos em sala de aula, indo ao encontro do que dita a **Competência geral 3** da BNCC.

No item **d** da tarefa **10**, se necessário, lembre os estudantes de que um número natural é múltiplo de 5 quando o algarismo da unidade é 0 ou 5.

Página 20

Em geral, os estudantes aceitam sem dificuldades a definição $1! = 1$, mas é comum que surjam desconfortos com a definição $0! = 1$. Uma maneira de fazê-los entender o motivo de a definição ser assim, e não $0! = 0$, é explicar a propriedade segundo a qual $n! = n \cdot (n-1)!$ e, a partir daí, mostrar que, para preservar a propriedade para todos os números naturais, incluindo 1 e 0, devemos ter:

$$2! = 2 \cdot (2-1)! = 2 \cdot 1! \Rightarrow 2 \cdot 1 = 2 \cdot 1! \Rightarrow 1! = 1$$

Assim, como $1! = 1$, devemos ter, para preservar a propriedade:

$$1 = 1! = 1 \cdot (1-1)! = 1 \cdot 0! = 0! \Rightarrow 0! = 1$$

Outra observação que pode ser esclarecedora para os estudantes é mencionar que, como o fatorial é definido por meio de multiplicações, e não por meio de somas, é natural que $0! = 1$, já que 1 é o elemento neutro da multiplicação (uma interpretação possível é que $0!$ representa a ausência de multiplicações, devendo manter-se em seu elemento neutro). Para estabelecer uma útil analogia, convém mencionar que o mesmo ocorre nas potências (também definidas por meio de multiplicações), em que temos $a^0 = 1$ para todo $a \neq 0$.

Após o trabalho com a tarefa **R1**, faça mais perguntas aos estudantes, com o objetivo de levá-los a perceber que, em geral: $a! + b! \neq (a+b)!$ e $a! \cdot b! \neq (a \cdot b)!$.

Finalizando os problemas resolvidos **R1** e **R2**, faça mais perguntas aos estudantes, com o objetivo de levá-los a perceber a propriedade de que $\frac{n!}{m!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (m+1)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ com $n > m$. Para tanto, peça a eles que calculem divisões envolvendo fatoriais de números maiores do que 90, como $\frac{100!}{98!}$.

Concluído o problema resolvido **R3**, destaque o fato de que nem todas as equações envolvendo fatoriais têm solução, uma vez que fatoriais são definidos apenas para números naturais. Assim, por exemplo, $n! = 25$ não tem solução, já que $4! = 24$ é menor do que 25, ao passo que $5! = 120$ é maior do que 25. Informe, contudo, que os exercícios de provas e concursos, em geral, são elaborados de modo a haver uma solução.

Após a resolução da tarefa **18**, caso os estudantes apresentem dúvidas e precisem de mais explicações, retome o conteúdo e avalie a necessidade de apresentar alguns exemplos, como:

$$\boxed{2! + 3! \neq 5!} \quad \boxed{2! + 1! \neq 3!} \quad \boxed{1! + 1! = 2!}$$

Página 24

O boxe **Para expandir**, da tarefa **27**, incentiva os estudantes a aprofundar o conhecimento sobre as funções e responsabilidades dos senadores e senadoras do Brasil. Oriente-os a explorar o texto sugerido para compreender melhor as atribuições desses parlamentares e como suas decisões impactam a sociedade. Essa leitura não só enriquece o contexto matemático da tarefa como também promove mais conscientização política, ajudando os estudantes a entender a importância do Senado na governança do país. Além disso, esse texto fomenta um debate sobre como o conhecimento das atribuições do Senado pode influenciar a cidadania e o exercício do voto consciente.

Ao utilizar o Senado Federal do Brasil como contexto, a tarefa **27** busca valorizar a diversidade de saberes relacionados não apenas ao ambiente escolar, mas também a questões da vida cívica, levando os estudantes a absorver conhecimentos que possibilitem a tomada de decisões alinhadas ao exercício da cidadania, como o voto, e mobilizando aspectos da **Competência geral 4** da BNCC.

Sugestão de avaliação

As placas de automóveis no Brasil eram compostas de uma sequência de três letras seguidas de quatro números, e podia haver repetições de caracteres (formato geral da placa antiga: LLL NNNN). Com a adoção do padrão Mercosul, em 2019, as placas passaram a ser compostas por uma sequência de três letras seguidas de um único número, depois mais uma letra seguida de

dois números (formato geral da nova placa: LLLNLNN). Sabendo disso, determine quantas possibilidades a mais de placas podem ser feitas com o novo padrão em relação ao padrão antigo. Determine, ainda, quantas vezes o número de possibilidades de placas no novo padrão é maior do que no antigo.

Resolução e comentários

A quantidade de placas possíveis no padrão antigo é $26^3 \cdot 10^4$, enquanto no novo padrão é $26^4 \cdot 10^3$.

Temos, portanto, que a quantidade a mais de placas no novo padrão em relação ao padrão antigo é:

$$26^4 \cdot 10^3 - 26^3 \cdot 10^4 = 26^3 \cdot 10^3 \cdot (26 - 10) =$$

$$= 26^3 \cdot 10^3 \cdot 16 = 281\,216\,000$$

Em proporção, temos $\frac{26^4 \cdot 10^3}{26^3 \cdot 10^4} = \frac{26}{10} = 2{,}6$, de modo que o novo padrão de placas tem um total de possibilidades equivalente a 2,6 vezes a quantidade de possibilidades do antigo.

Ao fim do trabalho com o tópico, avalie o aprendizado dos conteúdos propondo aos estudantes o desafio a seguir.

Página 27

A fim de tornar mais "palpável" a validade do método de cálculo para permutações com repetição, apresentado nessa página ao abordar o exemplo **a**, registre na lousa, ou peça aos estudantes que o façam no caderno, todos os possíveis anagramas da palavra TATU.

Pode ser conveniente enfatizar o fato de que, nos cálculos envolvendo permutações com repetições sem o uso de calculadora, a propriedade de divisão de fatoriais é de grande utilidade para evitar expressões muito extensas. Por exemplo, para calcular a quantidade de anagramas da palavra ARARAQUARA é mais fácil efetuar os cálculos da maneira apresentada em **I** do que em **II**.

I) $\frac{10!}{5! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3!}} = 5\,040$

II) $\frac{10!}{5! \cdot 3!} = \frac{3\,628\,800}{120 \cdot 6} = 5\,040$

Página 28

Caso os estudantes tenham dúvidas ao resolver a tarefa **42**, peça a eles que calculem quantos anagramas começam com a letra A; em seguida, quantos começam com a letra E; depois, quantos começam com a letra M, até que finalmente pensem nos que começam com a letra P, com o objetivo de que obtenham a palavra PERMUTA.

Ao final do trabalho com as tarefas dessa página, os estudantes devem perceber que $n!$ cresce demasiadamente rápido com o crescimento de n, atingindo valores muito elevados para valores de n consideravelmente baixos.

Para aumentar essa percepção, proponha a eles que determinem de quantas maneiras diferentes um baralho com 52 cartas distintas pode ser organizado. A resposta correta seria 52! maneiras diferentes. Curiosamente, isso significa que, em toda a história, é praticamente impossível que dois baralhos embaralhados de modo completamente aleatório tenham apresentado a mesma ordenação das cartas. Isso porque 52! é um número tão grande que, se uma pessoa pudesse contar um número a cada segundo, começando do 1, e a cada um bilhão de anos retirasse um litro de água do oceano, então essa pessoa secaria todos os mares do planeta muito antes de alcançar o valor correspondente a 52!. A representação decimal de 52! tem 68 dígitos, não sendo possível calculá-lo na maior parte das calculadoras científicas.

Para complementar o trabalho com essa página, proponha a tarefa a seguir.

Tarefa extra

Utilizando uma calculadora científica, efetue os cálculos.

a) P_{12} **b)** $P_{13} - P_9$ **c)** $\frac{P_{10}}{P_3} \cdot P_5$

Resoluções e comentários

a) $P_{12} = 479\,001\,600$

b) $P_{13} - P_9 = 6\,226\,657\,920$

c) $\frac{P_{10}}{P_3} \cdot P_5 = 72\,576\,000$

Caso os estudantes tenham dificuldades em realizar a tarefa **46**, proceda de maneira similar à sugerida na tarefa **42**, ou seja, peça-lhes que, primeiro, calculem quantos anagramas começam com a letra A; depois, com a letra E; e assim por diante, até que a soma dessas quantidades chegue o mais próximo possível do número 301, sem, contudo, ultrapassá-lo.

Ao resolver a tarefa **47**, comente com os estudantes algumas curiosidades sobre o sistema braile. Em razão de um acidente na infância, o francês Louis Braille (1809-1852) perdeu a visão. Ainda assim, frequentou a escola por dois anos, tornando-se um estudante brilhante, o que lhe proporcionou uma bolsa de estudos do Instituto Nacional para Jovens Cegos de Paris. Para ler e escrever, Braille desenvolveu um sistema que toma como base um método conhecido como "escrita noturna", inventado pelo oficial do exército francês Charles Barbier de la Serre (1767-1841), constituído de pontos e traços em relevo, sendo destinado a enviar mensagens cifradas a sentinelas, que eram treinados para decodificar as mensagens até mesmo no escuro, usando o tato. Braille, por sua vez, eliminou os traços e simplificou o método a fim de atender a suas próprias necessidades, criando uma célula de seis pontos divididos em duas colunas de igual tamanho, com pontos lisos ou em alto-relevo, e cada combinação de pontos corresponde a uma letra ou a um símbolo de pontuação. O sistema braile foi finalizado em 1824 e até os dias atuais é um dos sistemas de leitura e escrita mais usados entre pessoas cegas ou com baixa visão de todo o mundo.

Explique aos estudantes como o sistema braile foi um avanço significativo para garantir o acesso a educação, comunicação e informação para pessoas cegas ou com baixa visão, contribuindo para a redução das desigualdades e o aumento da participação social desses indivíduos. Encoraje uma discussão sobre a importância da acessibilidade em diversos contextos, desde a educação até o mercado de trabalho, e como tecnologias inclusivas e políticas públicas podem melhorar a vida das pessoas com deficiência.

Caso haja estudantes com baixa visão, cegos ou que tenham familiaridade com o sistema braile, convide-os a compartilhar

suas experiências e conhecimentos com a turma. Eles podem demonstrar como funciona a leitura e escrita em braile, ajudando os colegas a compreender melhor a funcionalidade e a importância desse sistema na vida cotidiana das pessoas com deficiência visual. Se não houver estudantes com esse perfil, considere trazer materiais em braile para que todos possam manusear e aprender o sistema de maneira prática. Essa abordagem promove empatia e inclusão, além de enriquecer o aprendizado ao permitir que os estudantes tenham uma experiência direta com o sistema braile, reforçando a relevância da diversidade e da acessibilidade na educação.

Página 29

A fim de verificar o conhecimento prévio dos estudantes acerca de combinação simples, proponha a tarefa a seguir.

Sugestão de avaliação

Peça a eles que determinem o total de cumprimentos com apertos de mão que seis pessoas podem trocar entre si, sem que haja repetição, ou seja, se *A* apertou a mão de *B*, logo *B* não precisará apertar a mão de *A* novamente, pois já o fez. Disponibilize um tempo da aula para que os estudantes conversem entre si e façam os cálculos. Em seguida, anote na lousa os valores determinados por eles. Solicite a seis estudantes que se voluntariem para realizar a experiência na prática. Leve-os a perceber que, escolhido o primeiro, este cumprimentará todos os outros. Portanto, serão 5 apertos de mão. O segundo estudante cumprimentará apenas 4, visto que não deve haver repetição de cumprimentos. O terceiro cumprimentará 3; o quarto cumprimentará 2; e o quinto cumprimentará apenas o último, que por sua vez já terá sido cumprimentado por todos os demais colegas. Assim, o total de cumprimentos será:

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$$

Logo, o total de cumprimentos é 15 apertos de mão.

Pergunte aos estudantes como calculariam o total de cumprimentos se fossem 10 estudantes. Porém, dessa vez, sem verificação prática. Espera-se que eles concluam que o total pode ser calculado pela adição dos inteiros de 1 a 9, ou seja, um total de 45 apertos de mão.

Depois, pergunte qual seria o total de cumprimentos caso fossem considerados todos os estudantes da escola. Desse modo, leve-os a perceber que os cálculos, apesar de simples, podem ser trabalhosos em alguns casos.

Informe aos estudantes que essa tarefa é um exemplo de combinação simples, um dos conteúdos que serão estudados ao longo desse tópico. Esclareça também que, quando determinaram o total de cumprimentos possíveis entre 6 participantes, eles calcularam o total de combinações possíveis de 6 estudantes escolhidos 2 a 2; nos outros casos, 10 estudantes, 2 a 2; ou, ainda, o total de estudantes da escola escolhidos 2 a 2. Diga-lhes que nem sempre as combinações são feitas tomando-se os elementos 2 a 2, mas que há conceitos matemáticos que permitem a realização desses cálculos de maneira mais prática e eficiente.

Quanto à dedução lógica da expressão para o cálculo do número de combinações de um conjunto de n elementos tomados p a p, a maneira mais simples e natural é calcular primeiro o número de arranjos possíveis (ou seja, agrupamentos levando em conta a ordem dos elementos) e, depois, dividir o resultado obtido pelo número de agrupamentos contados em repetição (ou seja, as permutações dos elementos de cada arranjo). Comente com os estudantes que esse raciocínio é similar ao empregado nos casos de permutações com repetição, em que também é feita a divisão para compensar as contagens repetidas.

Página 35

A tarefa **72** indica como conceitos de análise combinatória podem ser aplicados na constituição de códigos de transmissão de mensagens. Em certo sentido, todas as linguagens são combinações de um número limitado de símbolos. As palavras em língua portuguesa, por exemplo, são uma combinação das 26 letras do alfabeto. O número de símbolos ou caracteres de uma linguagem vai depender da finalidade para a qual ela foi criada: menos símbolos induzem linguagens mais simples, com menor abrangência, enquanto linguagens com mais símbolos fornecem um leque maior de possibilidades de mensagens a ser transmitidas, tornando-as mais dinâmicas.

Página 36

Trabalho e juventudes

Para iniciar o estudo da seção **O profissional de logística**, reforce que a qualidade dos processos de uma empresa está diretamente relacionada à logística de suas operações, por isso a importância do trabalho de profissionais qualificados na área.

Na atividade **1**, aproveite para comentar que muitas empresas têm adotado a prática da logística sustentável, que consiste em ações de reutilização de insumos, recolhimento de materiais descartáveis na rota de entrega e uso de veículos menos poluentes, por exemplo. Se considerar pertinente, peça-lhes que pesquisem mais o assunto na internet.

Aproveite a atividade **2** e o boxe **Para expandir** e faça uma visita ao local de trabalho de um profissional de logística. Para isso, providencie a autorização dos responsáveis dos estudantes menores de idade e verifique a necessidade de equipamentos de segurança. Oriente os estudantes a elaborar antecipadamente algumas questões e deixe-os à vontade para fazer outros questionamentos durante a visita, ressaltando a importância do diálogo respeitoso. Nos casos em que não seja possível visitar o local, convide o profissional para ir até a escola ou realize uma videochamada para que ele possa ser entrevistado pelos estudantes e apresentar seu ambiente de trabalho e os recursos que usa no dia a dia.

Páginas 37 a 42

Se julgar pertinente, mencione que, apesar do que esses nomes sugerem, nem o Binômio de Newton nem o Triângulo de Pascal são descobertas originais de Newton e de Pascal. Nomes de teoremas e propriedades matemáticas algumas vezes provêm de seus descobridores, mas nem sempre é o

que acontece. Na maior parte das vezes, os nomes surgem com base nos matemáticos que popularizaram a ferramenta ao usá-la diversas vezes em problemas maiores, ou que realizaram contribuições significativas com relação a ela.

No caso específico do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal, historiadores identificaram seus empregos em trabalhos matemáticos chineses anteriores à Idade Média e até mesmo em obras indianas de antes de Cristo. Em uma obra literária que analisava permutações em versos de poemas sânscritos, o indiano Pingala já empregava, no século II a.C., métodos combinatórios análogos ao que atualmente chamamos Binômio de Newton e Triângulo de Pascal.

Página 44

Ao fim do trabalho com o capítulo, verifique a conveniência de empregar a estratégia **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos estudantes, a fim de que possam refletir sobre os conteúdos estudados. Recapitule sucintamente as fórmulas e os conceitos, bem como as ideias mais interessantes aplicadas em uma demonstração ou em uma tarefa. Em seguida, peça-lhes que comentem situações práticas em que visualizem oportunidade de utilizar as ferramentas matemáticas desenvolvidas no capítulo.

Página 45

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando os que já conheciam e se houve algum em que tiveram dificuldades.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido por meio de textos ou dinâmicas em grupo. Nesse momento, proponha aos estudantes a elaboração de questionamentos em função dos erros mais comuns que identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Reconheço e aplico o princípio aditivo da contagem e o princípio multiplicativo da contagem?"; "Compreendo e consigo resolver problemas envolvendo arranjos simples?"; "Tenho segurança para resolver problemas envolvendo permutações com ou sem repetições?"; "Reconheço e desenvolvo o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal?". Por meio das respostas, é esperado que eles identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado, sanando as possíveis dúvidas em relação ao conteúdo.

As questões de **3** a **14** são de direta aplicação dos conteúdos trabalhados. Com elas, é esperado que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas, pois esses registros auxiliarão o desenvolvimento da questão **15**.

Na síntese proposta na questão **15**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais e resumos textuais. Instigue-os a dar exemplos e, se julgar conveniente, usar imagens. Incentive-os a ser criativos nesse momento.

CAPÍTULO 2

Probabilidade

Nesse capítulo, são desenvolvidas as unidades temáticas de Matemática **Probabilidade e Estatística** em situações relacionadas à probabilidade e à probabilidade condicional, usando a teoria da probabilidade para interpretar e analisar eventos aleatórios.

Objetivos específicos

- Compreender que uma das características da probabilidade é a previsão de resultados em relação a eventos aleatórios.
- Distinguir casos possíveis de casos prováveis e casos favoráveis.
- Identificar, de acordo com a situação, se determinados eventos são independentes, condicionais ou mutuamente exclusivos.
- Compreender o conceito de probabilidade da união de dois eventos e realizar cálculos nesses contextos.
- Analisar as possibilidades em uma situação-problema e tomar decisões baseadas nas probabilidades de ocorrência de um evento.
- Compreender o conceito de probabilidade condicional.
- Lidar com probabilidades em situações rotineiras, diferenciando os eventos independentes dos eventos dependentes.

Justificativa

O fundamento de grande parte das ciências modernas é, quase sempre, essencialmente probabilístico: decisões de economia e decisões de políticas públicas são feitas com base em estatísticas e probabilidade. Mesmo áreas de estudos avançados, como Física Quântica, não trabalham com valores absolutamente precisos, mas sim com estimativas probabilísticas. Para tanto, esse capítulo trata de conceitos matemáticos relacionados à probabilidade e à probabilidade condicional.

Apesar de o foco ser a realização de cálculos de probabilidade em contextos cada vez mais elaborados, a abordagem do capítulo se destina ainda à correta interpretação dos resultados dos cálculos e à compreensão das vantagens de empregar raciocínios probabilísticos em situações cotidianas, principalmente no que tange à tomada de decisões e ao gerenciamento de riscos.

A teoria da probabilidade permite a criação de ferramentas capazes de fazer considerações sobre previsibilidade de eventos, ajudando-nos a lidar com a incerteza. Muitos fenômenos da natureza e situações da vida são aleatórios (ou, com algumas restrições, podem ser considerados aleatórios, já que não temos conhecimento seguro sobre suas causas ou as leis que os governam). Sendo assim, sempre há aleatoriedades que devem ser consideradas mesmo em situações bem arquitetadas, como em projetos de engenharia. A aplicação da teoria da probabilidade nesses casos, portanto, também pode ser entendida tanto como uma das facetas do gerenciamento de riscos quanto como base para tomadas das decisões mais seguras possíveis, dentro dos limites de nossos conhecimentos.

Além disso, o capítulo discute o conceito de probabilidade condicional e de experimentos binomiais, as situações em que eles podem ser aplicados e as estratégias de cálculo correspondentes. Porém, para explorar essa temática, é importante que os estudantes disponham de conhecimentos prévios acerca de alguns conceitos que são essenciais ao conteúdo abordado, como evento, espaço amostral, probabilidade e probabilidade da união.

Página 47

No trabalho com a questão **1**, encoraje os estudantes a refletir sobre a presença de elementos aleatórios em seus jogos favoritos e como isso impacta a experiência de jogo. Discuta exemplos que incluam eventos aleatórios ou a geração de cenários que mudam a cada partida, contrastando com jogos que não têm elementos de aleatoriedade.

Na questão **2**, incentive os estudantes a compartilhar experiências em que a sorte teve um papel crucial no resultado de um jogo. Explore como a aleatoriedade pode adicionar emoção ou frustração, dependendo da percepção do estudante sobre o controle dos resultados no jogo.

O trabalho com o capítulo explora os aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC. Nele, os conceitos e as ferramentas para cálculos de probabilidades, associados às técnicas de análise combinatória, permitem aos estudantes construir modelos e resolver problemas em vários contextos, verificando a razoabilidade dos resultados e embasando interpretações mais bem fundamentadas de eventos práticos, a fim de sustentar argumentações racionais.

Nas tarefas em geral, os estudantes devem lidar com espaços amostrais e eventos aleatórios, resolvendo e elaborando problemas de probabilidade por meio de técnicas de contagem e do emprego adequado dos conceitos matemáticos pertinentes, bem como verificar situações da vida cotidiana nas quais é necessário fazer escolhas levando em conta os riscos probabilísticos, abordando, assim, as habilidades **EM13MAT106**, **EM13MAT311** e **EM13MAT511** e as **Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 1** e **5** da BNCC.

Páginas 48 a 50

Citar grandes estudiosos da área da Matemática e apresentar suas contribuições para o campo das ciências em geral, como foi feito no texto inicial deste capítulo, são modos de valorizar os conhecimentos historicamente construídos e enfatizar os benefícios de seus esforços para o desenvolvimento do mundo atual, contemplando, dessa maneira, a **Competência geral 1** da BNCC.

Ao trabalhar com o conceito de espaços amostrais infinitos, verifique a possibilidade de aprofundar o assunto com os estudantes, apresentando, ainda que de maneira apenas intuitiva, a distinção entre espaço amostral infinito enumerável e espaço amostral infinito não enumerável. Uma sugestão é mencionar o exemplo a seguir.

No primeiro exemplo de espaço amostral infinito apresentado, considerando o sorteio aleatório de um número natural, apesar de o espaço ser infinito, foi possível estabelecer uma ordem e realizar a enumeração de seus elementos. Quando isso ocorre, dizemos que o conjunto infinito é **enumerável**, pois seus elementos podem ser associados um a um aos números naturais.

Quando não há possibilidade de enumeração, dizemos que o conjunto infinito é **não enumerável**. É o caso, por exemplo, do espaço amostral da escolha aleatória de um número real pertencente ao intervalo $I = [0, 1]$, pois entre o número 0 e o número 1 existe uma infinidade não enumerável de números reais.

Nos conjuntos infinitos não enumeráveis, é impossível escrever o espaço amostral na forma $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Nesses casos, a descrição do espaço amostral e a descrição dos eventos vão depender da natureza do problema e do contexto em que ele aparece. No caso de números reais, a notação normalmente mais conveniente é a de intervalo, mas em problemas geométricos, por exemplo, o espaço amostral e os eventos de interesse podem ser descritos, em certas circunstâncias, por meio das áreas das figuras envolvidas.

Espaços amostrais infinitos podem ser enumeráveis ou não enumeráveis. Chamamos **espaços amostrais infinitos enumeráveis** aqueles cujos elementos, por mais que sejam ilimitados, podem ser postos em associação um a um com os números naturais. Quando isso não ocorre, dizemos tratar-se de **espaços amostrais infinitos não enumeráveis** (também chamados **espaços amostrais contínuos**).

Página 53

Na tarefa **6**, estabeleça um tempo para que os estudantes possam refletir e debater sobre o planejamento familiar e o acesso a serviços de saúde sexual e reprodutiva, desenvolvendo o pluralismo de ideias e a argumentação.

Página 57

O contexto trabalhado no problema resolvido **R6** enfatiza a variedade de gêneros musicais e seu uso no ensino e aprendizagem de Matemática em sala de aula, abordando, assim, aspectos da **Competência geral 3** da BNCC.

Páginas 59 a 61

O contexto apresentado na tarefa **14**, abordando o cortisol e a adrenalina – hormônios associados à ocorrência do infarto –, pode despertar a curiosidade dos estudantes ao tomar como base o conhecimento de diferentes áreas, levando-os a adotar uma abordagem científica na investigação de causas e na elaboração e resolução de problemas, preceitos da **Competência geral 2** da BNCC.

A tarefa **29** busca explorar o desenvolvimento da capacidade de escrita e de argumentação, contribuindo para que os estudantes expressem e partilhem informações por meio da linguagem verbal, contemplando, dessa maneira, a **Competência geral 4** da BNCC.

A fim de complementar as tarefas desse tópico, leia para os estudantes a curiosa origem de um problema sobre probabilidade e incentive-os a solucioná-lo.

Comente que o escritor inglês Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898) ficou mais conhecido por seu pseudônimo Lewis Carroll, sob o qual publicou suas duas obras-primas: *Alice no País das Maravilhas* (*Alice in Wonderland*) e *Alice Através do Espelho* (*Through the Looking-Glass*). Além de escritor, Dodgson também era matemático, tendo composto uma série de desafios de lógica que ficaram conhecidos como *Pillow Problems* (Problemas no travesseiro) por terem sido publicados no livro *Pillow Problems Thought Out During Wakeful Hours* (Problemas no travesseiro pensados durante horas acordado, em tradução livre).

Um desses desafios é o problema citado a seguir, que envolve um resultado contraintuitivo abordando probabilidade e é particularmente interessante. Ele pode ser aplicado aos estudantes como uma tarefa extra.

Tarefa extra

Uma bolsa não transparente contém uma bola, sobre a qual se sabe que, com igual probabilidade, pode ser preta ou branca, mas de nenhuma outra cor. Uma pessoa, sem olhar no interior da bolsa, insere uma bola branca e, em seguida, chacoalha a bolsa de modo a não saber mais qual bola é de que cor. Em seguida, uma das bolas é retirada, e essa bola tem a cor branca. Nesse cenário, qual é a probabilidade de que a bola que sobrou no interior da bolsa seja branca?

Resoluções e comentários

A princípio, pode-se pensar que a probabilidade é de 50%, já que a bola restante pode ser ou preta ou branca. Contudo, essa resposta está errada, pois não sabemos se a bola que foi retirada da bolsa é a bola que já estava lá desde o começo ou se é a que foi introduzida depois e esse detalhe traz informações que afetam a probabilidade.

Uma maneira de resolver o problema é listando todas as possibilidades, em todos os cenários possíveis.

Possíveis casos de bolas na bolsa

Configuração inicial	Casos	Bola retirada	Bola que sobrou
Branca (1ª bola) Branca (2ª bola)	1	Branca (1ª bola)	Branca (1ª bola)
Branca (1ª bola) Branca (2ª bola)	2	Branca (2ª bola)	Branca (2ª bola)
Preta (1ª bola) Branca (2ª bola)	3	Preta (1ª bola)	Branca (2ª bola)
Preta (1ª bola) Branca (2ª bola)	4	Branca (2ª bola)	Preta (1ª bola)

Todos os casos são igualmente prováveis. Contudo, o caso 3 com certeza não ocorreu, já que a bola retirada foi uma bola branca, e não preta. Desse modo, restaram 3 casos possíveis (casos 1, 2 e 4), e esses casos são equiprováveis. Como em dois desses casos a bola que sobrou na bolsa é branca (casos 1 e 2), a probabilidade de que a bola que sobrou no interior da bolsa seja branca é 2 em 3, ou seja, $\frac{2}{3} = 66,\overline{6}\%$.

Página 68

Trabalho e juventudes

O texto e as atividades apresentadas na seção **O que faz o cientista de dados?** permitem fomentar as funções de um cientista de dados. Inicie o estudo da seção investigando o conhecimento prévio dos estudantes sobre essa profissão, perguntando-lhes se já usaram *streamings* de música ou filme, por exemplo, e se, no momento do uso, perceberam a indicação de filmes, séries e artistas por essas plataformas. Explique-lhes que essas recomendações são feitas com base nas preferências de cada usuário e em seu histórico de acesso, que, por sua vez, alimentam os chamados algoritmos. Comente que esse é um exemplo de dados gerados por meio da análise de informações feitas pelo cientista de dados.

Para realizar a visita sugerida no boxe **Para expandir**, providencie, com antecedência, a autorização dos responsáveis dos estudantes menores de idade e verifique a necessidade de equipamentos de segurança. Oriente os estudantes a elaborar antecipadamente algumas questões e deixe-os à vontade para fazer outros questionamentos durante a visita, ressaltando a importância do diálogo respeitoso. Caso não seja possível visitar o local, convide o profissional para ir até a escola ou realize uma videochamada para que ele possa ser entrevistado pela turma e apresentar seu ambiente de trabalho e os recursos que usa no dia a dia.

Ao final da atividade **3**, promova uma roda de conversa para que os estudantes apresentem suas pesquisas e dialoguem entre si. Se julgar pertinente, aproveite o momento e comente que o campo de atuação do cientista de dados tem se ampliado no decorrer dos anos, surgindo oportunidades em áreas incomuns até pouco tempo.

Páginas 69 e 70

Durante o trabalho com a tarefa **40**, estabeleça um tempo para que os estudantes possam refletir sobre a importância do teste do pezinho para o acompanhamento da saúde dos recém-nascidos. Nesse caso, oriente-os a retomar o **Objetivo 3** da **Agenda 2030** nas páginas **8** e **9** do **Livro do Estudante**, a fim de melhor explorar o assunto dessa tarefa e o objetivo citado na Agenda.

Se necessário, leve os estudantes ao laboratório de informática para que realizem a pesquisa solicitada no item **f** da tarefa **40**. Verifique a possibilidade de usar a estratégia **Gallery walk** para expor os resultados da pesquisa.

O trabalho com a tarefa **40** permite o desenvolvimento dos temas contemporâneos transversais **Saúde** e **Direitos da criança e do adolescente**, ao comentar a importância de conhecer algumas das principais doenças que podem afetar a saúde das pessoas; identificar as características e a importância de testes de saúde, que são realizados em períodos específicos de nossa vida para identificar possíveis doenças; conhecer os direitos que todos têm de acesso a ferramentas para a manutenção da saúde, como é o caso do teste do pezinho para os recém-nascidos. Desse modo, abordam-se aspectos da **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 2** da BNCC.

A tarefa **48** trabalha a habilidade **EM13MAT312**, uma vez que a proposta incentiva os estudantes a elaborar e resolver problemas que envolvam o conceito de probabilidade condicional, permitindo a eles tanto identificar que conhecimentos e informações são necessários para realizar o estudo de um problema, com base no conceito de probabilidade, quanto reconhecer situações em que a probabilidade condicional pode estar presente.

Página 71

Na tarefa **49**, verifique a possibilidade de realizar um trabalho articulado com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com os professores dos componentes curriculares **Química** e **Biologia**, a fim de enriquecer as discussões a respeito da coleta seletiva, dos impactos ambientais gerados pelo descarte incorreto do lixo, da situação da coleta de lixo no país e das doenças que

podem ser geradas pelo descarte incorreto do lixo, entre outros temas. Se necessário, oriente-os a retomar o **Objetivo 12** da **Agenda 2030** no início do **Livro do Estudante** deste volume.

O trabalho com essa tarefa, com destaque para os itens **c**, **d** e **e**, permite o desenvolvimento dos temas contemporâneos transversais **Educação ambiental** e **Educação para o consumo** ao promover reflexões a respeito da produção e do descarte de resíduos que resultam em sérios impactos ambientais, os quais podem ser minimizados mediante o consumo consciente. Nesse sentido, também são abordados aspectos da **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 1** da BNCC.

Ao apresentar informações a respeito da produção de resíduos em nível nacional, essa tarefa possibilita a promoção de discussões relacionadas ao meio ambiente, levando os estudantes a elaborar argumentos significativos para defender ideias que promovam a consciência socioambiental, conforme prevê a **Competência geral 7** da BNCC. Com isso, espera-se que eles desenvolvam atitudes que levem em consideração não apenas os interesses pessoais, mas também os coletivos, respeitando o meio que os cerca, de modo a contemplar a **Competência geral 10** da BNCC.

Página 74

Ao finalizar o trabalho com esse capítulo, verifique a conveniência de aplicar a estratégia **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos estudantes, levando-os a refletir sobre os conteúdos estudados. De modo breve, relembre as principais ideias trabalhadas ao longo das aulas e, em conversa ampla, peça-lhes que comentem os benefícios do estudo das probabilidades, mencionando exemplos práticos de aplicações possíveis em suas vidas.

Página 75

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando os que já conheciam e se houve algum em que tiveram dificuldades.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido de diferentes maneiras: por meio de desenhos, textos, dinâmicas em grupos, entre outras. Nesse momento, se necessário, proponha aos estudantes que elaborem questionamentos em função dos erros mais comuns que eles identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Consigo determinar o espaço amostral em situações-problema?"; "Consigo calcular a probabilidade de um evento?"; "Tenho segurança para diferenciar eventos independentes de eventos dependentes?". Com base nas respostas, é esperado que eles identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado.

As questões de **3** a **10** são de direta aplicação dos conteúdos estudados. Com elas, é esperado que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas. Essas anotações auxiliarão o desenvolvimento da questão **11**.

Na síntese proposta na questão **11**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais e resumos textuais. Instigue-os a apresentar exemplos e, caso julguem conveniente, usar imagens. Nesse momento, incentive-os a ser criativos.

CAPÍTULO 3 Estatística

Nesse capítulo, são desenvolvidas as unidades temáticas de Matemática **Probabilidade e Estatística**, em situações relacionadas à análise e interpretação de dados, tanto em contextos cotidianos quanto em científicos. São abordadas a leitura e a construção de gráficos e tabelas, bem como a compreensão das medidas de tendência central e de dispersão.

Objetivos específicos

- Distinguir variáveis quantitativas de variáveis qualitativas.
- Identificar as características dos levantamentos amostrais, analisando situações em que a amostragem pode ser empregada.
- Decidir qual tipo de gráfico é o mais adequado para representar cada situação.
- Perceber inadequações em gráficos e tabelas que omitem informações ou confundem a leitura dos dados.
- Reconhecer as medidas de tendência central: média aritmética, média aritmética ponderada, moda e mediana.
- Interpretar os valores indicados pelas medidas de tendência central, identificando o significado de cada uma delas e em que elas diferem umas das outras.
- Identificar a medida de tendência central mais adequada para representar uma amostra.
- Reconhecer as medidas separatrizes, em especial a mediana, os quartis, os decis e os percentis.
- Identificar a posição das medidas separatrizes em um conjunto ordenado de dados e calcular seus valores exatos.
- Reconhecer e calcular as medidas de dispersão: amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão.
- Compreender distribuição de frequência e intervalos de classes, relacionando-os às medidas de tendência central.
- Calcular medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos de classes.
- Compreender e construir tabelas de distribuição de frequência e histogramas.
- Resolver problemas envolvendo histograma, distribuição de frequência, medidas de dispersão e medidas de tendência central.
- Reconhecer outras formas de gráficos e diagramas para representar um conjunto de dados, como o *box-plot* e suas características.
- Compreender a relação que pode ser estabelecida entre cálculo de probabilidade e cálculos estatísticos.
- Interpretar situações relacionadas à realização de experimentos com base no conceito de probabilidade.
- Empregar o conceito de probabilidade para a tomada de decisões em situações diversas.

Justificativa

O estudo de gráficos e tabelas é importante para a formação dos estudantes, uma vez que estão presentes em diversas situações do cotidiano. Por exemplo, no âmbito da ciência e da tecnologia, os conjuntos de dados devem ser organizados e analisados para fornecer conhecimentos na construção de uma tese ou na validação de uma teoria. Já no campo da divulgação de notícias, principalmente pelas chamadas mídias (impressa e digital), há uma multiplicidade

de informações que são compiladas em um esquema gráfico de fácil visualização e compreensão para todos. Outra situação em que tabelas e gráficos são usados é no campo empresarial, em que valores devem ser comparados de modo rápido e efetivo. Assim, compreender a função desses gráficos e tabelas é um dos requisitos fundamentais para que os estudantes se tornem membros de uma sociedade consciente e produtiva, desenvolvendo a capacidade interpretativa e o senso crítico.

As medidas de tendência central são mecanismos práticos para que, com base em alguma regra bem definida, seja possível resumir ou sintetizar um conjunto de dados. Nesse sentido, os estudantes podem comparar as diferenças entre elas, inclusive identificando suas limitações para, então, determinar qual delas é melhor em certo caso.

O estudo das medidas separatrizes se justifica pelo fato de essas medidas conferirem informações extras na análise de um conjunto de dados, principalmente quando são trabalhados conjuntos muito grandes. Em certas ocasiões, as medidas de tendência central podem ser insuficientes para representar adequadamente um conjunto de dados. Isso acontece porque essas medidas, em especial a média, podem ser afetadas de maneira exagerada por alguns poucos valores extremos. Além disso, nenhuma dessas medidas é capaz de dar sequer uma ideia quanto à simetria ou à assimetria da distribuição dos dados, podendo induzir ao erro. Para sanar essas dificuldades, aplicam-se as medidas separatrizes, as quais conseguem ordenar e agrupar dados e servir de parâmetros muito úteis para que haja conhecimento quanto à proporção com que os valores estão distribuídos.

No trabalho com as medidas de dispersão, são estudados a amplitude, o desvio médio, a variância e o desvio padrão, a fim de que os estudantes possam conhecer o significado de cada uma dessas medidas, bem como exercitar o cálculo e a interpretação por meio de vários exemplos e problemas práticos.

Páginas 76 e 77

No trabalho com a questão **1**, incentive a reflexão sobre a maneira como as tecnologias e a internet conectam as pessoas ao redor do mundo, independentemente das distâncias geográficas. Encoraje os estudantes a pensar em como as redes sociais, as plataformas de comunicação e as tecnologias de informação influenciam suas vidas diárias e suas percepções do mundo, fomentando a inovação, conforme indica o **Objetivo 9** da **Agenda 2030**. Com a ajuda deles, faça uma lista dessas influências e percepções e, em seguida, promova uma conversa avaliando os impactos positivos e negativos delas.

Página 79

Durante os estudos a respeito do tópico **População e amostra estatística**, proponha aos estudantes uma discussão sobre as vantagens e desvantagens das pesquisas censitárias e pesquisas amostrais em relação à população brasileira. Compare os dois tipos de pesquisas, elencando situações em que uma é mais vantajosa do que a outra. Por exemplo, discuta a viabilidade de realizar uma pesquisa com toda a população a respeito das intenções de voto, considerando o tempo disponível e os recursos dispensados para esse tipo de pesquisa.

Essas discussões envolvendo os conceitos de população e amostra podem contribuir para o desenvolvimento da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 1** da BNCC, por permitir aos estudantes compreender e refletir a respeito de informações transmitidas pela mídia relacionadas às pesquisas estatísticas, sobretudo as amostrais, e que fazem parte do cotidiano deles.

Página 81

Na tarefa **3**, converse com os estudantes sobre o tipo de informação que eles consideram importante conter no questionário. Com a ajuda deles, anote na lousa algumas de suas sugestões.

Página 82

No desenvolvimento dos conteúdos propostos nesse tópico, os estudantes têm a oportunidade de trabalhar com diversos tipos de gráfico, empregando diferentes linguagens, como as linguagens visual e matemática, na interpretação e na disseminação de informações em variados contextos, conforme prevê a **Competência geral 4** da BNCC.

Além disso, o tópico contempla a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 4** e a habilidade **EM13MAT102** da BNCC, ao trabalhar com a análise de tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras inapropriadas.

Páginas 86 e 87

Ao propor o desenvolvimento de um trabalho que requer o uso de planilhas eletrônicas ou outros recursos tecnológicos para construir gráficos, os estudantes são levados a compreender e usar tecnologias digitais de informação e comunicação, além de diferentes tipos de linguagem, como a digital, para partilhar informações e divulgar conhecimentos, conforme preveem as **Competências gerais 4** e **5** da BNCC.

Páginas 88 e 89

Desenvolvimento sustentável

Ao abordar as áreas desmatadas da Amazônia Legal, na seção **Conservando a Floresta Amazônica**, os estudantes são incentivados a criar estratégias envolvendo o conceito de área e calcular a área de certas regiões. Antes de iniciar o trabalho, faça-lhes alguns questionamentos a fim de levantar seus conhecimentos prévios sobre a região compreendida como Amazônia Legal, as principais causas do desmatamento e suas consequências. Oriente-os a ler as páginas iniciais **Livro do Estudante**, que explicam os **Objetivos da Agenda 2030**, e assim retomem o **Objetivo 15** trabalhado nessas páginas. Peça-lhes que identifiquem as metas e o conteúdo principal desse **ODS**, de modo que percebam que se trata de um objetivo voltado para proteção, recuperação e promoção do uso sustentável dos ecossistemas terrestres.

Para desenvolver o conteúdo proposto nessas páginas, é possível aplicar a estratégia **Gallery Walk**, recorrendo aos cartazes produzidos pelos estudantes na tarefa **5**. Organize um espaço da sala de aula ou outro lugar da escola em que os cartazes possam ser expostos e planeje uma visitação do espaço com a turma, de modo que todos possam apreciar os cartazes de campanha produzidos pelos colegas.

Páginas 90 a 93

Na tarefa **8**, durante a realização do item **f**, comente com os estudantes que o principal desperdício de água na agricultura e na agropecuária está relacionado ao uso de irrigações mal executadas e à falta de controle dos agropecuaristas na quantidade de água usada na lavoura e no processamento de seus produtos. Esses impactos recaem sobre o ecossistema, já que os lençóis freáticos e os rios sofrem com a escassez de chuva, em determinadas regiões, e correm o risco de secar ao longo dos anos.

Ao tratar da doação de sangue, contexto abordado na tarefa **9**, espera-se despertar nos estudantes um senso de coletividade, solidariedade e responsabilidade, enfatizando a característica altruísta desse ato, conforme aspectos da **Competência geral 10** da BNCC.

Ao trabalhar com a tarefa **10**, incentive os estudantes a refletir sobre a importância de políticas como o Ligue 180 para o enfrentamento da violência de gênero e sobre como esses serviços estão alinhados ao **Objetivo 5** da **Agenda 2030**, que pode ser consultado nas páginas **8** e **9** do **Livro do Estudante**. Aproveite as reflexões instigadas pelas questões **d** e **e** e oriente os estudantes a pesquisar, organizados em grupos, como mulheres são afetadas por diferentes tipos de violências de gênero sofridas, como moral, psicológica, patrimonial, física e sexual. Eles podem pesquisar também medidas protetivas que podem ser acionadas e os canais de ajuda. Ao final da pesquisa, oriente-os a produzir cartazes a fim de divulgar essas informações para toda a comunidade escolar.

A tarefa **13** contempla o tema contemporâneo transversal **Educação para a valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras**. Nela, apresenta-se a distribuição das populações indígenas no território brasileiro. Conhecer a diversidade da riqueza cultural brasileira é importante para uma formação cidadã plena e consciente, promovendo o respeito a todas as etnias e culturas. Essa tarefa também permite uma articulação com os **Objetivos 10** e **16** da **Agenda 2030**. Esses objetivos visam promover a inclusão social, econômica e política de todos e fortalecer as instituições para promover sociedades pacíficas e inclusivas. Incentive os estudantes a refletir sobre como o reconhecimento e a valorização da diversidade indígena contribuem para reduzir as desigualdades e a violência. No item **c**, ao pesquisar uma etnia indígena, os estudantes têm a oportunidade de explorar a riqueza cultural do Brasil e entender melhor as tradições e os costumes de povos que são parte fundamental da história do país. Isso pode levar a uma conversa sobre a diversidade étnica e cultural e também pode servir como ponto de partida para debater a importância de políticas públicas que respeitem e protejam os direitos das comunidades indígenas, promovendo sua inclusão social e cultural. Oriente-os a buscar fontes confiáveis e a refletir sobre como essas tradições podem ser preservadas e valorizadas na sociedade contemporânea, além de promover o respeito e a empatia entre culturas diferentes.

Ao desenvolver o trabalho com a tarefa **14**, reforce com os estudantes a importância do combate a qualquer tipo de violência, em especial à relacionada à população LGBTQIA+. Oriente-os a pesquisar os principais tipos de violência sofrida por esses grupos e os programas nacionais que auxiliam no combate à intolerância. Aproveite o assunto da tarefa **16** para iniciar uma conversa com os estudantes a respeito do acesso às tecnologias de informação e comunicação no nosso país, e os desafios para atingir o **objetivo 9** da **Agenda 2030**, que busca fomentar a inovação e promover a industrialização inclusiva e sustentável, incluindo o acesso universal e acessível a essas tecnologias.

Páginas 95 a 98

A tarefa **17** aborda a representatividade indígena nas eleições brasileiras, um tema importante para promover a diversidade e a inclusão nas esferas de poder. No trabalho com o item **c**, destaque que é fundamental ter representantes indígenas em cargos eletivos para assegurar que as vozes e as necessidades dessas comunidades sejam ouvidas e respeitadas nas decisões políticas. Embora seja essencial que todos os candidatos eleitos sejam aliados e atuantes nas causas indígenas, esses representantes têm conhecimento e sensibilidade para lidar com questões que afetam diretamente suas comunidades, como a proteção dos direitos dos povos indígenas. Mencione também que, geralmente, candidatos indígenas costumam ser representantes combativos nas questões ambientais, pauta fundamental à sociedade como um todo.

A tarefa **18**, ao tratar da evolução do número de casos confirmados de Covid-19 em alguns países entre a 20ª e a 30ª semana epidemiológica, aborda o tema contemporâneo transversal **Saúde**. Converse com os estudantes sobre o papel da ciência em épocas de pandemias, como a de Covid-19, ressaltando a necessidade de desenvolver vacinas e tratamentos médicos eficientes para a população. Assim, contemplam-se aspectos da **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Ainda na tarefa **18**, converse também com os estudantes sobre como as ferramentas matemáticas permitem construir modelos para compreender a evolução dos números de casos e, assim, fazer previsões e tomar decisões referentes a ações que possam ser implementadas a fim de reduzir a evolução desses casos. Ao abordar a questão **b**, é possível que os estudantes recapitulem o momento em que os primeiros casos de Covid-19 começaram a ser confirmados no Brasil, no final de fevereiro de 2020. Relembre com eles que o primeiro semestre de 2020 foi um período impactante para o mundo todo, pois ainda havia poucas informações sobre o vírus e formas de se proteger dele. Diante disso, mesmo com medidas restritivas tomadas por boa parte dos governantes mundiais, houve um aumento significativo de pessoas infectadas pelo vírus tanto no Brasil como nos outros países representados no gráfico, assim como em todo o resto do mundo.

O trabalho de interpretar dados relacionados à área desmatada na Amazônia Legal, na tarefa **23**, desenvolve a **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 2** da BNCC ao avaliar os efeitos da ação humana no ambiente. Para complementar, proponha um debate com os estudantes sobre o desmatamento a fim de que reflitam quais alternativas e políticas ambientais poderiam garantir a sustentabilidade do planeta.

Ao trabalhar com o item **e** da tarefa **24**, é fundamental que os estudantes reflitam sobre medidas que podem ser adotadas para combater a discriminação racial na sociedade. Para isso, eles podem utilizar conhecimentos da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**. Para aprofundar essa reflexão, recomenda-se a leitura de alguns textos que abordam o tema do racismo e suas consequências, como:

- BERSANI, Humberto. *Aportes teóricos e reflexões sobre o racismo estrutural no Brasil*. Disponível em: https://www.revistas.usp.br/extraprensa/article/view/148025/147028. Acesso em: 23 out. 2024.
- CRUZ, Aline. *O pensamento decolonial como estratégia de enfrentamento ao racismo estrutural no contexto esco-*

lar. Disponível em: https://revistas.uepg.br/index.php/praxiseducativa/article/view/15355/209209214247. Acesso em: 23 out. 2024.

- RIOS, Flavia M.; RATTS, Alex; SANTOS, Márcio André (orgs). *Dicionário das relações étnico-raciais contemporâneas*. São Paulo: Editora Perspectiva, 2023.

Além de promover a leitura, é importante mostrar aos estudantes a relevância de políticas de educação que valorizem a cultura afro-brasileira e reconheçam as violências históricas cometidas contra essa população. Aproveite a oportunidade para abordar a importância da harmonia e da empatia no convívio social, contribuindo assim para criar um ambiente propício ao crescimento coletivo e promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Enfatize que é responsabilidade de todos promover o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza, de acordo com a **Competência geral 8** da BNCC.

Páginas 99 e 100

As inadequações em gráficos e tabelas podem ser acidentais ou propositais. Isso significa que podem ocorrer casos em que pessoas apresentem dados corretos, mas intencionalmente dispostos de modo impreciso, com o intuito de confundir quem os utiliza, simplesmente para satisfazer seus interesses. Enfatize esse fato aos estudantes, promovendo uma conversa e destacando a importância da objetividade, da lisura e da transparência no compartilhamento de informações, principalmente por parte das mídias e de órgãos oficiais, os quais são responsáveis pela formação de opinião e pela instrução de milhões de pessoas.

Aproveite a oportunidade para perguntar aos estudantes se eles já se depararam com pesquisas enviesadas, isto é, visivelmente tendenciosas ou com resultados apresentados de maneira inadequada ou ambígua, induzindo a interpretações não condizentes com a realidade. Na tarefa **28**, por exemplo, as informações foram manipuladas para dar a impressão de que a quantidade de residências com telefones fixos aumentou, porém na verdade houve significativa redução. Aproveite o assunto dessa tarefa e converse com os estudantes a respeito dos números apresentados, incentivando-os a levantar hipóteses para essa queda. Enfatize para eles que o livre acesso a tecnologias de comunicação, que estão substituindo os telefones fixos, exige mais cuidado com dados pessoais e a necessidade de maior segurança cibernética.

Página 101

Trabalho e juventudes

Para complementar o estudo da seção **O que faz um biomédico?**, promova uma roda de conversa com os estudantes para que exponham suas impressões sobre essa profissão.

Explique a eles que sequenciamento de genoma é a técnica para identificar, por meio de processos bioquímicos, os nucleotídeos que compõem parte da cadeia do DNA.

Aproveite a notícia apresentada na seção para valorizar o trabalho das mulheres na carreira científica. Se achar conveniente, sugira aos estudantes que assistam ao filme *Estrelas além do tempo*, de Theodore Melfi, que apresenta a história de uma equipe de matemáticas afro-americanas que trabalharam na Nasa no início do programa espacial nos Estados Unidos.

O trabalho com essa seção possibilita aos estudantes aprender sobre o mundo do trabalho por meio de algumas profissões. Dessa maneira, eles têm mais criticidade para fazer suas escolhas profissionais e planejar seu projeto de vida, conforme aspectos da **Competência geral 6** da BNCC.

Páginas 102 e 103

Educação Midiática

O trabalho com a seção **Tipos de desinformação** possibilita uma integração com a área de **Linguagens e suas tecnologias**. Ao indicar possibilidades de checagem de informações, a seção contribui com estratégias para que os estudantes evitem compartilhar notícias falsas. Se possível, convide o professor de **Língua Portuguesa** para participar da aula e auxiliar os estudantes na identificação dos gêneros textuais midiáticos.

Comente com os estudantes que a desinformação não intencional pode acontecer caso alguém com menos conhecimento midiático interprete uma sátira como uma notícia real, por exemplo. Também é possível que um jornalista cite um dado ou uma informação equivocadamente. Por mais que o deslize seja corrigido, pode ser que nem todos os atingidos pela desinformação acompanhem a retratação.

Outro exemplo de conteúdo que pode causar desinformação ao público é a veiculação de conteúdos patrocinados por jornais, *sites* e revistas, quando uma marca paga um veículo de comunicação para criar ou publicar um conteúdo favorecendo algum produto ou uma imagem da marca. Esses conteúdos só são publicados mediante identificação explícita de patrocínio, mas, como muitos deles são produzidos em formato de notícias, podem passar despercebidos por alguém menos atento.

Ao trabalhar com os estudantes a importância de conferir onde a informação foi publicada, incentive-os a observar os responsáveis pelos dados e estudos divulgados. Sempre que um conteúdo ou uma postagem mencionar dados ou informações revelados por uma "pesquisa", é necessário informar o autor ou a instituição responsável. Ela foi feita por um órgão governamental competente? Por uma instituição acadêmica? Uma agência de pesquisa? Há interesses mercadológicos envolvendo quem fez ou encomendou a pesquisa? Identificar a credibilidade do responsável pelos estudos é essencial para confiarmos nas informações que eles revelam.

Comente com os estudantes que as agências de checagem são uma importante ferramenta de verificação de conteúdos. Essas empresas atuam no combate à desinformação, auxiliando o público a identificar notícias falsas ou distorcidas. Geralmente, nessas agências trabalham jornalistas que apuram a veracidade de conteúdos altamente disseminados nas redes ou em falas de figuras públicas relevantes para a vida em sociedade, divulgando pontos distorcidos ou falsos ou confirmando a informação.

Se achar conveniente, peça aos estudantes que desenvolvam um fluxograma com base nas perguntas para identificar uma desinformação.

As informações dos veículos verificados na atividade **3** podem ser reunidas em um quadro com o nome da fonte, o endereço eletrônico e os comentários relacionados a ela, como os principais tipos de conteúdo publicados, alguma particularidade da linha editorial, as condições de acesso (gratuito, parcialmente gratuito ou quantidade limitada

de cliques) etc. Ao concluírem essa verificação e catalogação, reforce que essas fontes poderão ser consultadas por eles para se manterem informados ou para pesquisar dúvidas sobre um assunto específico. Incentive-os a compartilhar o quadro com os familiares, ampliando, assim, a rede de pessoas beneficiadas pelo levantamento.

Página 104

O registro matemático adequado de média, moda e mediana, bem como o cálculo dessas medidas em várias circunstâncias, pode tornar a percepção dos estudantes aguçada o suficiente para as principais situações com as quais eles podem se deparar.

Sugestão de avaliação

A fim de verificar o conhecimento prévio dos estudantes quanto às medidas de tendência central, proponha a dinâmica descrita a seguir.

Com alguns dias de antecedência, peça aos estudantes que levem para a sala de aula uma fatura de energia elétrica. Se preferir, apresente a eles dados hipotéticos. Analisando o histórico da quantidade de quilowatts consumidos em cada mês, oriente-os a calcular a média de consumo e, em seguida, construir um gráfico de linhas. Pergunte a eles se em algum mês o consumo de energia foi muito superior ou muito inferior à média e o que poderia ter ocasionado esse fato.

Explique a eles que, não necessariamente, a média aritmética corresponde a algum dos valores que a gerou. Instrua-os a fazer comentários sobre as possíveis interpretações que consigam extrair da relação entre os dados e o valor da média. Alguns questionamentos que podem auxiliá-los nesse momento são: Houve discrepância entre os valores? A média é um bom representativo para o consumo geral de energia elétrica daquela residência?

Ao abordar o conceito de média, explique que nem sempre é adequado tomar a média como um representativo seguro de todos os dados de um conjunto. Quando existem discrepâncias muito grandes entre os elementos, a média pode ser severamente influenciada por valores extremos. Para ilustrar esse fato, peça aos estudantes que considerem as informações sobre os salários de cinco funcionários de certa empresa, conforme o quadro a seguir.

Salário de alguns funcionários de uma empresa

Funcionário	Salário mensal
A	R$ 1600,00
B	R$ 1800,00
C	R$ 1900,00
D	R$ 3700,00
E	R$ 24 000,00

Calculando a média salarial, temos:

$$\bar{x} = \frac{1600 + 1800 + 1900 + 3700 + 24\,000}{5} = 6\,600$$

Assim, é possível afirmar que esses cinco funcionários recebem, em média, R$ 6600,00. Porém, ao fazer essa afirmação, uma pessoa sem conhecimento em Estatística e medidas de tendência central poderá supor que os cinco funcionários recebem salários que chegam a R$ 6600,00, o que não é verdade.

Embora os cálculos matemáticos estejam corretos, a média não representa a realidade salarial desses funcionários, pois a maioria deles recebe um salário bem inferior à média, que é elevada pelo motivo de um único funcionário receber um valor superior aos demais.

Aproveite a oportunidade e diga aos estudantes que valores muito diferentes dos demais são denominados "valores discrepantes". Proponha, ainda, que eles calculem a média desconsiderando o valor discrepante, para que, em seguida, comparem a diferença entre elas.

Verifique se os estudantes compreendem a diferença entre média, moda e mediana, apresentando situações em que é mais conveniente aplicar uma ou outra medida.

A média aritmética é a medida de tendência central mais usada por ser aplicada em cálculos posteriores, como o das medidas de dispersão. Além disso, a média pode ser calculada por meio dos dados "brutos", sem que haja necessidade de qualquer tipo de ordenação ou agrupamento, e leva em consideração todos os dados obtidos.

A mediana é preferível quando se pretende conhecer o ponto médio da distribuição ou quando os valores extremos diferem de maneira drástica dos outros dados da amostra, podendo afetar sensivelmente a média.

Por sua vez, a moda é indicada para determinar o valor predominante em um conjunto de dados.

Ao final desse tópico, deve ficar evidente para os estudantes que, ao passo que as medidas de tendência central (também chamadas "medidas de posição") têm a praticidade de substituir até mesmo uma enorme quantidade de informações e de reunir em um único número informações de grande utilidade, elas podem acarretar confusão na interpretação, justamente por serem uma síntese, e não representações completas.

Página 112

Esse tópico aborda as medidas separatrizes, nomeadamente a mediana, os quartis, os decis e os percentis. Essas medidas são de grande importância na estatística descritiva, pois oferecem maneiras práticas e eficazes de organizar dados.

O tópico trabalha não só a identificação e o cálculo da posição de um quartil em um grupo, mas também o significado que existe pelo fato de um dado elemento fazer parte de determinado quartil. Por isso, conhecendo os valores dos quartis de um conjunto, pode-se ter uma boa noção quanto à distribuição de seus elementos, isso sem necessidade de acessar a totalidade dos dados (que, em muitos casos, pode ser extremamente numerosa).

Sugestão de avaliação

A fim de verificar o conhecimento prévio dos estudantes sobre as medidas separatrizes, apresente-lhes um conjunto de dados com alguns valores discrepantes e mostre a eles que apenas o valor da média desse conjunto é um número inapropriado para representar o conjunto como um todo. Em seguida, peça-lhes sugestões de como fornecer, resumidamente, informações mais completas a respeito do conjunto, sem que para isso seja preciso indi-

car a totalidade dos dados. Sugira a eles que disponham os dados em ordem crescente e os dividam em quatro subconjuntos de igual tamanho, anotando os pontos intermediários entre um subconjunto e outro. Em seguida, incentive-os a apresentar interpretações para esses valores, explicitando o que significa o fato de certo dado pertencer a um subconjunto ou a outro e a quais conclusões é possível chegar com essas informações.

A fim de complementar as tarefas propostas nesse tópico, verifique a possibilidade de desafiar os estudantes a obter uma fórmula geral para identificar a posição de um *p*-quantil qualquer, isto é, um agrupamento dos dados em *p* partes com igual quantidade de elementos. Utilizando quartis, decis e percentis como passos de indução, eles podem, ainda, efetuar divisões em quintis (que dividem os dados em 5 partes iguais), octis (que dividem os dados em 8 partes iguais), e assim por diante, até encontrarem uma generalização.

Assim procedendo, espera-se que os estudantes descubram uma fórmula equivalente a $P(p)_i = \frac{i \cdot n}{p}$, em que p é a quantidade de divisões do quantil (por exemplo, $p = 4$ para os quartis e $p = 10$ para os decis), i é a posição do quantil, n é a quantidade de elementos do conjunto e $P(p)_i$ corresponde a i-ésima posição do p-quantil.

Página 116

A utilidade das medidas de dispersão surge, por exemplo, quando se observa que conjuntos muito diferentes entre si podem, por coincidência, apresentar a mesma média ou a mesma mediana. Em casos assim, fica evidente que, sozinhas, as medidas de tendência central não são capazes de fornecer informações quanto à variedade dos dados. Verifica-se, portanto, a necessidade de medidas que, por algum critério bem definido, sintetizem a variedade (isto é, a dispersão) dos dados de um conjunto.

Nesse tópico, ao trabalhar a construção e a interpretação de tabelas e gráficos de frequências, com base em dados obtidos em pesquisas realizadas por meio de amostras estatísticas, contempla-se a habilidade **EM13MAT406** da BNCC. Desse modo, são abordados aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 4** da BNCC.

Página 117

Ao trabalhar com o conceito de desvio médio, enfatize aos estudantes a diferença entre "desvios" e "desvio médio": o desvio é uma medida relativa para cada um dos dados do conjunto, variando de elemento para elemento, e o desvio médio é uma medida para o conjunto como um todo.

Caso julgue pertinente, instrua os estudantes a verificar se, de fato, a soma dos desvios é sempre igual a zero. Após apresentar alguns exemplos numéricos, leve-os a perceber algebricamente que, tomando um conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ com n elementos, sendo $\bar{x}$ a média aritmética dos elementos desse conjunto, tem-se que a soma dos desvios é dada por:

$$\underbrace{(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \ldots + (x_n - \bar{x})}_{n \text{ parcelas}} =$$

$$= x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n \cdot \bar{x} =$$

$$= (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - n \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) =$$

$$= (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0$$

Além disso, indique aos estudantes a relação intuitiva entre o módulo de um número real e a distância desse número na reta real, de modo que $|x_n - \bar{x}|$ pode ser entendido como a distância de x_n a $\bar{x}$. Dessa maneira, é possível interpretar o desvio médio como a média das distâncias entre os elementos de um conjunto e a média aritmética desse mesmo conjunto. Assim, se o desvio médio de um conjunto das alturas, em metros, de um grupo de pessoas for 0,13, entende-se que, em média, os indivíduos desse grupo têm alturas 0,13 maiores ou menores do que a altura média.

Tanto o desvio médio quanto a variância são medidas que estimam a dispersão dos dados em um conjunto. Quanto maior for o desvio médio ou a variância, maior será a dispersão dos dados, isto é, menos homogêneo será o conjunto de dados. Contudo, em razão da diferença nas opções de cálculo, pode ocorrer, na comparação entre dois conjuntos, de uma das medidas indicar diferença de homogeneidade enquanto a outra indica equivalência de homogeneidades.

Ao abordar a relação entre variância e desvio padrão $(Dp = \sqrt{V})$, explique aos estudantes que variância é uma medida correspondente ao quadrado da dimensão dos dados a que ela se refere. Portanto, se os dados são expressos em m, por exemplo, a variância é expressa em m^2. Esse fato pode causar problemas de interpretação, razão pela qual, na prática, é mais comum usar a medida desvio padrão, pois ela preserva a mesma dimensão (isto é, a mesma unidade de medida) dos dados aos quais se refere.

Página 121

Para desenvolver a tarefa **57**, converse com os estudantes para fazer o levantamento de alguns temas que eles consideram interessantes para a comunidade, a fim de obter pesquisas de diferentes assuntos. Lembre-os da importância do respeito ao entrevistar uma pessoa. Ao final do trabalho, proponha a eles que apresentem os resultados da pesquisa para a turma.

A tarefa **57** propõe uma dinâmica ativa de coleta, análise e divulgação de dados com o intuito de aplicar os conhecimentos matemáticos em ações relevantes para a sociedade. Dessa maneira, promove-se o planejamento e a execução de pesquisas amostrais, além da comunicação de resultados estatísticos por meio dos conceitos estudados, contemplando a habilidade **EM13MAT202** e os aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 2** da BNCC.

As tarefas da seção **Exercícios e problemas** abordam a habilidade **EM13MAT316** da BNCC ao levar os estudantes a resolver e a elaborar problemas envolvendo cálculos e a interpretação das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão). Assim, são abordados aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Página 129

Ao trabalhar com a interpretação e a comparação de conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, *box-plot* de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para a análise, contempla-se a habilidade **EM13MAT407** da BNCC. Desse modo, são abordados aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 4** da BNCC.

Ao fim do trabalho com esse tópico, verifique a conveniência de usar a estratégia **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos estudantes, levando-os a refletir sobre os conteúdos estudados. Recapitule os principais pontos e peça-lhes que co-

mentem as aprendizagens que consideram mais relevantes, expressando, com base nos estudos, se sentem maior confiança para interpretar dados estatísticos conscientemente. Solicite a eles que relatem situações práticas nas quais eles compreendam possibilidades de aplicar os conhecimentos construídos ao longo desse tópico, considerando-se receptores de informações estatísticas por parte da mídia.

Página 134

Ao longo do tópico, são discutidas as relações entre conceitos estatísticos e probabilidade, especificamente em relação ao emprego da frequência relativa de ocorrência de experimentos para o cálculo de probabilidades. Assim, por meio desse estudo e das tarefas propostas, espera-se que os estudantes compreendam a relação entre o conceito de probabilidade e os cálculos estatísticos.

O exemplo em discussão apresenta dados a respeito da quantidade aproximada de domicílios com geladeira. Destaque para os estudantes que o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) faz diferentes tipos de levantamento de dados em relação à população brasileira, inclusive a respeito de alguns itens presentes nos domicílios. Se julgar conveniente, proponha aos estudantes a coleta de informações referentes a outros tipos de pesquisas realizadas com a população brasileira, no *site* do instituto. Disponível em: https://sidra.ibge.gov.br/home/ipca/brasil. Acesso em: 13 set. 2024.

Página 135

O problema resolvido **R6** pode contribuir para o trabalho com o tema contemporâneo transversal **Educação para o consumo**, na medida em que destaca a eficiência energética de produtos, ressaltando informações que estão presentes no cotidiano, levando os estudantes a compreender essas informações e, com base nelas, tomar as melhores decisões no momento de adquirir eletrodomésticos. Além disso, considerando que o consumo de energia elétrica tem relação direta com a produção de energia e com o uso de fontes renováveis e não renováveis, as discussões sobre esse assunto promove a reflexão acerca da importância de economizar energia, não apenas para adotar o consumo consciente e reduzir os gastos, mas também para manter as reservas naturais e minimizar os impactos ambientais causados pela geração de energia elétrica, favorecendo, assim, o trabalho com o tema contemporâneo transversal **Educação ambiental**.

Página 137

Durante o trabalho com o problema resolvido **R7** é importante destacar que o IMC (Índice de Massa Corporal) não é o único fator com o qual se avalia se uma pessoa está obesa ou não, nem indica necessariamente se alguém está saudável ou enfermo. Comente que uma pessoa pode ter um valor alto de IMC sem ser considerada obesa quando, por exemplo, apresenta uma grande porcentagem de massa magra. Além disso, a massa de um indivíduo pode ser afetada por outros fatores, como a genética, o gênero, a idade, entre outros. Portanto, apesar de o IMC ainda ser considerado em pesquisas gerais sobre população, pela praticidade com a qual é calculado, individualmente, há exames mais indicados para medir a composição corporal com mais precisão, como o de bioimpedância. Aproveite as trocas de ideias propiciadas pelo assunto abordado nesse problema para conversar com a turma sobre a importância de combater todo tipo de *bullying*, respeitando a diversidade entre as pessoas, principalmente no ambiente escolar. Assim, é possível criar um ambiente propício ao crescimento coletivo, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e contribuindo para a saúde mental dos estudantes.

O problema resolvido **R7** favorece o trabalho com o tema contemporâneo transversal **Saúde** ao possibilitar discussões e reflexões a respeito do IMC e de outros fatores que devem ser considerados na avaliação da saúde, principalmente quanto à obesidade. O trabalho com contextos relacionados à saúde permite a conscientização dos estudantes quanto à necessidade de conhecer e cuidar da própria saúde física, conforme orienta a **Competência geral 8** da BNCC.

Páginas 138 e 139

Desenvolvimento sustentável

O texto e as questões apresentadas na seção **Métodos contraceptivos e sua eficácia** demonstram a importância dos métodos contraceptivos para evitar a gravidez e prevenir infecções sexualmente transmissíveis. Além disso, esse trabalho possibilita uma integração com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Se possível, convide o professor de **Biologia** para participar da aula e comentar mais sobre o assunto com a turma.

Diga aos estudantes que existem vários métodos contraceptivos e cada um consiste em diferentes probabilidades de eficácia. Explique que o resultado de um mesmo método pode variar conforme é utilizado. O uso correto garante maior eficácia a todos os métodos disponíveis, por isso é indispensável obter informações preliminares de como usar os produtos, além do acompanhamento periódico com médicos especialistas.

Explique-lhes que, para as mulheres, a escolha do método contraceptivo deve ser sempre acompanhada pelo médico ginecologista, pois ele é o profissional responsável por tratar da fisiologia e patologia do corpo feminino e de seu aparelho reprodutor.

Ressalte aos estudantes que alguns métodos contraceptivos não impedem a transmissão de Infecções Sexualmente Transmissíveis (ISTs). O método mais seguro contra a transmissão de doenças é o preservativo externo ou interno.

Relembre que o preservativo masculino é o método contraceptivo mais acessível. Para informar sua eficácia, explique que, considerando 50 relações sexuais, esse tipo de preservativo evitaria a gravidez em 49 delas, caso seu uso tenha sido feito de maneira correta.

Durante a tarefa **1**, peça a participação de todos os estudantes, garantindo-lhes o respeito durante a fala de cada um a fim de evitar situações constrangedoras entre os colegas.

O estudo sobre métodos contraceptivos, sua eficácia contra gravidez indesejada e a prevenção de ISTs contemplam o **Objetivo 3** da **Agenda 2030**, que pode ser consultado no início do **Livro do Estudante**.

O estudo dessa seção desenvolve a habilidade **EM13MAT106** ao abordar situações da vida cotidiana em que é necessário fazer escolhas, levando em conta riscos probabilísticos, em especial o uso de métodos contraceptivos.

Página 140

O contexto da tarefa **76** está diretamente relacionado ao **Objetivo 11** da **Agenda 2030**, que pode ser consultado no início do **Livro do Estudante**. Sugira aos estudantes que pesquisem a cobertura da rede de saneamento do bairro deles. Depois, explique a eles que a falta de rede coletora de esgoto compromete a qualidade de vida das pessoas, pois a infraestrutura urbana, como a rede de água e esgoto, melhora a saúde pública, prevê doenças e promove um ambiente mais sustentável. Essa discussão pode ser expandida para incluir a importância de políticas públicas que assegurem o acesso universal a serviços básicos de saneamento.

A tarefa **80** desenvolve a habilidade **EM13MAT106** ao promover reflexões sobre o uso da probabilidade na tomada de decisões em diferentes situações, sobretudo nas cotidianas.

Página 141

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando os que já conheciam e se houve algum em que tiveram dificuldades.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido por meio de textos ou dinâmicas em grupos. Nesse momento, proponha aos estudantes a elaboração de questionamentos em função dos erros mais comuns que identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Identifico as vantagens e desvantagens nas representações dos gráficos?"; "Reconheço as medidas de tendência central: média aritmética, média aritmética ponderada, moda e mediana?"; "Consigo calcular medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos de classes?"; "Resolvo problemas envolvendo o conceito de probabilidade?". Com base nas respostas, é esperado que identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado, sanando possíveis dúvidas em relação ao conteúdo.

As questões de **3** a **10** são de direta aplicação dos conteúdos estudados. Com elas, é esperado que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas. Essas anotações auxiliarão o desenvolvimento da questão **11**.

Na síntese proposta na questão **11**, os estudantes podem aplicar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais e resumos textuais, dando exemplos e usando imagens. Incentive-os a explorar a criatividade nesse momento.

CAPÍTULO 4

Geometria espacial de posição

Nesse capítulo, são desenvolvidas as unidades temáticas de Matemática **Geometria e Medidas**, em situações relacionadas à Geometria espacial de posição, abordando conceitos fundamentais como retas e planos no espaço, posições relativas entre esses elementos e suas interseções. Além disso, são explorados os princípios de paralelismo e perpendicularidade, bem como o uso de notações adequadas para representar essas relações.

Objetivos específicos

- Compreender as posições relativas entre duas retas, entre reta e plano e entre dois planos.
- Identificar figuras planas e figuras espaciais.
- Compreender os axiomas ou postulados para validar resultados por meio de demonstrações matemáticas.
- Reconhecer as propriedades de paralelismo e perpendicularismo no espaço.
- Reconhecer as projeções ortogonais sobre um plano.
- Resolver problemas envolvendo projeções ortogonais no plano.
- Compreender as distâncias no espaço.

Justificativa

Esse capítulo aborda conceitos fundamentais para compreender a Geometria espacial de posição. Em caráter preliminar, estudam-se alguns conceitos iniciais que antecedem o estudo dos conceitos de ponto, reta e plano, que norteiam o trabalho com estruturas e propriedades geométricas mais complexas, como os conceitos de posição relativa, paralelismo e perpendicularismo.

Os conteúdos devem ser explorados por meio dos mais diversos recursos, de modo a atingir um desenvolvimento satisfatório em todos os estudantes, levando em conta as aptidões e dificuldades de cada um. Considerando isso, é importante ter em mente que os assuntos abordados nesse capítulo exigem uma capacidade de visualização tridimensional que deve ser desenvolvida nos estudantes.

Além disso, os conteúdos do capítulo fornecem subsídios para uma melhor compreensão da realidade física, consequentemente aprimorando habilidades necessárias em atividades tanto artísticas quanto profissionais e de pesquisa, como na Física, na Química, na Arquitetura, nas engenharias, na carpintaria e em ofícios artísticos que necessitem de conhecimentos sobre perspectiva e tridimensionalidade, das esculturas e artes plásticas às manifestações contemporâneas de produção de animações e jogos digitais.

São abordados também conceitos que envolvem projeções ortogonais no plano e distâncias no espaço. Esses conteúdos são fundamentais para compreender aspectos da Geometria espacial de posição, pois questões relacionadas a projeções ou distâncias no espaço podem criar condições para construção e/ou uso de um modelo matemático capaz de nos auxiliar a compreender o mundo, a entender a maneira de nos comunicarmos e como se dão nossas interações. Isso contribui na formação tanto para o mercado de trabalho quanto de sujeitos capazes de interpretar situações corriqueiras do dia a dia, como interpretar uma sinalização de alerta, representar objetos em 3D ou 2D, projetar a planta de uma casa, explorar diferentes perspectivas de um objeto etc.

Páginas 142 e 143

Na abertura desse capítulo, são apresentadas ideias de projeções ortogonais, tomando como exemplo a produção de desenhos técnicos. Para complementar e enriquecer as discussões, converse com os estudantes sobre algumas informações a respeito do desenho técnico na Engenharia e na Arquitetura e as normas que regem essa prática. As vigentes no Brasil são aprovadas e editadas pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), fundada em 1940. Quando se trata de intercâmbio de serviços, em nível internacional, o órgão responsável pelas normatizações é a International Organization for Standardization (ISO), fundada em 1947, com sede em Londres. Ainda no âmbito nacional, há várias

normas, conhecidas como NBRs, que estão de acordo com a ISO e regem a linguagem do desenho técnico em seus mais diversos parâmetros, como *layouts* e dimensões.

Na questão **2**, incentive os estudantes que já fizeram algum desenho técnico a compartilhar suas experiências com os colegas.

Para realizar a questão **3**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas. Nessa pesquisa, é esperado que eles reconheçam a importância do desenho técnico para além do seu uso em contextos acadêmicos, como na criação e fabricação de produtos e estruturas, por exemplo.

O assunto abordado nas páginas de abertura evidencia características das **Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 3** e **4** da BNCC, pois incentiva a mobilização de procedimentos matemáticos para construir modelos e promove o uso de diferentes registros de representação matemática.

Avalie a possibilidade de desenvolver uma aula em conjunto com o professor da área de **Linguagem e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular de **Arte**. Uma sugestão é que, com a ajuda do professor desse componente, os estudantes realizem um exercício de observação e de desenho de objetos tridimensionais na sala de aula.

Esse trabalho permitirá que eles compreendam conceitos como perspectiva e volume, aplicando essas noções na prática artística.

Sugestão de avaliação

Na introdução desse capítulo, procure identificar os conhecimentos prévios dos estudantes acerca dos conceitos que serão estudados. Para isso, proponha uma dinâmica de analisar geometricamente alguns objetos presentes na sala de aula, como cadeiras e livros. Se possível, apresente imagens que contenham visões de mais de uma perspectiva de um mesmo objeto, apresentando-o em vários pontos de vista.

Por meio de imagens com projeções ortogonais de uma cadeira, oriente os estudantes a observar as imagens e a identificar as vistas frontal, lateral e superior do objeto. Depois, leve-os a perceber que na figura relacionada à vista frontal da cadeira podemos ver representada uma região plana e dois segmentos de reta paralelos; na vista lateral, segmentos de reta paralelos e concorrentes; na vista superior, apenas uma região plana.

Conclua a tarefa dizendo que nesse capítulo serão estudados os conceitos de Geometria de posição envolvendo posições relativas entre os elementos do espaço: ponto, reta e plano.

Página 144

No texto dessa página, há informações históricas quanto ao desenvolvimento da Geometria, em especial, e da Matemática, em geral. Tais informações são essenciais para que os estudantes conheçam as origens das ideias matemáticas que até os dias atuais aplicamos na construção do conhecimento humano. Verifique se eles compreendem a importância da evolução dos conceitos e interpretam os contextos intelectuais de diferentes épocas, a fim de que sejam capazes de avaliar de modo crítico e consciente a conjuntura atual nos estudos e na transmissão e produção de saberes.

Descobrir os métodos de dedução lógica, percebendo que para validar uma proposição matemática é necessário prová-la de forma que se torne verdadeira em todos os casos, foi uma das maiores conquistas da humanidade rumo ao progresso científico e tecnológico.

Outro ponto a ser destacado é o fato de Euclides ter sido um organizador de todo o conhecimento geométrico acessível em seu tempo, reunindo em uma só obra, de forma sistematizada em uma ordem lógica impecável, todos os teoremas e proposições mais essenciais da Geometria, tudo isso decorrendo do menor número possível de axiomas aceitos como autoevidentes. Milênios antes da sistematização da Matemática em bases lógicas sólidas, Euclides já havia percebido a necessidade de um tratamento axiomático da Geometria. Seu trabalho *Os elementos*, até os dias atuais usado como base de materiais didáticos, é a obra científica mais divulgada e duradoura de todo o mundo.

Página 148

Ao abordar o **Postulado 7**, diga aos estudantes que, por muitos anos, diversos matemáticos tentaram provar que esse postulado poderia ser derivado dos demais, constituindo-se, portanto, um teorema, e não uma verdade que deva ser aceita sem prova. Contudo, durante vários séculos, mesmo os maiores matemáticos não foram capazes de realizar esse feito de obter o postulado das paralelas por meio de um encadeamento lógico fundado nos outros postulados. Já no século XIX, constatou-se, por meio de uma prova conclusiva, que de fato isso é impossível. Tal constatação deu origem a outras geometrias, mais complexas e abstratas, denominadas "geometrias não euclidianas". Essas geometrias partem dos mesmos postulados que a Geometria euclidiana clássica, exceto no que diz respeito ao postulado das paralelas. Na Geometria elíptica, por exemplo, não há nenhuma reta que seja paralela à reta inicial, ao passo que na Geometria hiperbólica postula-se que por um ponto fora de uma reta dada passam infinitas retas que lhe sejam paralelas.

Página 152

Na tarefa **9**, chame a atenção dos estudantes para a importância de manter uma escrita clara e rigorosa, sem ambiguidades, na hora de reescrever as frases que estejam incorretas. Muitas vezes, temos uma ideia correta, mas nos equivocamos no momento de registrá-la no papel. É necessário, no registro de proposições matemáticas, usar palavras unívocas em uma frase bem construída.

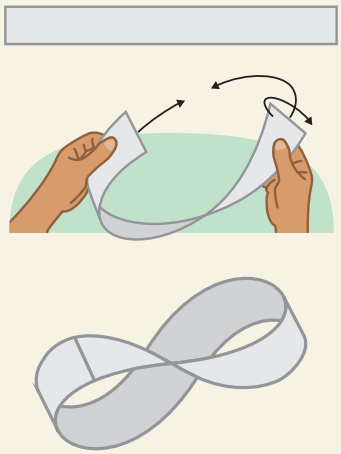
Para resolver a tarefa **10**, proponha a construção do prisma indicado. Complemente a tarefa fazendo as mesmas perguntas a respeito de um prisma oblíquo. Providencie os moldes de um prisma reto de base hexagonal e de um prisma oblíquo de base hexagonal e leve-os para a sala de aula.

Na tarefa **11**, sugira aos estudantes que façam desenhos ou usem os próprios lápis e canetas como representantes físicos das retas, a fim de que avaliem as possibilidades com mais facilidade.

Página 154

Na tarefa **16**, pode ser interessante para os estudantes relacionar o efeito paradoxal com a imagem de uma Faixa de Moebius, que é uma figura tridimensional de apenas uma face na qual se pode percorrer toda sua extensão e retornar ao mesmo ponto sem realizar "saltos" ou mudar de direção. Se houver tempo hábil, promova a construção de uma Faixa de Moebius na sala de aula. Solicite aos estudantes que destaquem uma tira fina e comprida de papel e, com os dedos, sem colar, unam suas extremidades formando um círculo. Em seguida, eles devem girar 180° uma das extremidades e,

nesse momento, fixá-las com cola. Feito isso, a faixa estará pronta. Na sequência, peça-lhes que percorram a superfície da faixa com um dedo e percebam que, sem tirar o dedo do papel, é possível fazer uma trajetória completa em toda sua extensão, retornando ao ponto de origem.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO E SÉRGIO L. FILHO

Explique as diferenças entre as imagens paradoxais de Escher e a Faixa de Moebius. Embora em ambas as construções se tenha um movimento de eterno retorno, a Faixa de Moebius é uma construção tridimensional possível, enquanto os desenhos de Escher são construções imaginárias que, por meio de ilusões de óptica bidimensionais convincentes, representam formas impossíveis no espaço, pois causam a contradição de movimentos que sobem e retornam à mesma origem sem uma descida.

A tarefa **16** promove o desenvolvimento da **Competência geral 3** da BNCC. Além disso, permite trabalhar o tema contemporâneo transversal **Diversidade cultural**, pois, ao abordar a obra de um artista de estilo icônico e concepções originais, promove-se a valorização de manifestações artísticas e culturais diversas, inserindo os estudantes nas ricas tradições da cultura mundial. Nota-se ainda que incentivar a associação entre Matemática e produções artísticas acarreta benefícios na apreensão de ambas as áreas, além de incrementar o senso estético dos estudantes, possibilitando-lhes perceber camadas mais profundas e sutis na apreciação artística. Assim, eles poderão fruir a cultura de modo mais pleno e, eventualmente, vir a se expressar em nível artístico com maior amplitude de consciência.

Página 159

Para responder à questão da tarefa **23**, peça aos estudantes que apoiem um livro sobre a mesa para que tenham a visão tridimensional da situação.

Ao final do trabalho com esse tópico, verifique a conveniência de aplicar a estratégia ***Quick writing*** para avaliar o aprendizado dos estudantes, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate, peça-lhes que comentem a importância dos processos lógico-dedutivos na Matemática, em especial na Geometria. Solicite a eles que falem sobre as dificuldades que tiveram em visualizar ou em compreender as posições relativas entre retas e planos.

Página 161

Na tarefa **24**, oriente os estudantes a comentar termos e símbolos matemáticos que ainda causam dúvidas ou dos quais eles não lembrem o significado e anote as dúvidas na lousa para esclarecer ou relembrar definições que sejam necessárias.

Página 163

Trabalho e juventudes

O texto e as atividades apresentados na seção **O que faz um arquiteto?** permitem fomentar o trabalho desse profissional. Complemente as informações explicando aos estudantes que é comum as pessoas confundirem arquiteto com engenheiro, mas são profissionais diferentes, inclusive com cursos de graduação distintos. Diga-lhes que os arquitetos atuam no *design* das construções com planos e projetos de estruturas que levam em consideração os aspectos funcionais e estéticos, enquanto os engenheiros são responsáveis por planejar e supervisionar as construções tornando-as seguras, definindo materiais estruturais e desenvolvendo os sistemas elétricos, hidráulicos etc.

Ao realizar com os estudantes a atividade **2** dessa seção, oriente-os a listar no caderno as informações que considerarem mais relevantes e relacionadas com a arquitetura africana da sociedade Kassena, com base no resultado da pesquisa que fizerem. Enfatize a importância de conhecer, valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, conforme a **Competência geral 1** da BNCC, a fim de colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Página 166

A tarefa **31** aborda aspectos da **Competência geral 2**, da BNCC, pois é necessário ter imaginação e criatividade para compreender aspectos matemáticos contextualizados a elementos artísticos. Além disso, leva os estudantes a realizar investigação e análise crítica para resolver uma situação advinda de outra área do conhecimento.

Página 167

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando os que já conheciam e se houve algum em que tiveram dificuldades.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido por meio de textos ou dinâmicas em grupo. Nesse momento, proponha aos estudantes que elaborem questionamentos em função dos erros mais comuns que identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Reconheço as possíveis posições relativas entre duas retas?"; "Reconheço as possíveis posições relativas entre reta e plano?"; "Reconheço as possíveis posições relativas entre dois planos?"; "Compreendo e aplico as propriedades de paralelismo e perpendicularismo?"; "Compreendo as projeções ortogonais sobre um plano?". Por meio das respostas, é esperado que identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado, sanando as possíveis dúvidas em relação ao conteúdo.

As questões de **3** a **13** são de direta aplicação dos conteúdos estudados. Com elas, é esperado que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas, pois esses registros auxiliarão o desenvolvimento da questão **14**.

Na síntese proposta na questão **14**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais e resumos textuais. Instigue-os a dar exemplos e, se julgarem conveniente, usar imagens. Incentive-os a usar a criatividade nesse momento.

CAPÍTULO 5

Poliedros

Nesse capítulo, são desenvolvidas, em diferentes situações, as seguintes unidades temáticas de Matemática: **Geometria e Medidas**; **Números e Álgebra**. Essas situações ocorrem, por exemplo, na resolução de problemas que envolvem o cálculo da área e do volume de prismas e pirâmides. Além disso, há ocorrências da inter-relação entre essas unidades temáticas, como no uso de algoritmos para descrever uma maneira de determinar a área de uma peça e na organização de fluxogramas.

Objetivos específicos

- Distinguir figuras geométricas espaciais entre poliedros e não poliedros.
- Diferenciar poliedros convexos de poliedros não convexos.
- Reconhecer os Poliedros de Platão.
- Resolver situações-problema relacionadas a figuras geométricas espaciais.
- Utilizar a Relação de Euler em problemas envolvendo poliedros.
- Reconhecer as propriedades de um prisma.
- Identificar os elementos de um prisma.
- Calcular a área de superfície de um prisma.
- Calcular o volume de um prisma.
- Compreender o Princípio da Cavalieri para obter volume de prismas.
- Reconhecer pirâmides e seus elementos.
- Reconhecer troncos de pirâmides e seus elementos, relacionando-os com os elementos da pirâmide.
- Calcular volume de pirâmides e de tronco de pirâmides, inclusive deduzindo fórmulas e estabelecendo relação com as fórmulas de volumes de outros poliedros.

Justificativa

Esse capítulo aborda figuras planas e tridimensionais, representadas em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. Nele, procura-se consolidar conteúdos estudados no Ensino Fundamental, como elementos de polígonos e soma da medida de seus ângulos internos e classificação de poliedros quanto à quantidade de faces. Os principais conteúdos estudados são poliedros convexos e poliedros não convexos, Relação de Euler, Poliedros de Platão, poliedros regulares e não poliedros.

No estudo dos prismas, os principais conteúdos abordados são os elementos e suas características, área da superfície, volume do paralelepípedo reto retângulo e Princípio de Cavalieri. Alguns estudantes podem ter dificuldades para interpretar as figuras como espaciais, por isso é sugerido o uso de modelos para visualização. Essa abordagem possibilita compreender propriedades geométricas em mais de duas dimensões e usar conteúdos matemáticos como uma ferramenta auxiliar na interpretação e na ação sobre diversas situações da realidade.

O capítulo trata ainda das pirâmides e dos troncos de pirâmides, explorando elementos desses poliedros, relações entre quantidades de vértices, arestas e faces e classificação conforme o formato da base. Além disso, verificam-se as fórmulas por meio de demonstrações lógicas e comparação com outros poliedros, áreas de regiões pertencentes à pirâmide e ao tronco de pirâmide e os volumes respectivos. Assim, são deduzidos e aplicados métodos para calcular a medida da área da superfície lateral e da superfície total de poliedros, bem como a medida do volume de pirâmides e de troncos de pirâmides.

Páginas 168 e 169

A abordagem do tema Calçada dos Gigantes possibilita a análise de fenômenos naturais e retrata aspectos relacionados à origem da formação rochosa resultante de constantes transformações da natureza e da evolução da Terra, como sugere a **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 2** da BNCC.

Ao usar conceitos matemáticos para auxiliar na interpretação de fenômenos naturais, contemplam-se aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC. Converse com os estudantes sobre o que caracteriza um Patrimônio Cultural da Unesco e a importância de lugares como esse para a cultura, a história e o turismo no país, aproveitando para levantar diálogos com a Matemática sobre esse tema.

Página 170

Sugestão de avaliação

Para introduzir esse tópico e avaliar os conhecimentos prévios dos estudantes, leve à sala de aula alguns objetos que tenham formato semelhante ao de poliedros. Peça-lhes que analisem e listem algumas semelhanças e diferenças. Proponha que escolham um desses objetos e escrevam suas características em uma folha de papel, trocando-a depois com um colega. Em seguida, peça-lhes que indiquem o objeto escolhido pelo colega, analisando apenas a descrição feita por ele. Tais características podem ser registradas com base na resposta a algumas perguntas, como: "O objeto apresenta faces triangulares?"; "O objeto tem faces paralelas?"; "As faces que compõem o objeto são semelhantes entre si?".

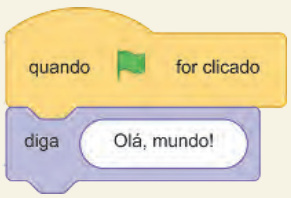
Essa tarefa permite auxiliar a observação de regularidades, o que será feito ao longo do tópico para identificar relações entre plano e espacial, entre número de vértices, arestas e faces.

Páginas 172 e 173

O trabalho com essa seção poderá ser realizado no laboratório de informática da escola. Caso não haja computadores suficientes para todos os estudantes, organize-os em grupos e permita que, no decorrer da tarefa, todos tenham a oportunidade de manipular o *software* em questão.

Oriente os estudantes a mudar o idioma do Scratch acessando o menu **Idioma**, em **Configurações**, e selecionando **Português Brasileiro**. Em seguida, deixe que manipulem o Scratch e se familiarizem com sua estrutura. Para conhecer um pouco mais a usabilidade dessa linguagem, é interessante assistir ao vídeo "Primeiros passos". Disponível em: https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted. Acesso em: 18 ago. 2024.

Antes de propor aos estudantes que reproduzam o algoritmo apresentado na seção, sugira, por exemplo, a construção do algoritmo a seguir.



FOTOS: REPRODUÇÃO/SCRATCH

Ao executar esse algoritmo, o personagem diz "Olá, mundo!".

Se necessário, leve-os a compreender que o bloco:

- 

indica o início do algoritmo;
- 

é usado para apresentar mensagens com balões de fala – nesse caso, "Olá, mundo!".

Nessa seção, os estudantes são desafiados a decompor problemas, reconhecer padrões, filtrar, classificar e organizar informações relevantes e construir algoritmos, desenvolvendo assim o **pensamento computacional**.

Essa seção contempla a habilidade **EM13MAT405** e aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 4** da BNCC. Nas tarefas propostas, conceitos iniciais de uma linguagem de programação são aplicados na implementação de um algoritmo que permite, computacionalmente, determinar a quantidade de arestas de um poliedro convexo, desde que sejam informadas as quantidades de vértices e faces. Com isso, os estudantes utilizam diferentes linguagens, possibilitando que, por meio delas, expressem-se e partilhem informações, experiências, ideias e sentimentos, como sugere a **Competência geral 4** da BNCC.

Página 174

Para a tarefa **1**, além de apresentar a classificação de cada sólido, peça aos estudantes que justifiquem suas respostas com base nas definições apresentadas nas páginas anteriores.

Na tarefa **6**, caso eles tenham dúvidas, oriente-os a rever a tarefa **3** para que representem o poliedro.

Página 176

O contexto apresentado na tarefa **12** permite a realização de um trabalho com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular de **Química**. Nela, o conceito de Geometria é associado ao estudo das estruturas moleculares. Dessa maneira, é possível explorar tanto aspectos matemáticos quanto químicos e mobilizar aspectos da **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Página 181

A tarefa **20** contempla a habilidade **EM13MAT405**, tendo em vista que requer dos estudantes a implementação de algoritmos escritos em linguagem matemática usando, para isso, conceitos iniciais de linguagem de programação. Desse modo, abordam-se aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 4** da BNCC.

Para que os estudantes reflitam sobre os conteúdos abordados nesse tópico, uma sugestão é a elaboração de um mapa conceitual. A estratégia ***Quick writing*** pode servir como base para outros encaminhamentos dessa natureza.

Páginas 182 e 183

Educação Midiática

O trabalho com o texto e as atividades da seção **Cada um na sua bolha** leva os estudantes a considerar o que seria uma alta quantidade de informações. Pergunte-lhes se o acesso a informações em larga escala necessariamente significa uma melhoria no quão informada uma pessoa pode se considerar. Verifique se eles compreendem que a quantidade de informações não é relevante quando não se conhece a procedência delas. Direcione-os a reparar que o personagem de óculos da tirinha sequer contesta quem é o outro personagem que lhe entrega o mundo de informações, e que uma das críticas é a de aceitar as informações sem questionar suas fontes e a intenção de quem as dissemina. Incentive-os a refletir se isso ocorre no cotidiano deles. Oportunize um momento para dialogar sobre a confiabilidade das informações que recebemos.

Mais informações sobre como fazer uma busca informada e consciente podem ser consultadas no guia *Educação para a informação*, produzido por Mariana Ochs e disponibilizado pelo programa EducaMídia. Disponível em: https://educamidia.org.br/recurso/midiamakers-papers-guias-da-educacao-midiatica. Acesso em: 17 ago. 2024.

Ao trabalhar a atividade **4**, reforce para os estudantes que eles não precisam gostar de consumir novos conteúdos, mas é interessante estarem abertos à experiência de conhecer e aprender algo novo ou diferente daquilo que faz parte do dia a dia. Caso haja estudantes que não usem a internet, oriente-os a fazer a atividade em duplas com colegas que tenham esse hábito.

Páginas 190 a 192

O item **a** da tarefa **44** e a questão **A**, apresentada na explicação teórica da página **192**, contemplam a habilidade **EM13MAT315** da BNCC, pois exigem a investigação e o registro, por meio de um fluxograma, de um algoritmo que responde aos problemas dados.

O item **b** da tarefa **44** requer a elaboração de um problema, e consequente resolução, envolvendo a área total do prisma, ou seja, aborda a habilidade **EM13MAT309** da BNCC.

Página 193

A investigação de processos de cálculos da medida do volume de prismas, por meio de uma reorganização das formas, encaminha as discussões do tópico **Princípio de Cavalieri** abordado nessa página e contempla a habilidade **EM13MAT504**. Desse modo, aborda-se a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 5** da BNCC.

Página 195

A tarefa **48** apresenta o problema da embalagem plástica do sorvete. Convide os estudantes a refletir sobre o fato de que o sorvete, assim como o leite ou o suco, é vendido em litros, mas muitas vezes vem em embalagens em formato de prismas. Questione-os sobre como pode ser calculada a capacidade da embalagem para conter o produto. Se possível, leve para a sala de aula embalagens de leite, suco e sorvete que tenham o formato de prismas e promova grupos de investigação acerca do volume e da capacidade desses recipientes. Motive-os a conversar a respeito desse assunto ou pesquisar algo relacionado à

correspondência entre as unidades de volume e as de capacidade, como 1 L corresponder a 1 dm^3.

Página 197

A tarefa **64** motiva a ação pessoal e coletiva em prol de decisões fundamentadas em princípios de responsabilidade social e atitudes sustentáveis, que estão relacionados à **Competência geral 10**. Além disso, ao propor trazer desafios do mundo contemporâneo para investigação e resolução matemática de maneira articulada à análise de problemas sociais, evidenciam-se características da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 2** da BNCC.

A tarefa **69** contempla a habilidade **EM13MAT309** da BNCC, tendo em vista que propõe aos estudantes que elaborem um problema, com base nos conteúdos estudados no tópico, e, com base nele, resolvam usando cálculo de áreas totais e/ou volumes de prismas.

Páginas 198

Trabalho e juventudes

No estudo da seção **O que faz um artista 3D?**, verifique a possibilidade de realizar uma visita ao local de trabalho desse profissional. Para isso, providencie a autorização dos responsáveis pelos estudantes menores de idade. Oriente os estudantes a elaborar antecipadamente algumas questões e deixe-os à vontade para fazer outros questionamentos durante a visita, ressaltando a importância do diálogo respeitoso. Caso não seja possível visitar o local, convide o profissional para ir até a escola ou proponha uma videochamada para que ele possa ser entrevistado pelos estudantes e mostre seu ambiente de trabalho e os recursos usados no dia a dia.

Página 203

Complemente o trabalho com a tarefa **77** propondo aos estudantes que pesquisem informações complementares a respeito da lei que dispõe sobre o crime de soltar balões. Se julgar conveniente, oriente-os a acessar a reportagem "Soltar balão é crime e põe em risco o espaço aéreo", postada em 2018 no *site* Gov.br. Disponível em: https://www.gov.br/transportes/pt-br/assuntos/noticias/ultimas-noticias/soltar-balao-e-crime-e-poe-em-risco-o-espaco-aereo. Acesso em: 14 set. 2024.

Páginas 204 e 205

A teoria apresentada nessas páginas contempla aspectos da habilidade **EM13MAT504** da BNCC. As deduções obtidas nessas páginas, assim como as demonstrações das fórmulas apresentadas passo a passo de uma maneira tanto rigorosa quanto intuitiva, valem-se de relações de semelhança e proporcionalidade entre formas geométricas, amparadas pelo Princípio de Cavalieri, na construção lógica de formulações para o cálculo da medida de volume de pirâmides quaisquer. Assim, é abordada a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 5** da BNCC.

Página 207

A tarefa **87** contempla a habilidade **EM13MAT309** da BNCC. Nela, a participação ativa dos estudantes na elaboração de um problema envolvendo áreas totais e volumes de pirâmides incentiva uma melhor compreensão do conteúdo, pois os insere na posição de pensar criativamente em situações práticas nas quais os conteúdos estudados podem ser úteis ou necessários. Desse modo, trabalha-se a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Páginas 208 e 209

Desenvolvimento sustentável

No trabalho com a seção **Proteção aos Patrimônios Mundiais**, explique aos estudantes que os critérios de reconhecimento dos bens naturais e culturais como patrimônios da humanidade foram estabelecidos a partir de 1972, ano em que aconteceu em Paris, na França, a Convenção para a Proteção do Patrimônio Mundial, Cultural e Natural, organizada pela Unesco. Incentive os estudantes a refletir sobre a importância da preservação dos patrimônios da humanidade como meio de dar visibilidade à região onde estão inseridos, além de contribuir para a preservação da memória e da história locais. Oriente-os a ler as páginas **8** e **9** do **Livro do Estudante**, que explicam os **Objetivos da Agenda 2030**, e, em seguida, retomem o **Objetivo 11** trabalhado nessas páginas.

O contexto abordado nessas páginas possibilita o desenvolvimento das **Competências gerais 1** e **2**. Ao trabalhar esse tema, os estudantes exercitam sua curiosidade intelectual com relação a conhecimentos historicamente construídos referentes à abordagem própria da ciência a fim de investigar, refletir e resolver problemas com base em conhecimento das diferentes áreas.

Páginas 210 e 211

O trabalho com a ruína El Castillo propicia a mobilização da **Competência geral 1** da BNCC. Ao estudar características de uma civilização ancestral de grande importância histórica no desenvolvimento da Astronomia e da Matemática, os estudantes têm a oportunidade de compreender a importância da diversidade cultural e dos avanços historicamente construídos da ciência e da tecnologia, bem como de promover a aplicação de conhecimentos sobre o mundo social e cultural para entender e explicar a realidade.

Ao introduzir o tópico **Volume de um tronco de pirâmide**, faça na lousa, com os estudantes, a dedução da fórmula do volume do tronco de pirâmide, conforme a seguir. Esse tipo de tarefa permite aos estudantes verificar a equivalência de diferentes expressões por meio da articulação de conhecimentos e propriedades matemáticas, além de aprimorar a escrita e a leitura da linguagem matemática.

O volume do tronco de uma pirâmide pode ser obtido pelo seguinte cálculo:

$$V_{tronco} = \frac{A_B \cdot H - A_b \cdot h}{3}$$

Como, $h = H - H_t$, temos:

$$V_{tronco} = \frac{A_B \cdot H - A_b(H - H_t)}{3} =$$

$$= \frac{A_B \cdot H - A_b \cdot H + A_b \cdot H_t}{3} = \frac{H(A_B - A_b) + A_b \cdot H_t}{3} \quad (I)$$

Para obter o valor de H em função de H_t, A_B e A_b, usamos a razão de semelhança entre as áreas das bases e entre as alturas das pirâmides.

$$\frac{A_B}{A_b} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_b}} = \frac{H}{H - H_t} \Rightarrow H\sqrt{A_B} - H_t\sqrt{A_B} = H\sqrt{A_b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H\sqrt{A_B} - H\sqrt{A_b} = H_t\sqrt{A_B} \Rightarrow H\left(\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}\right) = H_t\sqrt{A_B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{H_t\sqrt{A_B}}{\left(\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b}\right)}{\left(\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{H_t\left(A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)}{A_B - A_b} \text{ (II)}$$

Substituindo **II** em **I**, temos:

$$V_{tronco} = \frac{H(A_B - A_b) + A_b \cdot H_t}{3} =$$

$$= \frac{\dfrac{H_t\left(A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)}{\cancel{A_B - A_b}} \cdot \cancel{(A_B - A_b)} + A_b \cdot H_t}{3} =$$

$$= \frac{H_t\left(A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right) + A_b \cdot H_t}{3} = \frac{H_t\left(A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b\right)}{3}$$

Assim, o volume do tronco de pirâmide é dado por:

$$V_{tronco} = \frac{H_t}{3}\left(\sqrt{A_b \cdot A_B} + A_b + A_B\right)$$

Página 214

No desenvolvimento da pesquisa proposta no item **c** da tarefa **101**, oriente os estudantes a consultar fontes confiáveis. Para auxiliá-los, verifique a possibilidade de realizar um trabalho com um professor da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente do componente curricular de **História**, com o objetivo de que ele possa levar aos estudantes contextualizações mais aprofundadas sobre a Revolução Constitucionalista, bem como indicar materiais historiográficos adequados para consulta. Complemente o trabalho conversando com os estudantes sobre solução de conflitos e enfatize que, apesar de os registros históricos mostrarem algumas conquistas resultantes de movimentos revolucionários, as conquistas pacíficas sempre são a melhor opção. A diversidade de opiniões deve ser respeitada, e, sempre que possível, é importante haver harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com nossas limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento em conjunto, promovendo a paz na comunidade, principalmente no meio escolar que frequentamos.

Página 215

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando os que já conheciam e se houve algum em que tiveram dificuldades.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido de diferentes maneiras, como por meio de desenhos, textos e dinâmicas em grupo. Nesse momento, se necessário, proponha aos estudantes que elaborem questionamentos em função dos erros mais comuns que identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Consigo diferenciar poliedros e não poliedros?"; "Reconheço os Poliedros de Platão?"; "Tenho segurança para usar a Relação de Euler em problemas que envolvem poliedros?"; "Consigo calcular o volume de um prisma?"; entre outros. Com base nas respostas, é esperado que eles identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado.

As questões de **3** a **11** são de direta aplicação dos conteúdos abordados. Com elas, é esperado que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas, pois esses registros auxiliarão o desenvolvimento da questão **12**.

Na síntese proposta na questão **12**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais e resumos textuais. Instigue-os a dar exemplos e, caso julguem conveniente, usar imagens. Incentive-os a ser criativos nesse momento.

CAPÍTULO **6**

Corpos redondos

Nesse capítulo, são desenvolvidas as unidades temáticas de Matemática **Geometria e Medidas**, em situações relacionadas a corpos redondos, como cilindros, cones e esferas. São abordados os principais conceitos e fórmulas envolvendo esses sólidos geométricos, além de suas classificações e propriedades, como base, altura, raio e volume.

Objetivos específicos

- Reconhecer cilindros e seus elementos.
- Calcular áreas de regiões pertencentes ao cilindro reto.
- Reconhecer métodos práticos para determinar aproximações do volume de objetos de aspecto cilíndrico e calcular o volume exato de cilindros retos, inclusive deduzindo fórmulas.
- Reconhecer cone, seus elementos e figuras com formato cônico.
- Calcular a área da superfície do cone e do tronco de cone reto.
- Resolver situações-problema relacionadas ao volume do cone e do tronco de cone reto.
- Reconhecer a esfera e seus elementos.
- Identificar as principais propriedades da esfera, entendendo-a como o lugar geométrico de todos os pontos no espaço que tenham a mesma distância *r* de um ponto fixo *C*.
- Calcular o volume da esfera, deduzindo a fórmula geral por meio da comparação com outros sólidos geométricos e da aplicação do Princípio de Cavalieri.
- Aprender a calcular a área da superfície da esfera, deduzindo a fórmula por meio da associação indutiva da esfera a um poliedro de *n* faces quando *n* cresce além de qualquer medida.

Justificativa

Esse capítulo trabalha os cilindros, seus elementos, suas classificações e propriedades. Nele, estudam-se os conceitos de base, geratriz, eixo, altura, superfície lateral, superfície total, raio da base e seção meridiana, bem como a distinção entre cilindros retos e cilindros oblíquos. Além disso, trabalham-se as fórmulas para obtenção da área e do volume do cilindro reto. Todas essas fórmulas são apresentadas em detalhes, tanto por meio de construções que as tornem o mais intuitivas possível quanto por meio das necessárias demonstrações lógicas que garantam suas validades. Para reforçar a compreensão, além dos exercícios de fixação do conteúdo, as fórmulas e interpretações das propriedades dos cilindros são comparadas, sempre que possível, com as de outras figuras geométricas.

No trabalho com o cone, o objetivo é propiciar aos estudantes uma compreensão significativa da área de superfície e volume de cone e tronco de cone reto. Para isso, são abordados conceitos com base em exemplos e de maneira contextualizada de situações reais, bem como são apresentadas demonstrações matemáticas de fórmulas e expressões usadas.

Por fim, esse capítulo trabalha as esferas, seus elementos e propriedades. Nele, estudam-se os conceitos de centro, eixo, raio, diâmetro, polos, equador, paralelos e meridianos. São estudadas também as fórmulas para o cálculo do volume da esfera e para a obtenção da área da superfície esférica. Todas essas fórmulas são apresentadas em detalhes, tanto com instruções acerca de como aplicá-las corretamente quanto pela necessária dedução lógica capaz de garantir a respectiva veracidade. Naturalmente, as demonstrações apresentadas para as fórmulas envolvem argumentos geométricos e algébricos com os quais os estudantes já estejam familiarizados. Assim, apresentam-se as demonstrações mais elementares possíveis, buscando incentivar a percepção geométrica deles.

Página 218

Sugestão de avaliação

A fim de verificar o conhecimento prévio dos estudantes acerca de cilindros, proponha tarefas simples que explorem a percepção de formas cilíndricas. Primeiro, peça aos estudantes que indiquem objetos ou construções com formatos cilíndricos, como velas, corrimões, canudos, tambores e tubos de *spray*. Na sequência, pensando nesses objetos, eles devem propor maneiras criativas de obter aproximações para a área da superfície e para o volume desses objetos.

Incentive-os a usar a engenhosidade prática e a criatividade geométrica abstrata, verificando se eles conseguem apresentar soluções, como: envolver a superfície dos objetos com plástico retangular para, depois, encontrar a área do retângulo correspondente; preencher os objetos com água (se for possível) e depois despejá-la em um recipiente graduado; construir prismas de bases regulares, cada vez com uma quantidade maior de lados, a fim de aproximá-los do formato de um cilindro.

Durante a conversa relacionada a essas atividades, incentive os estudantes a aplicar os conhecimentos já consolidados e as habilidades com as quais já estejam familiarizados, como as desenvolvidas durante o Ensino Fundamental.

Página 219

O trabalho com esse capítulo reforça a percepção espacial dos estudantes e explora a imaginação e a abstração matemática no trato com figuras geométricas espaciais, as quais podem ser associadas a objetos usuais do mundo real. As tarefas envolvendo cilindros traz um refinamento a mais na sensibilidade geométrica deles, pois leva-os a entender que o cilindro pode ser comparado a um prisma, no caso limite em que a quantidade de lados do polígono da base cresce indeterminadamente, aproximando-se da circunferência. Além disso, os elementos do cilindro fazem com que os estudantes retomem, de modo mais prático e com enriquecedoras inter-relações com outros conhecimentos, assuntos como área e perímetro do círculo e o Princípio de Cavalieri. Desse modo, contempla-se a habilidade **EM13MAT309** ao levar os estudantes a resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de cilindros em situações reais, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Após apresentar a definição, explique aos estudantes que a região do espaço limitada pelo cilindro é formada por todos os pontos dos segmentos nos quais cada extremo está contido em uma das bases.

Enfatize a diferença entre altura, eixo e geratriz de um cilindro, conforme as seguintes características.

- A altura é a distância do plano da base ao plano da outra base. Essa distância pode ser medida por qualquer segmento de reta que seja perpendicular aos planos das bases.
- O eixo e a geratriz, por outro lado, não são distâncias, e sim segmentos de reta. O eixo é o segmento de reta que liga o centro da circunferência de uma das bases ao centro da circunferência da outra base. As geratrizes, por sua vez, são segmentos de reta paralelos ao eixo e cujas extremidades são pontos das circunferências das bases. Por isso, estão contidas na superfície lateral do cilindro.

Explique aos estudantes que, no caso dos cilindros retos, a altura, a medida do eixo e a medida das geratrizes coincidem umas com as outras, pois, nesse caso, todos esses segmentos de reta são perpendiculares aos planos das bases e têm o mesmo comprimento, podendo perfeitamente servir para medir a altura. No caso dos cilindros oblíquos, contudo, observa-se que o eixo e as geratrizes têm medida maior do que a altura, uma vez que existe uma inclinação que faz com que esses segmentos de reta não sejam a menor distância entre os planos das bases.

É válido observar, por fim, que, seja qual for o caso, a medida do eixo é a mesma da medida das geratrizes, pois a inclinação a que esses segmentos estão submetidos é a mesma, já que uns são paralelos aos outros.

Página 222

Na tarefa **6**, antes de efetuar os cálculos, pergunte aos estudantes se a área da superfície do cilindro muda ou não dependendo do eixo em torno do qual ocorre a revolução do retângulo.

Nessa tarefa, é importante que eles sejam capazes de associar a descrição cartesiana do retângulo com sua representação geométrica. É conveniente, portanto, desenhar na lousa o plano cartesiano, identificar os pontos indicados em conjunto com os estudantes e traçar o retângulo por eles determinado.

Proponha também aos estudantes que refaçam os exercícios com outros valores, escolhidos por eles mesmos, a fim de investigar se essa diferença entre as áreas sempre ocorre ou não.

Página 224

As questões **A** e **B** apresentadas na explicação teórica dessa página mobilizam a habilidade **EM13MAT504** da BNCC, levando os estudantes a investigar processos que cheguem à medida do volume de cilindros a fim de obter as fórmulas de cálculo da medida do volume dessa figura. Desse modo, aborda-se a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 5** da BNCC.

Página 226

Trabalho e juventudes

No desenvolvimento da seção **O trabalho do serralheiro**, promova um momento de reflexão com os estudantes a respeito do ofício de serralheiro. Questione-os sobre o que sabem acerca dessa profissão e das respectivas atividades. Aproveite para lhes perguntar se alguma pessoa de seu convívio trabalha como serralheiro; em

caso afirmativo, pergunte o que conhecem sobre esse ofício com base nessa convivência.

Comente que o uso de equipamentos de proteção individual (EPIs) é obrigatório em trabalhos com alto risco de acidentes, como na área de construção e indústria. Explique que essa obrigatoriedade faz parte da Consolidação das Leis do Trabalho (CLT) e está explícita na Lei nº 6.514, de 1977.

Para a visita sugerida nesse capítulo, providencie, com antecedência, a autorização dos responsáveis dos estudantes menores de idade e confira se será necessário ter equipamentos de segurança. Antecipadamente, oriente-os a elaborar algumas questões e deixe-os à vontade para fazer outros questionamentos durante a visita, ressaltando a importância do diálogo respeitoso. Se não for possível visitar o local, convide o profissional para ir à escola ou organize uma videochamada com ele a fim de entrevistá-lo. Seja como for essa atividade, peça a esse profissional que apresente o ambiente e os recursos úteis para exercer seu trabalho no dia a dia.

Após a pesquisa na atividade **3**, promova uma discussão sobre o contexto da segurança no trabalho no Brasil. Compartilhe com a turma o *site* do **Observatório de Segurança e Saúde no Trabalho**, que reúne dados sobre as ocorrências de acidentes de trabalho no país. Disponível em: https://smartlabbr.org/sst/. Acesso em: 17 set. 2024. Essa discussão possibilita um diálogo com **História**, principalmente no que diz respeito à história tanto dos direitos trabalhistas quanto do contexto inicial da segurança do trabalho no Brasil, referente à época da industrialização.

Páginas 230 e 231

No trabalho com a tarefa **31**, verifique se é necessário ler as páginas **8** e **9** do **Livro do Estudante**, pois explicam os **Objetivos da Agenda 2030**. Caso a turma já tenha feito essa leitura, basta recapitulá-los e retomar o **Objetivo 15** estudado nessas páginas. Para complementar o trabalho, promova atividades em conjunto com um professor da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente do componente curricular **Geografia**. Nesse caso, o professor desse componente pode propor uma análise crítica sobre as práticas do manejo florestal em nosso país, disponibilizando, se possível, textos e dados que aprofundem mais esse assunto. Proponha uma roda de conversa para tratar da importância da conservação ambiental e do papel desempenhado pelos povos indígenas e pelas populações tradicionais no manejo florestal sustentável. Reflita com eles também sobre como a defesa dos direitos desses povos pode contribuir para a manutenção da floresta.

O contexto trabalhado na tarefa **31** estabelece relação com o tema contemporâneo transversal **Educação ambiental**. Sendo assim, conscientize os estudantes quanto à importância do meio ambiente e à necessidade de sua preservação, levando-os a compreender que o uso sustentável dos recursos naturais favorece a manutenção da vida na Terra. Por ser um aspecto importante na educação deles, convém associar esse assunto aos mecanismos matemáticos que auxiliam na descrição, no entendimento e na interpretação dos fenômenos relacionados.

Ao aplicar os conhecimentos matemáticos para quantificar o volume de madeira para estabelecer planos para o manejo florestal sustentável, contemplam-se aspectos da **Competência geral 2** e a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC. Esse enfoque inspira a abordagem científica, com amparo da criatividade e do rigor matemático, tanto para resolver problemas quanto para criar soluções que integrem diferentes áreas do saber.

A tarefa **33** aborda a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 1** da BNCC. Nela, o conceito de volume do cilindro é aplicado para compreender o funcionamento e a utilidade dos pluviômetros, despertando estratégias e procedimentos matemáticos para identificar tecnologias e fenômenos das áreas de **Ciências da Natureza** e **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, o que desenvolve a formação cidadã de maneira ampla.

Essa tarefa também contempla a **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 2** da BNCC. Os métodos matemáticos abordados capacitam os estudantes a analisar, avaliar e mensurar fenômenos naturais da vida na Terra, de maneira que fundamentem o funcionamento da natureza.

Na tarefa **37**, o cálculo de gastos com materiais para desenvolver uma embalagem leva os estudantes a analisar uma situação de aperfeiçoamento em processos produtivos. Com isso, eles aplicam o conhecimento científico para resolver problemas do mundo, favorecendo, do ponto de vista matemático, o desenvolvimento parcial da **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 1** da BNCC.

Páginas 232 e 233

A seção **Acessando tecnologias** pode ser desenvolvida no laboratório de informática da escola. Se não houver computadores suficientes para todos os estudantes, organize-os em grupos. No decorrer da tarefa, garanta que todos tenham a oportunidade de manipular o *software* em questão. Para usar o Scratch, basta acessar o *site* disponível em: https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted. Acesso em: 17 set. 2024.

Saber manipular linguagens próprias da informática, entendendo o funcionamento lógico de computadores e *softwares*, é uma habilidade cada vez mais necessária no mundo contemporâneo. Pensando nisso, essa seção propicia essa habilidade. Nela, a programação de algoritmos em Scratch, com a organização devida e com os conectivos lógicos necessários, incluindo o uso correto dos operadores condicionais, capacita os estudantes a explorar o raciocínio lógico e a abordar o mesmo problema por mais de uma perspectiva, visando apresentar soluções válidas de múltiplas maneiras, e não excludentes. O **pensamento computacional** é incrementado ao tornar a turma apta a traduzir uma situação dada em outras linguagens, avaliando as mais convenientes para cada caso.

No exemplo, a construção de um programa que indique de imediato se determinado recipiente com formato cilindro é capaz de comportar ou não a quantidade de água indicada apresenta, em sua essência, os rudimentos fundamentais do pensamento computacional, os quais podem ser aplicados em situações muito mais complexas e impactantes no futuro.

Essa seção contempla a habilidade **EM13MAT405** e os aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 4** da BNCC. Nas tarefas propostas, trabalham-se os conceitos iniciais da linguagem de programação para implementar um algoritmo que permita, computacionalmente, verificar se é possível armazenar determinado volume de água em um recipiente cilíndrico. Além disso, os estudantes empregam diferentes linguagens, por meio das quais podem expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos, como sugere a **Competência geral 4** da BNCC.

Ao final desse tópico, se for conveniente, aplique a estratégia ***Quick writing*** para avaliar o aprendizado dos estudantes, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Recapitule sucintamente as fórmulas e os conceitos aprendidos, bem

como as ideias mais interessantes aplicadas em alguma demonstração ou em algumas tarefas. Inicie um debate pedindo aos estudantes que comentem situações práticas em que seja possível aplicar as ferramentas matemáticas desenvolvidas no capítulo.

Página 234

Após apresentar a definição, explique aos estudantes que a região do espaço limitada pelo cone é formada por todos os pontos dos segmentos, nos quais cada extremo está contido em uma das bases.

Página 238

Ao citar Eudoxo (408 a.C.-355 a.C.), o texto aborda um importante aspecto histórico envolvendo a fórmula $V_{cone} = \frac{V_{cilindro}}{3}$. Se julgar conveniente, pesquise outros fatos relacionados à história da Matemática e leve os estudantes a perceber que é possível aplicar conhecimentos historicamente construídos com o intuito de compreender aspectos do mundo atual. Essa abordagem abrange a **Competência geral 1** da BNCC. Além disso, as questões dessa página contemplam a habilidade **EM13MAT504** e a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 5** da BNCC, pois levam os estudantes a investigar processos para identificar a medida do volume de cones para obter a fórmula de cálculo da medida do volume dessa figura.

Páginas 241 e 242

Para finalizar a tarefa **64**, se possível, agende uma visita guiada a uma estação de tratamento de água mais próxima da escola. Para isso, providencie a autorização dos responsáveis pelos estudantes menores de idade e os equipamentos de segurança. Oriente a turma a elaborar perguntas sobre o tema, selecionando algumas para serem feitas especificamente ao técnico ou ao guia que estiver apresentando a estação. Além disso, oriente-os a registrar os dados mais relevantes que coletarem durante a visita. Para concluir, organize-os em pequenos grupos para elaborarem cartazes com informações e ilustrações que descrevam o que eles aprenderam nesse dia.

A tarefa **67** desenvolve o **pensamento computacional** dos estudantes e mobiliza a habilidade **EM13MAT315** da BNCC. A construção de um algoritmo que determine se é possível armazenar certa quantidade de água, em litros, em um recipiente com o formato de cone reto faz com que os estudantes notem os benefícios que tal linguagem proporciona. Além disso, eles são levados a empregar diferentes linguagens para se expressarem e para partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos, como sugere a **Competência geral 4** da BNCC.

Página 243

Após apresentar o conteúdo dessa página, demonstre na lousa como expressar a área lateral do tronco de cone em função de G, R e r. Com esse tipo de tarefa, os estudantes aprimoram a escrita e a leitura da linguagem matemática.

Aplicando a razão de semelhança entre os raios das bases e as geratrizes dos cones, temos:

$$\frac{g}{g-G} = \frac{R}{r} \Rightarrow rg = Rg - RG \Rightarrow RG = Rg - rg \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g(R-r) = RG \Rightarrow g = \frac{RG}{R-r}$$

Substituindo g na expressão da área lateral do tronco de cone, temos:

$$A_t = \pi Rg - \pi r(g-G) =$$
$$= \pi R\left(\frac{RG}{R-r}\right) - \pi r\left(\frac{RG}{R-r} - G\right) =$$
$$= \pi\left(\frac{R^2G}{R-r} - \frac{rRG}{R-r} + rG\right) =$$
$$= \pi\left(\frac{R^2G - rRG + rRG - r^2G}{R-r}\right) =$$
$$= \pi G\frac{(R+r)\cdot(R-r)}{R-r} = \pi G(R+r)$$

Assim, a área lateral do tronco de cone é dada por $A_t = \pi G(R+r)$.

Página 245

Após trabalhar o tópico **Volume de um tronco de cone reto**, demonstre na lousa como expressar o volume do tronco de cone em função de H_t, R e r, conforme segue.

Como $h = H - H_t$, temos:

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3} - \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{3}\left[R^2H - r^2(H - H_t)\right] =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(R^2H - r^2H + r^2H_t\right) = \frac{\pi}{3}\left[H\left(R^2 - r^2\right) + r^2H_t\right] \text{ (I)}$$

Para obter o valor de H em função de H_t, R e r, aplicamos a razão de semelhança entre os raios das bases e as alturas dos cones.

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h} \Rightarrow R(H - H_t) = rH \Rightarrow RH - rH = RH_t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H(R-r) = RH_t \Rightarrow H = \frac{RH_t}{R-r} \text{ (II)}$$

Substituindo **II** em **I**, temos:

$$V = \frac{\pi}{3}\left[H\left(R^2 - r^2\right) + r^2H_t\right] =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left[\frac{RH_t}{R-r}\left(R^2 - r^2\right) + r^2H_t\right] =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(R^2H_t + RrH_t + r^2H_t\right) = \frac{\pi H_t}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

Assim, o volume do tronco de cone é dado por:

$$V_{tronco} = \frac{\pi H_t}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

Tarefas envolvendo a obtenção da área lateral do tronco de cone aprimoram a escrita e a leitura da linguagem matemática, bem como leva os estudantes a compreender e empregar diferentes registros de representação matemáticos enquanto resolvem os problemas, contemplando, assim, aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 4** da BNCC.

Páginas 249 e 250

As tarefas **90** e **93** requerem a elaboração de um problema, assim como a resolução, envolvendo volume de tronco de cone, contemplando a habilidade **EM13MAT309** da BNCC. Desse modo, aborda-se a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Página 251

Sugestão de avaliação

A fim de conferir o conhecimento prévio dos estudantes

acerca de esferas, apresente uma esfera e seu respectivo raio para que desenvolvam métodos práticos para estimar o volume dela, determinando os valores máximos e mínimos para intervalos cada vez menores, nos quais esse volume esteja certamente inserido.

Página 252

O boxe **Para expandir** indica que o planeta Terra tem o formato aproximado de uma esfera. Enfatize para os estudantes o termo "aproximado", explicando que esse formato da Terra (e de praticamente todos os outros planetas do Sistema Solar) é mais parecido com uma figura conhecida como "geoide". Embora o geoide tenha um formato parecido com o da esfera, ele é achatado nos polos.

Página 256

Na tarefa **102**, explique aos estudantes que as propriedades básicas de certas formas geométricas são características essenciais aplicadas na indústria e na engenharia. No caso dos reservatórios, qualquer outro formato que não fosse esférico ocasionaria uma pressão maior do gás em seu interior, o que o colocaria em risco ou necessitaria de mais investimento orçamentário no reforço das paredes internas. Outra propriedade das esferas, considerando situações como essa, é a de que, entre as formas capazes de conter certa capacidade volumétrica, a esfera apresenta a menor área de superfície, de modo que são gastos menos materiais para construí-la.

Página 258

As tarefas dessa seção contemplam a habilidade **EM13MAT309** ao levarem os estudantes a resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de esferas em situações reais. Desse modo, aborda-se a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Página 259

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando os que já conheciam e se houve dificuldade em algum deles.

A questão **2** pode ser desenvolvida por meio de textos ou dinâmicas em grupos. Nesse momento, proponha aos estudantes que elaborem questionamentos em função dos erros mais comuns que eles identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Reconheço cilindros e seus elementos?"; "Reconheço cone e figuras com formato cônico?"; "Identifico os elementos de um cone?"; "Calculo a área da superfície de cone e de tronco de cone reto?"; "Reconheço a esfera e seus elementos?"; "Calculo o volume da esfera?". Com base nas respostas, é esperado que eles identifiquem suas dificuldades a fim de retomarem o que foi estudado para sanar as dúvidas.

As questões de **3** a **11** retomam diretamente os conteúdos estudados. Com elas, é esperado que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões eles não devem consultar o material. Oriente-os a registrar suas dúvidas, pois isso os auxiliará na questão **12**.

Na síntese proposta na questão **12**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais, resumos textuais, entre outras. Instigue-os a apresentar exemplos e aplicar imagens e, nesse momento, incentive-os a explorar a criatividade.

CAPÍTULO 7

Projeções cartográficas

Nesse capítulo, é desenvolvida a unidade temática de Matemática **Geometria e Medidas**, em situações relacionadas a projeções cartográficas, abordando conceitos e técnicas fundamentais para a construção e análise de diferentes tipos dessas projeções.

Objetivos específicos

- Identificar diferentes tipos de mapas construídos para representar o globo terrestre.
- Compreender a relação entre a superfície real e a descrita em uma superfície plana nas representações cartográficas.
- Identificar semelhanças e diferenças entre os diferentes tipos de projeções cartográficas.
- Compreender aspectos matemáticos úteis na elaboração de projeções cartográficas.

Justificativa

Esse capítulo aborda o conteúdo de projeções cartográficas, além da classificação dos diferentes tipos de mapas do globo terrestre quanto à superfície e quanto ao grau de deformação, bem como os elementos de localização e comparação de tamanho das áreas dos países. Assim, busca-se proporcionar aos estudantes uma ampliação dos saberes relacionados aos diferentes tipos de mapas, evidenciando a importância desse material nas navegações, no comércio e para expressar distâncias e localizações.

Explique aos estudantes que a Cartografia pode ser descrita como um conjunto de estudos, operações e técnicas artísticas e científicas, elaboradas com base em resultados de observações diretas ou de análises documentais, com a finalidade de criar representações geográficas em formato de mapas. Destaque que a Matemática constitui a base para o estudo e a construção de representação gráfica da superfície terrestre e dos objetos geográficos. Conceitos matemáticos de escala, proporções, coordenadas geográficas, projeções cartográficas, fuso horário e outros são fundamentais para a leitura de mapas, conforme será estudado no capítulo.

Páginas 260 e 261

Durante muito tempo, os cartógrafos procuraram uma maneira de construir um mapa plano do globo terrestre ou de uma região do planeta com a propriedade de que todas as distâncias entre diferentes lugares se mantivessem inalteradas. Mais especificamente, o que se buscava provar era: seria possível construir um mapa plano do globo terrestre ou de uma parte do globo com uma escala fixa, ou seja, sem distorções? Seria possível construir um mapa plano para o qual a distância entre quaisquer dois de seus pontos fosse sempre igual a um múltiplo fixo da distância ao longo dos pontos correspondentes no globo, medida ao longo do círculo máximo por esses pontos?

A busca de respostas para essas questões durou até 1775, quando o matemático Leonhard Euler (1707-1783) demonstrou a impossibilidade desse intento.

Oriente a organização dos estudantes em duplas para fazer a pesquisa da questão **3**. Esse tipo de tarefa favorece a ampliação do grau de autonomia deles, colaborando para desenvolver a reflexão, o espírito investigativo, a tomada de decisões e a capacidade de argumentação durante as trocas de ideias.

Sugestão de avaliação

Procure identificar os conhecimentos prévios dos estudantes acerca dos assuntos que serão abordados no capítulo, visto que muitos aspectos já podem ter sido tratados em outros componentes curriculares. Algumas sugestões: "O que vocês entendem por Cartografia?"; "Quais são os tipos de mapas que vocês conhecem?"; "Para que serve um mapa?"; "Em sua opinião, qual seria a melhor forma de representar o globo terrestre por meio de um mapa plano?"; "Qual é a relação que vocês enxergam entre a Cartografia e a Matemática?".

Verifique a possibilidade de levar para a sala de aula um globo terrestre e um mapa plano. Peça aos estudantes que discutam as diferenças entre eles e qual deles consideram mais adequado. Em seguida, solicite-lhes que, em grupos de três ou quatro integrantes, conversem sobre como poderiam reproduzir o desenho do mapa do globo no papel, sem perder a essência. Esse tipo de tarefa desenvolve o pensamento crítico.

Para desenvolver as questões propostas nessas páginas, é possível aplicar a estratégia ***Think-pair-share***. Oriente os estudantes a se inteirarem das linhas gerais do assunto das páginas de abertura, registrando possíveis dúvidas ou complementando informações.

Ao relacionar o assunto dessas páginas à história do matemático Gauss, os estudantes são levados a usar os conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar a realidade, indo ao encontro do que preconiza a **Competência geral 1** da BNCC.

Página 263

O assunto abordado nesse tópico promove o estudo sobre a classificação dos sistemas de projeções cartográficas de acordo com a deformação de ângulos e áreas de superfícies, contemplando a habilidade **EM13MAT509** da BNCC. Desse modo, é abordada a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 5** da BNCC.

Páginas 266 e 267

Trabalho e juventudes

O texto e as atividades da seção **O que faz um engenheiro cartógrafo?** permitem trabalhar as atribuições desse profissional. Comente com os estudantes que a arte de produzir mapas é uma das maneiras de representação gráfica mais antigas da humanidade. Muitos estudiosos acreditam que essa prática remonta a períodos anteriores à escrita, com povos da Antiguidade, como egípcios, babilônios, maias e chineses, criando representações do espaço onde viviam e dos territórios conquistados e registrando fenômenos da natureza e cenas do convívio em sociedade.

Ao tratar da profissão de engenheiro cartógrafo, na seção apresentada, os estudantes vão perceber a aplicação da Matemática em diversos setores do mercado de trabalho, permitindo estabelecer conexão com o tema contemporâneo transversal **Trabalho**.

A tarefa **2** desse capítulo propicia reflexões sobre a cooperação entre diferentes nações e a promoção do respeito ao outro, dos direitos humanos e da cultura de paz na sociedade, em âmbito internacional, contemplando assim aspectos da **Competência geral 9** da BNCC.

Página 270

Uma sugestão para a realização do trabalho com a seção **Acessando tecnologias** é utilizar o laboratório de informática da escola. Para isso, certifique-se, com antecedência, de que todos os computadores tenham acesso à internet. Caso não haja computadores suficientes para todos os estudantes, organize-os em grupos e certifique-se de que, no decorrer da tarefa, todos tenham a oportunidade de manipular o *site* The true size. Disponível em: https://www.thetruesize.com/. Acesso em: 18 set. 2024.

Na tarefa **2**, se julgar necessário, sugira aos estudantes que considerem os territórios do Brasil (Brazil) e da Antártida (Antarctica), por exemplo. Oriente-os a destacar cada uma dessas regiões por meio do campo de pesquisa da página. Antes de fazer a movimentação dos territórios indicados, peça-lhes que identifiquem qual deles tem a maior área, levando em consideração os destaques apresentados no mapa. É esperado que eles concluam, pelas imagens, que o território da Antártida é muito maior que o brasileiro. Em seguida, solicite a eles que movam essa área para perto do Brasil. Por meio de questionamentos, leve-os a perceber que a diferença entre essas áreas não é tão considerável quanto o mapa nos leva a acreditar. Apesar de uma diferença de, aproximadamente, 5,5 milhões de quilômetros quadrados nas medidas de suas áreas (o Brasil tem, aproximadamente, 8,5 milhões de quilômetros quadrados de área, enquanto a Antártida tem aproximadamente 14 milhões de quilômetros quadrados), o território antártico, na realidade, é bem menor do que aparenta ser quando observamos sua planificação.

Se os estudantes não tiverem acesso à internet, verifique a possibilidade de levar comparações impressas geradas pelo *site* The true size, semelhantes à apresentada na seção, para que eles tenham a oportunidade de desenvolver a tarefa **2**.

A tarefa proposta na seção **Acessando tecnologias** contempla a habilidade **EM13MAT509**, tendo em vista que proporciona aos estudantes investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em Cartografia, com suporte de tecnologia digital.

Essa tarefa tem potencial para explorar o recurso tecnológico de forma crítica e reflexiva tendo em vista o tema abordado, conforme sugere a **Competência geral 5** da BNCC.

Página 271

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando os que já conheciam e se houve algum em que tiveram dificuldades.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido por meio de textos ou dinâmicas em grupos. Nesse momento, proponha aos estudantes a elaboração de questionamentos em função dos erros mais comuns que identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Identifico os diferentes tipos de mapas construídos para representar o globo terrestre?"; "Compreendo a relação entre a superfície real e a representada em uma superfície plana nas representações cartográficas?"; "Reconheço semelhanças e diferenças entre os tipos de projeções cartográficas?". Com base nas respostas, é esperado que os estudantes identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado, sanando possíveis dúvidas em relação ao conteúdo.

As questões de **3** a **5** são de direta aplicação dos conteúdos estudados. Com elas, é esperado que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas, pois esses registros auxiliarão o desenvolvimento da questão **6**.

Na síntese proposta na questão **6**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais e resumos textuais. Instigue-os a dar exemplos e usar imagens. Incentive a criatividade deles nesse momento.

Esta seção apresenta a resolução simplificada dos problemas, atividades e questões da teoria e de seções do **Livro do Estudante**, contendo o raciocínio central deles. Respostas pessoais e atividades de elaboração de problemas não foram incluídas nesta seção. Para esses casos, há notas de orientações na reprodução do **Livro do Estudante** neste **Suplemento para o professor**, sempre que necessário.

CAPÍTULO 1 ANÁLISE COMBINATÓRIA

Abertura de capítulo

2. Há seis maneiras. São elas: (X, Y, Z), (X, Z, Y), (Y, X, Z), (Y, Z, X), (Z, X, Y) e (Z, Y, X).

Exercícios e problemas

1. Como são três filmes de ação, dois de comédia e um de animação, então temos:

$$3 + 2 + 1 = 6$$

Portanto, um cliente pode assistir a 6 opções de filme naquele dia.

2. a) Com base no princípio aditivo da contagem, temos:

$$1 + 2 + 1 + 3 = 7$$

Portanto, Maria pode escolher 7 personagens.

b) Com base no princípio multiplicativo da contagem:

$$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$$

Renato pode se vestir de 24 maneiras diferentes.

c) Com base no princípio aditivo da contagem: $1 + 1 = 2$.
Maurício pode escolher 2 opções de camisa.

4. • Entrar e sair do *shopping*: $7 \cdot 7 = 49$.
• Entrar e sair do *shopping* usando portões diferentes para entrada e saída: $7 \cdot 6 = 42$.
Portanto, uma pessoa pode entrar e sair desse *shopping* de 49 maneiras distintas e entrar por um portão e sair por outro diferente ao da entrada de 42 maneiras distintas.

5. $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 258\,336\,000$
É possível cadastrar 258 336 000 senhas distintas nesse *site*.

6. $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$
Portanto, essa equipe pode compor o uniforme de 24 maneiras.

7. Indicando por x a quantidade de trajetos entre **B** e **C**, temos: $3x = 15 \Rightarrow x = 5$.
Há 5 trajetos entre **B** e **C**.

8. • Possibilidades de fantasia com a máscara: $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.
• Possibilidades de fantasia sem a máscara:
$3 \cdot 2 = 6$ $\qquad$ $18 + 6 = 24$
Portanto, há 24 maneiras distintas de compor essa fantasia.

9. Como o Enem tinha 4 provas, cada prova com 45 questões e cada questão com 5 alternativas, efetuamos: $5^{4 \cdot 45} = 5^{180}$. Portanto, há 5^{180} possibilidades de responder às questões. Logo, a alternativa **d** é a correta.

10. a) Como o número 0 não pode estar na dezena de milhar, temos: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$. Logo, podem ser formados 9 000 números.

b) Como o número 0 não pode estar na unidade de milhar e os algarismos precisam ser distintos, temos: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$. Logo, podem ser formados 27 216 números.

c) Como são 5 números ímpares entre 0 e 9, e o 0 não pode ocupar a casa das centenas, temos: $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$. Logo, podem ser formados 450 números.

d) O algarismo da unidade deve ser 0 ou 5, ou seja, temos 2 possibilidades, e o número 0 não pode ocupar a casa das centenas de milhar, logo: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 180\,000$. Logo, podem ser formados 180 000 números.

11. a) Como o pacote é composto de transporte, hospedagem e tempo de permanência, temos: $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$. Portanto, há 36 maneiras distintas de compor o pacote turístico.

b) Temos duas possibilidades de transporte aéreo (1ª e 2ª classe), duas possibilidades de hotel (3 e 4 estrelas) e três possibilidades de períodos (4, 7 e 10 dias), ou seja, $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. Portanto, há 12 maneiras distintas de compor o pacote turístico.

12. O gráfico tem de ser pintado de cores distintas. Logo, obtemos: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$.
Portanto, o gráfico pode ser colorido de 15 120 maneiras distintas.

13. A senha é formada por 5 algarismos e todos são pares e distintos, logo: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.
Três tentativas são realizadas em um minuto. Logo, para realizar 120 tentativas, são necessários 40 minutos. A cada três tentativas erradas, é preciso esperar 5 minutos, logo é preciso esperar no máximo 39 intervalos de 5 minutos, ou seja, 195 minutos. Assim: $40 + 195 = 235$.
Saulo conseguirá acessar seu *e-mail* em, no máximo, 235 min.

14. a) $2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 20\,000$. Portanto, essa companhia pode compor 20 000 números distintos de telefone.

b) $4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 40\,000$. Portanto, o total de números distintos vai para 40 000, ou seja, 20 000 números distintos a mais.

16. a) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

b) $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$

c) $4 \cdot 2! = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$

d) $0! + 4! = 1 + (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 25$

e) $5! - 4! = (5 \cdot 4!) - 4! = (5 - 1) \cdot 4! = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$

f) $\dfrac{10!}{3!7!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120$

g) $\dfrac{15!13!}{14!12!} = \dfrac{15 \cdot 14! \cdot 13 \cdot 12!}{14!12!} = 195$

h) $\dfrac{12!3!}{15!} = \dfrac{12! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!} = \dfrac{1}{455}$

i) $\dfrac{(3! - 0!)!}{3!2!} = \dfrac{[(3 \cdot 2 \cdot 1) - 1]!}{3!2!} = \dfrac{5!}{3!2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 10$

17. a) $\dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$

b) $\dfrac{(n+4)!}{(n+2)! + (n+3)!} = \dfrac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2)!}{(n+2)! + (n+3)! \cdot (n+2)!} =$

$= \dfrac{(n+4)(n+3)}{n+4} = n + 3$

18. a) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 12 \Rightarrow \dfrac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = 12 \Rightarrow n^2 + n - 12 = 0$

Logo, $n = -4$ (não convém) ou $n = 3$.

b) $n! = 1 \Rightarrow n = 1$ ou $n = 0$

c) $\dfrac{(n+10)!}{(n+8)!} = 30 \Rightarrow \dfrac{(n+10) \cdot (n+9) \cdot (n+8)!}{(n+8)!} = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 + 19n + 60 = 0$

Logo, $n = -15$ (não convém) ou $n = -4$.

19. a) $A_{6,2} = \dfrac{6!}{(6-2)!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 30$

b) $A_{9,3} = \dfrac{9!}{(9-3)!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 504$

c) $A_{7,4} = \dfrac{7!}{(7-4)!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 840$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

d) $A_{8,6} = \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 20\,160$

e) $A_{5,4} - A_{9,2} = \frac{5!}{(5-4)!} - \frac{9!}{(9-2)!} =$

$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{1!} - \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 48$

f) $A_{20,3} + A_{40,1} = \frac{20!}{(20-3)!} + \frac{40!}{(40-1)!} =$

$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{17!} + \frac{40 \cdot 39!}{39!} = 6\,880$

20. a) $\frac{A_{n-1,2}}{A_{n-3,1}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(n-3)!}}{\frac{(n-3)!}{(n-4)!}} = \frac{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}}{\frac{(n-3)\cdot(n-4)!}{(n-4)!}} = \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{(n-3)}$

b) $\frac{A_{n+1,n}}{A_{n,n-1}} = \frac{\frac{(n+1)!}{1!}}{\frac{n!}{1!}} = \frac{(n+1)\cdot n!}{n!} = n+1$

c) $\frac{A_{n-1,n-3}}{A_{n+1,n}} = \frac{\frac{(n-1)!}{2!}}{\frac{(n+1)!}{1!}} = \frac{(n-1)!}{2\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!} = \frac{1}{2n^2+2n}$

21. Devemos ter arranjo de 12 produtos em 3 meios de divulgação. Assim:

$$A_{12,3} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 1\,320$$

Portanto, essa empresa pode compor a campanha de 1 320 maneiras distintas.

22. Como são 6 continentes e dispomos de 12 cores, então calculamos:

$$A_{12,6} = \frac{12!}{(12-6)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 665\,280$$

Portanto, esse mapa pode ser pintado de 665 280 maneiras distintas.

23. a) A senha deverá ter 5 dígitos e há 32 caracteres. Então, temos:

$$A_{32,5} = \frac{32!}{(32-5)!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27!}{27!} = 24\,165\,120$$

Portanto, essa pessoa pode cadastrar a senha de 24 165 120 maneiras diferentes.

b) Como o último caractere da senha será igual ao primeiro, podemos considerar uma senha de apenas 4 dígitos. Sendo assim, temos:

$$A_{32,4} = \frac{32!}{(32-4)!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28!}{28!} = 863\,040$$

Portanto, essa pessoa pode cadastrar a senha de 863 040 maneiras diferentes.

24. Arranjo de 26 letras duas a duas:

$$A_{26,2} = \frac{26!}{(26-2)!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24!}{24!} = 650$$

Arranjo de 10 letras agrupadas de 5 em 5:

$$A_{10,5} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 30\,240$$

$$A_{26,2} \cdot A_{10,5} = 650 \cdot 30\,240 = 19\,656\,000$$

Portanto, essa biblioteca pode cadastrar 19 656 000 livros.

25. Procedendo de maneira parecida com os passos apresentados na tarefa.

a) $A_{20,6} = 27\,907\,200$

b) $A_{13,11} = 3\,113\,510\,400$

c) $A_{40,5} + A_{0,0} = 78\,960\,961$

d) $A_{12,8} - A_{0,0} = 19\,958\,399$

e) $A_{11,8} \cdot A_{0,0} = 6\,652\,800$

f) $\frac{A_{22,5}}{A_{0,0}} = 3\,160\,080$

26. a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

Portanto, podem ser formados 625 números.

b) $A_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} \Rightarrow A_{5,4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{1!} = 120$.

Portanto, podem ser formados 120 números.

c) Como o último algarismo só pode ser 1 ou 3, efetuamos:

$$2 \cdot A_{4,3} = 2 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{1!} = 48$$

Portanto, podem ser formados 48 números.

d) Nesse caso, os múltiplos de 4 são os que terminam em 12, 24, 28, 32, 48 e 84 (6 possibilidades). Como para as ordens da centena e da unidade de milhar restam 3 algarismos, a quantidade de números é dada por:

$$6 \cdot A_{3,2} = 6 \cdot \frac{3!}{(3-2)!} = 6 \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1!}{1!} = 36$$

Portanto, podem ser formados 36 números.

27. a) $\frac{81}{27} = 3$, ou seja, cada unidade da federação é representada por 3 senadores.

b) São 7 cargos a serem preenchidos. Logo:

$$A_{81,7} = \frac{81!}{(81-7)!} = \frac{81!}{74!}$$

28. $A_{3,1} \cdot A_{4,1} \cdot A_{5,2} \cdot A_{2,1} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 480$. Portanto, a banda pode ser formada de 480 maneiras diferentes.

29. O 1º algarismo só pode ser 1, 2, 3 ou 5 e o restante pode ser arranjado de qualquer maneira. Assim:

$$4 \cdot A_{6,4} = 4 \cdot \frac{6!}{(6-4)!} = 4 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 1\,440$$

Portanto, podem ser formados 1 440 números.

30. $A_{3n+3,\,n+2} = 15 \cdot A_{3n+2,\,n+1} \Rightarrow \frac{(3n+3)!}{(2n+1)!} = 15 \cdot \frac{(3n+2)!}{(2n+1)!} \Rightarrow$

$\Rightarrow (3n+3)\cdot(3n+2)! = 15 \cdot (3n+2)! \Rightarrow 3n+3 = 15 \Rightarrow n = 4$

31. a) $A_{20,6} = \frac{20!}{(20-6)!}$

$A_{20,6} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 27\,907\,200$

Portanto, a pontuação pode ser distribuída de 27 907 200 maneiras diferentes em uma dessas provas.

b) A quantidade de maneiras distintas que os pilotos da equipe **A** podem pontuar é dada por:

$$A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = 6 \cdot 5 = 30$$

Considerando os 18 pilotos restantes e sabendo que ainda há 4 pontuações a serem distribuídas, temos:

$$A_{18,4} = \frac{18!}{(18-4)!} = 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 73\,440$$

Logo: $A_{6,2} \cdot A_{18,4} = 30 \cdot 73\,440 = 2\,203\,200$. Portanto, a pontuação dessa prova pode ter ocorrido de 2 203 200 maneiras distintas.

32. a) Seja n a quantidade total de equipes desse campeonato. Assim:

$$A_{n,2} = 272 \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} = 272 \Rightarrow n^2 - n - 272 = 0$$

Logo, $n = -16$ ou $n = 17$. Portanto, o total de equipes desse torneio é 17.

b) Como o campeonato contou com a participação de 17 equipes, então cada equipe jogou duas vezes (dentro e fora de "casa") contra 16 adversários. Portanto, cada equipe disputou 32 partidas na fase classificatória.

33. a) A quantidade de senhas possíveis é dada por:

$$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Como cada tentativa dura 5 s, então: $720 \cdot 5 = 3\,600$. Portanto, o participante desativará o artefato em, no máximo, 3 600 s ou 60 min.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) Quantidade de posições possíveis para 0 e 7:

$$A_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 3 \cdot 2 = 6$$

Quantidade de escolhas possíveis para o último algarismo restante: $A_{8,1} = \frac{8!}{(8-1)!} = 8$. Portanto, ele não conseguirá acertar a senha em 3 min, pois nessas condições a quantidade máxima de senhas a serem digitadas é 48, o que equivale a 4 min.

34. **a)** $P_7 = 7! = 5\,040$

b) $\frac{A_{8,5}}{P_3} = \frac{\frac{8!}{(8-5)!}}{3!} = \frac{8!}{3!3!} = 1\,120$

c) $P_7 - P_5 = 7! - 5! = 4\,920$

d) $\frac{P_{12}}{P_{10}} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!} = 132$

e) $P_3 \cdot P_6 = 3!6! = 4\,320$

f) $\frac{P_7}{A_{7,3}} = \frac{7!}{\frac{7!}{(7-3)!}} = 4! = 24$

35. **a)** $P_4 = 4! \Rightarrow P_4 = 24$

Podem ser formados 24 anagramas.

b) $P_5 = 5! \Rightarrow P_5 = 120$

Podem ser formados 120 anagramas.

c) $P_9 = 9! \Rightarrow P_9 = 362\,880$

Podem ser formados 362 880 anagramas.

36. O restaurante fica aberto durante 6 dias. Logo:

$$P_6 - 1 = 6 - 1 = 720 - 1 = 719$$

Portanto, o dono desse restaurante pode alterar o cardápio de 719 maneiras distintas.

37. **a)** $P_5 = 5! \Rightarrow P_5 = 120$

Podem ser formadas 120 palavras no total.

b) $P_4 = 4! \Rightarrow P_4 = 24$

Assim, 24 palavras começam com a letra **R**.

c) $2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$

Assim, 48 palavras terminam em vogal.

38. **a)** 875 431; 134 578

b) Os números formados maiores do que 478 135 são aqueles da forma:

5_____, 7_____ ou 8_____:

$$3 \cdot P_5 = 3 \cdot 5! = 360$$

48____:

$$P_4 = 4! = 24$$

483___ ou 485___:

$$2 \cdot P_2 = 2 \cdot 2! = 4$$

4815_:

$$P_1 = 1! = 1$$

$$360 + 24 + 4 + 1 = 389$$

Os números formados menores do que 458 713 são aqueles da forma:

1_____ ou 3_____:

$$2 \cdot P_5 = 2 \cdot 5! = 240$$

41____ ou 43____:

$$2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$$

451___, 453___ ou 457___:

$$3 \cdot P_3 = 3 \cdot 3! = 18$$

4581__ ou 4583__:

$$2 \cdot P_2 = 2 \cdot 2! = 4$$

$$240 + 48 + 18 + 4 = 310$$

Assim, 389 números são maiores do que 478 135 e 310 números são menores do que 458 713.

39. $P_4 = 4! = 24$

Os fiscais podem realizar esse procedimento durante 24 meses.

40. Os anagramas que aparecem antes de PERMUTA são os da forma:

A_____, E_____ ou M_____:

$$3 \cdot P_6 = 3 \cdot 6! = 2\,160$$

PA_____:

$$P_5 = 5! = 120$$

PEA_____ ou PEM_____:

$$2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$$

PERA____:

$$P_3 = 3! = 6$$

PERMA__ ou PERMT__:

$$2 \cdot P_2 = 2 \cdot 2! = 4$$

PERMUA_:

$$P_1 = 1! = 1$$

$$2160 + 120 + 48 + 6 + 4 + 1 = 2\,339$$

Portanto, 2 339 anagramas antecedem PERMUTA. Logo, essa palavra ocupa a 2 340ª posição na lista.

41. Indicando por *V*, *A* e *P* as cores das caixas vermelhas, amarelas e pretas, respectivamente, a sequência será (*V*, *A*, *P*, *V*, *A*, *V*, *P*, *A*, *V*). Essa sequência tem 9 caixas.

42. **a)** MONITOR tem duas letras **O**, então: $P_7^{(2)} = \frac{7!}{2!} = 2\,520$.

Portanto, a palavra MONITOR tem 2 520 anagramas.

b) AMERICANA tem três letras **A**, então: $P_9^{(3)} = \frac{9!}{3!} = 60\,480$.

Assim, a palavra AMERICANA tem 60 480 anagramas.

c) LIBERTADOR tem duas letras **R**, logo: $P_{10}^{(2)} = \frac{10!}{2!} = 1\,814\,400$.

Assim, a palavra LIBERTADOR tem 1 814 400 anagramas.

d) CALCULADORA tem duas letras **C**, três letras **A** e duas letras **L**. Então:

$$P_{11}^{(2,3,2)} = \frac{11!}{2!3!2!} = 1\,663\,200$$

Portanto, a palavra CALCULADORA tem 1 663 200 anagramas.

44. Podemos considerar que as soluções correspondem às maneiras de separar 6 elementos em 4 partes inteiras, assim:

$$P_9^{(6,3)} = \frac{9!}{6!3!} = 84$$

Logo, essa equação tem 84 soluções.

45. O número 125 612 tem dois algarismos 1 e dois algarismos 2.

a) $P_6^{(2,2)} = \frac{6!}{2!2!} = 180$

Desse modo, são obtidos 180 números.

b) Os números obtidos pares são os da forma:

_____2: $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$

_____6: $P_5^{(2,2)} = \frac{5!}{2!2!} = 30$

$$60 + 30 = 90$$

Assim, são obtidos 90 números pares.

c) Os números obtidos menores do que 400 000 são os da forma:

1_____: $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$

2_____: $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$

$$60 + 60 = 120$$

Portanto, são obtidos 120 números menores do que 400 000.

46. Considerando todas as palavras que começam por **A**, **C**, **É** ou **L**, temos:

- **A**: $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$
- **É**: $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$
- **C**: $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$
- **L**: $P_5 = 5! = 120$

Quantidade de palavras começadas por **A**, **C**, **É** ou **L**:

$$60 + 60 + 60 + 120 = 300$$

Assim, a 301ª palavra será UACÉLL.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

47. $P_6^{(5)} + P_6^{(4,\,2)} + P_6^{(3,\,3)} + P_6^{(2,\,4)} + P_6^{(5)} + P_6^{(6)} =$

$= \frac{6!}{5!} + \frac{6!}{4!2!} + \frac{6!}{3!3!} + \frac{6!}{2!4!} + \frac{6!}{5!} + \frac{6!}{6!} =$

$= 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$

A quantidade total de caracteres que podem ser representados no sistema braile é 63. Logo, a alternativa **d** é a correta.

48. a) $C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 1 \cdot 4!} = 15$

b) $C_{9,5} = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$

c) $C_{15,10} = \frac{15!}{10!(15-10)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3\,003$

d) $C_{12,6} + C_{8,2} = \frac{12!}{6!(12-6)!} + \frac{8!}{2!(8-2)!} =$

$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 1 \cdot 6!} =$

$= 924 + 28 = 952$

e) $C_{8,4} - C_{8,3} = \frac{8!}{4!(8-4)!} - \frac{8!}{3!(8-3)!} =$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 70 - 56 = 14$

f) $\frac{C_{19,11}}{C_{19,8}} = \frac{C_{19,19-11}}{C_{19,8}} = \frac{C_{19,8}}{C_{19,8}} = 1$

49. a) $\frac{A_{n,p}}{C_{n,p}} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{\frac{n!}{p!(n-p)!}} = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{p!(n-p)!}{n!} = p!$

b) $C_{n,n-1} \cdot C_{n-2,n-3} = \frac{n!}{(n-1)!1!} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-3)!1!} =$

$= \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-2) \cdot (n-3)!}{(n-3)!} = n(n-2)$

c) $C_{n-1,p-1} \cdot \frac{(n-p)!(p+1)!}{n!} =$

$= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \cdot \frac{(n-p)!(p+1)!}{n!} =$

$= \frac{(n-1)!}{(p-1)!} \cdot \frac{(p+1) \cdot p \cdot (p-1)!}{n \cdot (n-1)!} = \frac{p(p+1)}{n}$

d) $\frac{C_{n-1,p-1}}{C_{n-2,p-2}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}}{\frac{(n-2)!}{(p-2)!(n-p)!}} =$

$= \frac{(n-1)!(p-2)!}{(p-1)!(n-2)!} = \frac{(n-1) \cdot (n-2)!(p-2)!}{(p-1) \cdot (p-2)!(n-2)!} = \frac{n-1}{p-1}$

50. $C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

Portanto, a quantidade de maneiras distintas do assinante assistir aos filmes é 15 e a alternativa **d** é a correta.

51. Procedendo de maneira parecida com os passos apresentados na tarefa, temos:

a) $C_{25,4} = 12\,650$

b) $C_{25,9} = 2\,042\,975$

c) $C_{32,7} = 3\,365\,856$

d) $C_{29,20} = 10\,015\,005$

e) $C_{80,75} = 24\,040\,016$

f) $C_{100,96} = 3\,921\,225$

52. Por tentativas, segue que $n = 15$.

$$C_{15,3} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = 455$$

53. Digitamos na calculadora a sequência de teclas: 5, 0, nCr, 5 e =, obtendo o resultado 2 118 760. Portanto, há 2 118 760 grupos diferentes que podem ser sorteados.

54. Digitamos na calculadora a sequência de teclas: 8, nCr, 5, ×, 7, nCr, 4, ×, 5, nCr, 2, =, obtendo o resultado 19 600.

Portanto, há 19 600 maneiras distintas de montar o *kit* escolar.

55. Digitamos na calculadora a sequência de teclas: 1, 8, nCr, 7, =, obtendo o resultado 31 824.

Portanto, Marlene pode formar o conjunto de 31 824 maneiras distintas.

56. $C_{60,25} = \frac{60!}{25!(60-25)!} \Rightarrow C_{60,25} = \frac{1}{25!} \cdot \frac{60!}{(60-25)!} \Rightarrow$

$\Rightarrow C_{60,25} = \frac{1}{25!} \cdot A_{60,25} = \frac{A_{60,25}}{25!}$

Há $\frac{A_{60,25}}{25!}$ maneiras distintas de compor esse simulado. Logo, a alternativa **a** é a correta.

57. Quantidade de questões de Matemática:

$C_{3,2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!1!} = 3.$

Quantidade de questões de Física:

$C_{8,6} = \frac{8!}{6!(8-6)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!2!} = 28.$

$28 \cdot 3 = 84$

Assim, é possível elaborar 84 provas distintas. Logo, a alternativa **e** é a correta.

58. Contamos todos os times possíveis e, em seguida, subtraímos desse valor a quantidade de equipes das quais João e Mara não são membros. Assim:

$$C_{10,5} - C_{8,5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} - \frac{8!}{5!(8-5)!} = 196$$

Portanto, é possível formar 196 times diferentes com a participação de pelo menos um dos amigos citados.

59. $C_{25,16} = \frac{25!}{16!(25-16)!} = 2\,042\,975$

Esse corredor pode ser iluminado de 2 042 975 maneiras distintas.

60. $C_{x,2} = 6 \Rightarrow \frac{x!}{2!(x-2)!} = 6 \Rightarrow \frac{x(x-1)(x-2)!}{2 \cdot 1 \cdot (x-2)!} = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$

Logo, $x = -3$ ou $x = 4$. Como $x \in \mathbb{N}$, concluímos que $x = 4$.

61. a) $C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$

Logo, podem ser traçados 15 segmentos.

b) $C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$

Logo, podem ser formados 20 triângulos.

62. Indicando por n a quantidade de pessoas que formam o grupo, temos:

$C_{n,2} = 630 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 630 \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2 \cdot 1 \cdot (n-2)!} = 630 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 - n - 1260 = 0$

Logo, $n = -35$ (não convém) ou $n = 36$. Portanto, 36 pessoas formam esse grupo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

63. Indicando por n a quantidade de médicos, temos: $C_{n,5} = 15\,504$.
Por tentativas, segue que $n = 20$. Assim, se a junta for composta de 6 médicos, temos: $C_{20,6} = \frac{20!}{6!(20-6)!} = 38\,760$.

Portanto, essa junta pode ser formada de 38 760 maneiras distintas.

64. Indicando por n a quantidade de estudantes da turma, $C_{15,3}$ os estudantes que tocam algum instrumento e $C_{n-15,2}$ os estudantes que não tocam, temos:

$C_{15,3} \cdot C_{n-15,2} = 30\,030 \Rightarrow 455 \cdot \frac{(n-15)!}{2!(n-17)!} = 30\,030 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 - 31n + 108 = 0$

Logo, $n = 27$ ou $n = 4$. Como $n > 15$, concluímos que há 27 estudantes na turma.

65. $C_{3,2} \cdot C_{5,4} + C_{3,3} \cdot C_{5,3} =$

$= \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \frac{5!}{4!(5-4)!} + \frac{3!}{3!(3-3)!} \cdot \frac{5!}{3!(5-3)!} =$

$= 3 \cdot 5 + 1\frac{9!}{3!(9-3)!} = 15 + 10 = 25$

Portanto, há 25 possibilidades para a composição de formatura. Logo, a alternativa **c** é a correta.

66. Digitamos na calculadora a sequência de teclas: 4 0 nCr 4 =, obtendo o resultado 91 390.

Desse modo, há 91 390 maneiras diferentes de compor o conjunto de bandeiras.

67. $C_{12,3} \cdot C_{10,3} \cdot C_{9,3} \cdot C_{15,1} =$

$= \frac{12!}{3!(12-3)!} \cdot \frac{10!}{3!(10-3)!} \cdot \frac{9!}{3!(9-3)!} \cdot \frac{15!}{1!(15-1)!} =$

$= 220 \cdot 120 \cdot 84 \cdot 15 = 33\,264\,000$

Portanto, essa pessoa pode enviar a mensagem de 33 264 000 maneiras diferentes.

68. $7! \cdot C_{9,7} = 7! \cdot \frac{9!}{7!(9-7)!} = \frac{9!}{2!}$

Portanto, há $\frac{9!}{2!}$ maneiras de acomodar o grupo de amigos nesse ônibus. Logo, a alternativa **a** é a correta.

69. $C_{9,3} = \frac{9!}{3!(9-3!)} = 84$

Portanto, poderá pintar de 84 maneiras distintas.

70. Para o tratamento, o indivíduo deve apresentar 4, 5, 6 ou 7 sintomas.

$C_{7,4} + C_{7,5} + C_{7,6} + C_{7,7} =$

$= \frac{7!}{4!(7-4)!} + \frac{7!}{5!(7-5)!} + \frac{7!}{6!(7-6)!} + \frac{7!}{7!(7-7)!} = 64$

Desse modo, um indivíduo pode manifestar esses sintomas de 64 maneiras diferentes.

71. Total de acondicionamentos sem a restrição:

$C_{10,6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = 210$.

Quantidade de acondicionamentos com os dois tipos de peça juntos: $C_{8,4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70$.

O total de maneiras de acondicionamento diferentes é dado por: $210 - 70 = 140$.

Assim, pode-se acondicionar essas peças de 140 maneiras diferentes.

72. $C_{8,3} \cdot C_{5,2} \cdot C_{3,1} = 56 \cdot 10 \cdot 3 = 1680$

Portanto, esse sistema pode emitir 1680 mensagens distintas.

73. Calculamos as maneiras distintas de escolher a alternativa **A**, em seguida a alternativa **B**, e assim por diante. Logo:

$C_{10,2} \cdot C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2} = 45 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 113\,400$

Esse professor pode elaborar a folha de respostas de 113 400 maneiras diferentes. Portanto, a alternativa **b** é a correta.

75. a) $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} = \binom{8}{5} + \binom{8}{5} = 2 \cdot \frac{8!}{5!3!} = 112$

b) $\binom{10}{4} + \binom{2}{0} + \binom{8}{3} = \frac{10!}{4!6!} + 1 + \frac{8!}{3!5!} = 267$

c) $\binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \binom{15}{2} + \binom{15}{3} + \ldots + \binom{15}{14} + \binom{15}{15} = 2^{15} = 32\,768$

d) $\binom{6}{2} + \binom{12}{7} + \binom{7}{0} = \frac{6!}{2!4!} + \frac{12!}{7!5!} + 1 = 808$

76. Resolução na página **MP090**.

77. Há 8 elementos na 8ª linha.

$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \ldots + \binom{8}{8} = 2^8 = 256$

Logo, a soma desses elementos é 256.

78. $\binom{6}{4} + \binom{6}{3} + \binom{6}{3} + \binom{6}{2} = \binom{7}{4} + \binom{7}{3} = \binom{8}{4}$

Portanto, a alternativa **d** é a correta.

79. Como a soma dos elementos de uma linha n qualquer do Triângulo de Pascal é igual a 2^n, temos:

$\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} + \ldots + \binom{x}{x-1} + \binom{x}{x} = 256 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x = 256 \Rightarrow x = 8$

80. $\binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \ldots + \binom{10}{10} = 2^{10} - \binom{10}{0} = 1024 - 1 = 1023$

Portanto, podem ser formadas 1023 comissões.

81. $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 4\,095 \Rightarrow 2^n - \binom{n}{0} = 4\,905 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^n - 1 = 4\,905 \Rightarrow n = 12$

82. Resolução na página **MP090**.

83. Para resolver essa tarefa, em cada um dos itens, substituímos as variáveis por 1.

a) $(7 \cdot 1 - 6 \cdot 1)^{14} = 1^{14} = 1$

b) $(3 \cdot 1 - 4 \cdot 1)^7 = (-1)^7 = -1$

c) $\left(\sqrt{1} - \frac{1}{\sqrt{1}}\right)^9 = 0^9 = 0$

d) $(-7 \cdot 1 + 9 \cdot 1)^8 = 2^8 = 256$

84. Resolução na página **MP091**.

85. $\left(\frac{2}{1^5} + \frac{\sqrt{1}}{1}\right)^n = 6\,561 \Rightarrow 3^n = 6\,561 \Rightarrow n = 8$

86. a) $T_{p+1} = \binom{7}{p} \cdot 9^{7-p}(-a)^p$

b) $T_{p+1} = \binom{5}{p} \cdot 3^{5-p}\left(\frac{x}{3}\right)^p$

c) $T_{p+1} = \binom{9}{p}(5ab)^{9-p}\left(-\frac{c}{7}\right)^p$

d) $T_{p+1} = \binom{6}{p}\left(\frac{7}{x}\right)^{6-p}\left(\frac{8y}{3}\right)^p$

87. Termo geral: $T_{p+1} = \binom{10}{p}(-2x)^{10-p}\left(\frac{1}{3}\right)^p$.

$T_8 = T_{7+1} = \binom{10}{7}(-2x)^{10-7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 = 120 \cdot (-8x^3) \cdot \frac{1}{2\,187} = -\frac{320x^3}{729}$

88. Termo geral: $T_{p+1} = \binom{20}{p}(2x)^{20-p}(-y)^p$.

$T_{17} = T_{16+1} = \binom{20}{16}(2x)^{20-16}(-y)^{16} =$

$= 4\,845 \cdot 16x^4 \cdot y^{16} = 77\,520x^4y^{16}$

89. a) Termo geral: $T_{p+1} = \binom{6}{p}(y^2)^{6-p} \cdot 3^p$.

$T_4 = T_{3+1} = \binom{6}{3}(y^2)^{6-3} \cdot 3^3 = 20 \cdot y^6 \cdot 27 = 540y^6$

SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) Termo geral: $T_{p+1} = \binom{8}{p}(a^2)^{8-p}\left(-\frac{b}{a}\right)^p$.

$T_5 = T_{4+1} = \binom{8}{4}(a^2)^{8-4}\left(-\frac{b}{a}\right)^4 = 70 \cdot a^8 \cdot \frac{b^4}{a^4} = 70a^4b^4$

c) Termo geral: $T_{p+1} = \binom{12}{p}\left(\frac{2}{xy}\right)^{12-p}\left(\frac{z^3}{5}\right)^p$.

$T_7 = T_{6+1} = \binom{12}{6}\left(\frac{2}{xy}\right)^{12-6}\left(\frac{z^3}{5}\right)^6 =$

$= 924 \cdot \frac{64}{x^6y^6} \cdot \frac{z^{18}}{15\,625} = \frac{59\,136z^{18}}{15\,625x^6y^6}$

90. **a)** Termo geral: $T_{p+1} = \binom{6}{p}(x^2)^{6-p} \cdot 3^p$.

Assim: $6 - p = 0 \Rightarrow p = 6$

$T_{6+1} = \binom{6}{6}(x^2)^{6-6} \cdot 3^6 = 729$

b) Termo geral: $T_{p+1} = \binom{5}{p}\left(\frac{3}{x}\right)^{5-p} \cdot 4^p$.

Assim: $5 - p = 0 \Rightarrow p = 5$

$T_{5+1} = \binom{5}{5}\left(\frac{3}{x}\right)^{5-5} \cdot 4^5 = 1024$

c) Termo geral: $T_{p+1} = \binom{8}{p}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8-p}(-x^3)^p =$

$= \binom{8}{p}(-1)^p \frac{x^{3p}}{x^{\frac{1}{2}(8-p)}} = \binom{8}{p}(-1)^p x^{\frac{7}{2}p-4}$

Assim: $\frac{7}{2}p - 4 = 0 \Rightarrow p = \frac{8}{7} \notin \mathbb{N}$.

Nesse caso, não há termo independente de x.

d) Termo geral: $T_{p+1} = \binom{8}{p}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8-p}(3\sqrt{x})^p =$

$= \binom{8}{p} \cdot 3^p \frac{x^{\frac{p}{2}}}{x^{\frac{1}{2}(8-p)}} = \binom{8}{p} \cdot 3^p x^{p-4}$

Assim: $p - 4 = 0 \Rightarrow p = 4$.

$T_{4+1} = \binom{8}{4} \cdot 3^4 x^{4-4} = 70 \cdot 81 = 5\,670$

91. Termo geral: $T_{p+1} = \binom{20}{p}x^{20-p}\left(-\frac{2}{y}\right)^p$.

Logo: $20 - p = 18 \Rightarrow p = 2$.

$T_{2+1} = \binom{20}{2}x^{20-2}\left(-\frac{2}{y}\right)^2 = 190x^{18}\frac{4}{y^2} = \frac{760x^{18}}{y^2}$

92. A partir do termo geral: $T_{p+1} = \binom{12}{p}\left(\frac{x}{2}\right)^{12-p} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^p$, calculamos os itens que seguem.

a) $T_{10} = T_{9+1} = \binom{12}{9}\left(\frac{x}{2}\right)^{12-9} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^9 = \frac{55x^3}{2y^9}$

b) $T_7 = T_{6+1} = \binom{12}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^{12-6} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^6 = \frac{231x^6}{16y^6}$

c) $12 - p = 8 \Rightarrow p = 4$

$T_{4+1} = \binom{12}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^{12-4} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^4 = 495 \cdot \frac{x^8}{256} \cdot \frac{1}{y^4} = \frac{495x^8}{256y^4}$

Resolvendo por etapas (páginas 30 e 31)

2. Sim, é possível resolver o problema usando o plano apresentado com algumas adequações. Denotando por A a quantidade de equipes de que Arlindo faz parte e Beatriz não; B a quantidade de equipes de que Beatriz faz parte e Arlindo não; e AB a quantidade de equipes em que Arlindo e Beatriz estão presentes, temos:

$$A = C_{13,3} = \frac{13!}{3! \cdot (13-3)!} = 286$$

$$B = C_{13,3} = \frac{13!}{3! \cdot (13-3)!} = 286$$

$$AB = C_{13,2} = \frac{13!}{2! \cdot (13-2)!} = 78$$

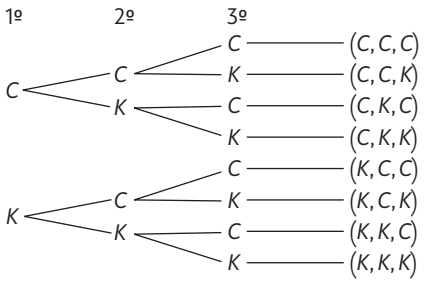
Desse modo: $286 + 286 + 78 = 650$

Portanto, é possível escolher os membros da equipe de 650 maneiras diferentes.

Síntese do capítulo (página 45)

3. O princípio fundamental da contagem pode ser usado quando queremos determinar a quantidade de possibilidades de ocorrência dos acontecimentos A e B, tais que A pode ocorrer de n maneiras distintas e, para cada uma dessas maneiras, B pode ocorrer de m maneiras distintas.

4. Indicando por C o resultado "cara" e por K o resultado "coroa", temos:



5. A definição correta é a que destaca que, em arranjos simples, a ordem dos elementos importa. Portanto, a alternativa **b** é a correta.

6. Sugestão de resposta: **1**. Calcule o fatorial de n. **2**. Calcule o fatorial da diferença entre n e p. **3**. Calcule o quociente entre o resultado obtido no passo **1** e o obtido no passo **2**.

7. Sugestão de resposta: Identificaria a quantidade n de letras que compõe a palavra e calcularia $n!$. Identificaria a quantidade n de letras que compõe a palavra e as quantidades n_1, n_2, ..., n_k das diferentes letras que compõem a palavra. Por fim, calcularia $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

8. Sugestão de resposta: Calcularia a combinação simples de n elementos tomados p a p.

9. A fórmula para combinações simples deve desconsiderar a ordem dos elementos, utilizando o fatorial de p no denominador para ajustar isso. Assim, a alternativa **a** é a correta.

10. Para calcular combinações usando uma calculadora científica, utilizamos a função *nCr*, que corresponde à combinação de n elementos tomados p a p. Nesse caso, digitamos o valor de n, seguido do comando *nCr*, e o valor de p, antes de pressionar o igual. Portanto, a alternativa **a** é a correta.

11. A veracidade da afirmação dessa questão está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

12. Substituiria $x = y = 1$ em $(2x + 1)^5$.

13. O termo geral do Binômio de Newton é expresso por $T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{n-p}y^p$, em que $\binom{n}{p}$ representa o coeficiente binomial e p varia de 0 até n. Essa fórmula é utilizada na expansão de $(x + y)^n$, representando cada termo da expansão. Portanto, a alternativa **b** é a correta.

CAPÍTULO 2 PROBABILIDADE

Exercícios e problemas

1. $\Omega = \{(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D)\}$

2. **a)** $\Omega = \{(P, A, T, Q), (P, A, T, C), (P, A, Q, C), (P, T, Q, C)\}$

b) $(P, A, T, Q) = 130 + 10 + 18 + 55 = 213$

$(P, A, T, C) = 130 + 10 + 18 + 110 = 268$

$(P, A, Q, C) = 130 + 10 + 55 + 110 = 305$

$(P, T, Q, C) = 130 + 18 + 55 + 110 = 313$

O valor calórico (em kcal) para cada possibilidade de escolha é $\Omega = \{213, 268, 305, 313\}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. **a)** $\Omega = \{(A, A, V), (A, V, A), (A, V, V), (V, V, A), (V, A, V), (V, A, A)\}$

b) Das 4 bolinhas, 2 são verdes e 2 são azuis. Então, não é possível retirar 3 bolinhas da mesma cor. Logo, $E = \varnothing$.

4. **a)** $A = \{(C, C), (P, P), (O, O), (E, E)\}$

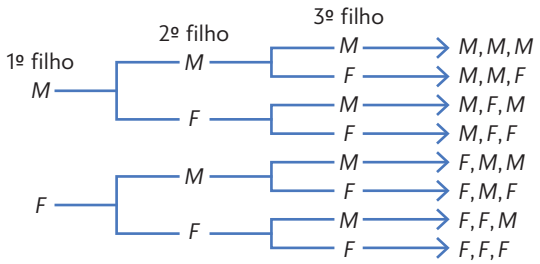
b) $B = \{(O, O), (O, C), (O, E), (O, P)\}$

c) Desconsiderando o naipe de copas, obtemos:
$C = \{(E, E), (E, O), (E, P), (O, O), (O, P), (P, P)\}$

5. **a)** O quadro com o espaço amostral Ω referente a essa questão está apresentado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

b) • $A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$
• $B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
• $C = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$
• $D = \varnothing$
• $E = \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

6. **a)** Em 1991, as mulheres tinham, em média, aproximadamente 3 filhos. Assim:



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

b) • $A = \{(M, M, M), (F, F, F)\}$
• $B = \{(M, M, F), (M, F, M), (F, M, M)\}$
• $C = \{(M, M, F), (M, F, M), (M, F, F), (F, M, M), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)\}$

8. Como a condição desse espaço amostral não limita quantas vezes a moeda será arremessada, o espaço amostral pode ser representado por:

$$\Omega = \{(Co), (Ca, Co), (Ca, Ca, Co), (Ca, Ca, Ca, Co), \ldots, (Ca, Ca, Ca, \ldots, Co), \ldots\}$$

Portanto, o espaço amostral é infinito, pois não existe um último elemento para ele.

9. **a)** Indicando por P as camisas polo, C as camisas de manga curta e L as camisas de manga longa, temos: $\Omega = \{PP, PC, PL, CC, CL, LL\}$.
Assim, podem ser compradas 2 camisas de 6 maneiras diferentes.

b) $\Omega = \{$R$ 120,00; R$ 130,00; R$ 140,00; R$ 150,00; R$ 160,00; R$ 180,00$\}$

10. **a)** As peças do dominó podem ter de 0 a 6 pontos em cada metade, então:
$A = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

b) Para que a soma das duas metades das peças seja 6:
$B = \{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3)\}$

c) Como o maior valor que a metade de uma peça de dominó pode assumir é 6 e o menor valor é 0, não existe um caso no qual a diferença entre as duas metades seja maior do que 6. Assim, $C = \varnothing$.

d) Visto que nenhuma peça representa um valor negativo, o produto das metades de uma peça vai ser sempre não negativo. Logo, $D = \Omega$.

11. Desconsiderando as repetições de posições relativas entre uns e outros, temos:

a) $\Omega = \{(A, B, C, D), (A, B, D, C), (A, C, B, D), (A, C, D, B), (A, D, B, C), (A, D, C, B)\}$

b) $M = \{(A, B, C, D), (A, B, D, C), (A, C, D, B), (A, D, C, B)\}$

c) $N = \{(A, C, B, D), (A, D, B, C)\}$

d) Como o brinquedo tem formato circular, sempre terá alguém ao seu lado. Como eles estão em 4 amigos, mesmo que Dênis esteja em um de seus lados, as opções para o outro lado são Beatriz e Carolina. Logo, $P = \varnothing$.

12. **a)** Como 1 ano tem 365 dias, então a vida útil dessa lâmpada não será maior do que 1095 dias. Desse modo: $\Omega = \{t \in \mathbb{R} | 0 \leq t \leq 1095\}$ ou $A = \{t \in \mathbb{R} | t \in [0, 1095]\}$.

b) Como 1 ano é equivalente a 365 dias, 2 anos equivalem a 730 dias. Assim, temos:
$A = \{t \in \mathbb{R} | 365 < t < 730\}$ ou $A = \{t \in \mathbb{R} | t \in]365, 730[\ \}$

13. $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 30\} - \{11, 26\}$; $n(\Omega) = 30 - 2 = 28$

a) $A = \{2, 4, 6, \ldots, 30\} - \{26\}$; $n(A) = 15 - 1 = 14$; $P(A) = \frac{14}{28} = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Assim, a probabilidade de o número sorteado ser par é $\frac{1}{2}$ ou 50%.

b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $n(B) = 8$; $P(B) = \frac{8}{28} = \frac{2}{7} \simeq 0{,}2857$. Assim, a probabilidade de o número sorteado ser menor do que 9 é $\frac{2}{7}$ ou, aproximadamente, 28,57%.

c) $C = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$; $n(C) = 7$; $P(C) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0{,}25$. Assim, a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 4 é $\frac{1}{4}$ ou 25%.

d) $D = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$; $n(D) = 6$; $P(D) = \frac{6}{28} = \frac{3}{14} \simeq 0{,}2143$. Assim, a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 5 é $\frac{3}{14}$ ou, aproximadamente, 21,43%.

e) $E = \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 29\}$; $n(E) = 9$; $P(E) = \frac{9}{28} \simeq 0{,}3214$. Assim, a probabilidade de o número sorteado ser primo é $\frac{9}{28}$ ou, aproximadamente, 32,14%.

f) $F = \{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$; $n(F) = 12$; $P(F) = \frac{12}{28} = \frac{3}{7} \simeq 0{,}4286$. Assim, a probabilidade de o número sorteado ser maior do que 12 e menor do que 25 é $\frac{3}{7}$ ou, aproximadamente, 42,86%.

g) $G = \{18, 24, 30\}$; $n(G) = 3$; $P(E) = \frac{3}{28} = 0{,}1071$. Assim, a probabilidade de o número sorteado ser maior do que 17 e divisível por 6 é $\frac{3}{28}$ ou, aproximadamente, 10,71%.

14. **a)** Na faixa horária das 6 h às 11 h 59 min, pois é nessa faixa horária que ocorre a maior quantidade de infartos.

b) • $\frac{14}{21 + 14 + 35} = \frac{1}{5} = 0{,}2$
• $\frac{14}{21 + 14 + 35} + \frac{35}{21 + 14 + 35} = \frac{7}{10} = 0{,}7$
Assim, a probabilidade de uma pessoa enfartada dar entrada nesse hospital da 0 h às 5 h 59 min é $\frac{1}{5}$ ou 20%, e da 0 h às 11 h 59 min, $\frac{7}{10}$ ou 70%.

15. $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 100\} - \{1, 2, 3, 4, \ldots, 20\}$; $n(A) = 100 - 20 = 80$; $P(A) = \frac{80}{100} = \frac{8}{10}$. Assim, a probabilidade de o número sorteado ser par é $\frac{8}{10}$. Logo, a alternativa **e** é a correta.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

16. $\Omega = \{678, 687, 768, 786, 867, 876\}$; $n(\Omega) = 6$

a) $A = \{687, 867\}$; $n(A) = 2$; $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}33\overline{3}$. Logo, a probabilidade de o número sorteado ser ímpar é $\frac{1}{3}$ ou $33{,}\overline{3}\%$.

b) Como a probabilidade de o evento "sorteio de um número par" ocorrer é a mesma de o evento "sorteio de um número ímpar" não acontecer, temos:

$P = \bar{I} \Rightarrow P(P) = P(\bar{I}) \Rightarrow P(P) = 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow P(P) = \frac{2}{3} = 0{,}66\overline{6}$

Logo, a probabilidade de o número sorteado ser par é $\frac{2}{3}$ ou $66{,}\overline{6}\%$.

c) O evento "sorteio de um número múltiplo de 3" será igual ao espaço amostral, ou seja, $C = \Omega$. Então, temos: $P(C) = P(\Omega) \Rightarrow P(C) = 1$. Logo, a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 3 é 1 ou 100%.

d) $D = \{786, 867, 876\}$; $n(D) = 3$; $P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Logo, a probabilidade de o número sorteado ser maior do que 770 é $\frac{1}{2}$ ou 50%.

e) Como nenhum elemento do espaço amostral é múltiplo de 5, logo $E = \varnothing$. Portanto, a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 5 é 0 ou 0%.

17. Indicando por A o evento em que o estudante acerta a questão, temos:

$P(A) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{5} \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{4}{5}$

Logo, a probabilidade de esse estudante acertar a questão é $\frac{1}{5}$ ou 20% e a de ele errar é $\frac{4}{5}$ ou 80%.

18. $n(\Omega) = 10 \cdot 5 = 50$

Seja A o evento em que a soma é um número ímpar. Isso ocorre quando:

- o 1º número é par (5 possibilidades) e o 2º é ímpar (3 possibilidades).
- o 1º é ímpar (5 possibilidades) e o 2º é par (2 possibilidades).

$$n(A) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 25 \Rightarrow P(A) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$$

A probabilidade de a soma dos números ser um número ímpar é $\frac{1}{2}$. Logo, a alternativa **c** é a correta.

19. Como $n(\Omega) = 85$, calculamos cada um dos eventos que seguem.

a) $n(A) = 42$, logo: $P(A) = \frac{42}{85} \simeq 0{,}4941$.

Assim, a probabilidade de o profissional sorteado ser homem é $\frac{42}{85}$ ou, aproximadamente, 49,41%.

b) $n(B) = 30$, logo: $P(B) = \frac{30}{85} = \frac{6}{17} \simeq 0{,}3529$.

Assim, a probabilidade de o profissional sorteado ser ortopedista é $\frac{6}{17}$ ou, aproximadamente, 35,29%.

c) $n(C) = 14$, logo: $P(C) = \frac{14}{85} \simeq 0{,}1647$.

Assim, a probabilidade de o profissional sorteado ser mulher e oftalmologista é $\frac{14}{85}$ ou, aproximadamente, 16,47%.

20. a) Área do Tangram: $8 \cdot 8 = 64$

Área da região alaranjada: $\frac{8 \cdot 4}{2} = 16$.

Indicando por A o ponto pertencente à região alaranjada, obtemos: $P(A) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$.

Área da região roxa: $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$.

Indicando por R o ponto pertencente à região roxa, obtemos: $P(R) = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$.

Área da região azul: $\frac{8 \cdot 4}{2} = 16$.

Indicando por Z o ponto pertencente à região azul, temos:

$$P(\bar{Z}) = 1 - P(Z) \Rightarrow P(\bar{Z}) = 1 - \frac{16}{64} \Rightarrow P(\bar{Z}) = \frac{3}{4}$$

Portanto, a probabilidade de um ponto pertencer à região alaranjada é $\frac{1}{4}$ ou 25%, a de pertencer à região roxa é $\frac{1}{16}$ ou 6,25% e a de um ponto não pertencer à região azul é $\frac{3}{4}$ ou 75%.

b) O comprimento do segmento pertencente ao Tangram com abscissa -3 é 8.

O comprimento do segmento na região alaranjada é 1. Indicando por A_L o ponto pertencente à essa região, temos: $P(A_L) = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

O comprimento do segmento na região verde é 3. Indicando por V o ponto pertencente à região verde, temos: $P(V) = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

Logo, a probabilidade de esse ponto pertencer à região alaranjada é $\frac{1}{8}$ ou 12,5% e a de ele pertencer à região verde é $\frac{3}{8}$ ou 37,5%.

c) Área do Tangram com ordenada positiva: $8 \cdot 4 = 32$.

Calculando a área da região amarela, temos: $4 \cdot 2 = 8$.

Indicando por A_M o ponto pertencente à região amarela, temos:

$$P(A_M) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Logo, a probabilidade de um ponto pertencer a região amarela é $\frac{1}{4}$ ou 25%.

21. De acordo com as informações, são 17 moradores que têm somente internet, 3 que têm somente TV por assinatura e 25 que têm ambos os serviços.

Indicando por I e T, respectivamente, os moradores que têm internet e os moradores que têm TV por assinatura e sabendo que $n(\Omega) = 50$, calculamos:

- a probabilidade de sortear um morador que assine apenas internet: $P(I - T) = \frac{n(I - T)}{n(\Omega)} = \frac{17}{50}$.
- a probabilidade de sortear um morador que tenha internet e TV por assinatura: $P(I \cap T) = \frac{n(I \cap T)}{(\Omega)} \Rightarrow P(I \cap T) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$.

Logo, a probabilidade de um morador ter somente internet é $\frac{17}{50}$ ou 34% e a de ter internet e TV por assinatura é $\frac{1}{2}$ ou 50%.

22. Quantidade total de anagramas: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

a) Há apenas um anagrama ORVIL entre os 120 anagramas possíveis. Assim: $P(A) = \frac{1}{120} = 0{,}008\overline{3}$. Logo, a probabilidade é $\frac{1}{120}$ ou $0{,}8\overline{3}\%$.

b) Anagramas que começam com L: 4!= 24; anagramas que começam com V: 4! = 24; anagramas que começam com R: 4! = 24.

Total de anagramas que começam com uma consoante: $3 \cdot 24 = 72$.

$$P(C) = \frac{72}{120} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Assim, a probabilidade é $\frac{3}{5}$ ou 60%.

c) Como as vogais I e O podem permutar entre si, temos:

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

$4! \cdot 2! = 24 \cdot 2 = 48$. Sendo assim: $P(J) = \frac{48}{120} = \frac{2}{5} = 0,4$.

Logo, a probabilidade de ser sorteado um anagrama que contenha as vogais em sequência é $\frac{2}{5}$ ou 40%.

23. Quantidade de seleções possíveis: $n(\Omega) = C_{9,2} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = 36$.

A soma de dois desses números será maior do que seu produto apenas quando um dos dois for 1, pois:

$x \geq 2$ e $y \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq 1 \Rightarrow x + y \leq xy$

$A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), \ldots, (1, 9)\}$; $n(A) = 8$

$$P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} = 0,22\overline{2}$$

Assim, a probabilidade de que a soma desses números seja menor do que seu produto é $\frac{2}{9}$ ou $22,\overline{2}\%$.

24. $n(\Omega) = 36$

a) $n(A) = 15$, logo: $P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} = 0,41\overline{6}$. Assim, a probabilidade de Amanda obter soma maior do que 9 é $\frac{5}{12}$ ou $41,\overline{6}\%$.

b) Como os menores valores dos dados são 1 e 3, cuja soma é 4, quaisquer valores que ele obtenha terá soma 4 ou mais. Logo, o evento de Pedro obter 4 ou mais é igual ao espaço amostral $B = \Omega$.

$$P(B) = P(\Omega) \Rightarrow P(B) = 1$$

Assim, a probabilidade de a soma obtida ser 4 ou mais é 1 ou 100%, ou seja, o evento é certo.

25. a) Total de pacientes com problemas respiratórios causados pelas queimadas:

$$50 + 150 = 200$$

Probabilidade de que um paciente seja criança:

$P(C) = \frac{150}{200} = 0,75$

Logo, a alternativa **V** é a correta.

b) Conforme as informações do item **a**, a alternativa **III** é a correta.

26. a) A área da região verde é igual à metade da área da região total. Portanto, a probabilidade de acertar a região verde é $\frac{1}{2}$ ou 50%.

b) Área total do alvo: $A_t = \pi \cdot (20)^2 = 400\pi$

Área da parte amarela: $A_a = \frac{\pi \cdot (10)^2}{2} = 50\pi$

$P(A_a) = \frac{50\pi}{400\pi} = \frac{1}{8} = 0,125$

Logo, a probabilidade de acertar a região amarela é $\frac{1}{8}$ ou 12,5%.

c) Indicando por A_z a área da região azul, temos:

$P(A_z) = \frac{A_t - A_a - A_v}{A_t} \Rightarrow P(A_z) = \frac{(400 - 50 - 200) \cdot \pi}{400\pi} =$

$= \frac{3}{8} = 0,375$

Logo, a probabilidade de acertar a região azul é $\frac{3}{8}$ ou 37,5%.

27. Total de números de 4 dígitos distintos: $4! = 24$

Analisando os números que são maiores do que 4 593:

- se o 1º algarismo for 4, o 2º algarismo deve ser 9. Assim, os números formados são: 4 935 e 4 953 (2 casos).
- se o 1º algarismo for 5, calculamos a permutação $3! = 6$.
- se o primeiro algarismo for 9, calculamos a permutação $3! = 6$.

Total de números maiores do que 4 593: $2 + 6 + 6 = 14$

A probabilidade de que um número escolhido ao acaso seja maior do que 4 593 é dada por: $P(M) = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} = 0,58\overline{3}$.

A probabilidade de que, em uma escolha ao acaso, seja tomado um número maior do que 4 593 é $\frac{7}{12}$ ou $58,\overline{3}\%$.

28. Indicando o número de bolinhas vermelhas, verdes e roxas por V, D e R, respectivamente, temos:

$V + D + R = 33$ (I)

$P(V) = \frac{V}{33}$, $P(D) = \frac{D}{33}$ e $P(R) = \frac{R}{33}$.

A probabilidade de ser tirada uma bolinha verde em relação à:

- roxa é $\frac{D}{33} = 3 \cdot \frac{R}{33}$. Então, $D = 3R$ (II).
- vermelha é $\frac{D}{33} = 2 \cdot \frac{V}{33}$. Então, $D = 2V$ (III).

Assim: $\begin{cases} V + D + R = 33 \\ D = 3R \\ D = 2V \end{cases}$

Expressando as equações (II) e (III) em função de D e substituindo na equação (I), temos:

$$\frac{D}{2} + D + \frac{D}{3} = 33 \Rightarrow \frac{11D}{6} = 33 \Rightarrow D = 18$$

Substituindo $D = 18$ nas equações (II) e (III), temos $R = 6$ e $V = 9$.

Logo, no recipiente há 9 bolinhas vermelhas, 18 verdes e 6 roxas.

30. a) Indicando por A o rei de paus, temos:

$n(A) = 1$ $\qquad$ $P(A) = \frac{1}{52} \simeq 0,0192$

Assim, a probabilidade de ser um rei de paus é aproximadamente 1,92%.

b) Indicando por B uma carta com o número 8, temos:

$n(B) = 4$ $\qquad$ $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \simeq 0,0769$

Assim, a probabilidade de ser uma carta com o número 8 é aproximadamente 7,69%.

c) Indicando por C e D, respectivamente, um valete e uma carta de ouros, temos:

- $n(C) = 4$. Logo: $P(C) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.
- $n(D) = 13$. Logo: $P(D) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.
- $n(C \cap D) = 1$. Logo: $P(C \cap D) = \frac{1}{52}$.

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$$

$$P(C \cup D) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13} \simeq 0,3077$$

Assim, a probabilidade de essa carta ser um valete ou uma de ouros é $\frac{4}{13}$ ou, aproximadamente, 30,77%.

d) Indicando por E e F, respectivamente, uma dama ou uma carta com o número 3, temos:

- $n(E) = 4$. Logo: $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.
- $n(F) = 4$. Logo: $P(F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13} \simeq 0,1538$$

Portanto, a probabilidade de essa carta ser uma dama ou uma carta de número 3 é $\frac{2}{13}$ ou, aproximadamente, 15,38%.

e) Indicando por G uma carta de copas que não seja figura, temos:

$$P(G) = \frac{10}{52} = \frac{5}{26} \simeq 0,1923$$

Portanto, a probabilidade de essa carta ser uma carta de copas que não seja figura é $\frac{5}{26}$ ou, aproximadamente, 19,23%.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

31. Do total de pessoas, 24 pessoas têm apenas cachorro como animal de estimação, 8 têm apenas gatos, 12 têm as duas espécies e 4 não têm essas espécies ou têm outra espécie de animal.

Indicamos por C e G, respectivamente, as pessoas que têm cachorro e as que têm gato como animal de estimação.

a) $P(C) = \frac{36}{48} = \frac{3}{4} = 0,75$

Logo, a probabilidade de a pessoa ter cachorro de estimação é $\frac{3}{4}$ ou 75%.

b) Como $n(C \cup G) = 44$, temos: $P(C \cup G) = \frac{44}{48} = \frac{11}{12} = 0,91\overline{6}$.

Logo, a probabilidade de a pessoa ter cachorro ou gato de estimação é $\frac{11}{12}$ ou $91,\overline{6}\%$.

c) $P(G) = \frac{8}{48} = \frac{1}{6} = 0,16\overline{6}$

Logo, a probabilidade de a pessoa ter apenas gato de estimação é $\frac{1}{6}$ ou $16,\overline{6}\%$.

32. **a)** • Luana: $L = \{1, 2, 3, 4\}$ • Natália: $N = \{1, 3, 4\}$
• Marcos: $M = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ • Otávio: $O = \{1, 2, 5, 6\}$

Natália tem a menor probabilidade de vencer. A probabilidade é dada por: $P(N) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$.

b) • Luana: $L = \{3\}$ • Natália: $N = \varnothing$
• Marcos: $M = \{2, 5\}$ • Otávio: $O = \{1, 2\}$

$$P(M) = P(O) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,33\overline{3}$$

Assim, Marcos e Otávio têm a maior probabilidade. A probabilidade é $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$.

33. Indicando por M as pessoas que praticam musculação e por G as que praticam ginástica aeróbica, temos:

$$P(M) = \frac{62}{120} = \frac{31}{60} \qquad P(G) = \frac{n(G)}{n(\Omega)} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$

Praticar ambos os esportes: $P(M \cap G) = \frac{n(M \cap G)}{n(\Omega)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

$$P(M \cup G) = P(M) + P(G) - P(M \cap G) = \frac{31}{60} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Logo, a probabilidade de esse estudante praticar musculação ou ginástica aeróbica é $\frac{3}{4}$ ou 75%.

34. De acordo com as informações, são 10 candidatos aprovados nos exames médicos, 2 aptos no exame psicológico, 102 aptos nos dois exames e 6 reprovados nos dois exames.

Indicando por M e P, respectivamente, os aprovados no exame médico e os aprovados no exame psicológico, temos:

a) $n(M \cup P) = 120 - 6 = 114 \qquad P(M \cup P) = \frac{114}{120} = \frac{19}{20} = 0,95$

Logo, a probabilidade de essa pessoa ser aprovada no exame médico ou no psicológico é $\frac{19}{20}$ ou 95%.

b) $P(M) = \frac{112}{120} \qquad P(P) = \frac{104}{120}$

$P(M \cup P) = P(M) + P(P) - P(M \cap P) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{114}{120} = \frac{112}{120} + \frac{104}{120} - P(M \cap P) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(M \cap P) = \frac{102}{120} = \frac{17}{20} = 0,85$

Assim, a probabilidade de essa pessoa ser aprovada em ambos os exames é $\frac{17}{20}$ ou 85%.

c) $P(P) - P(M \cap P) = \frac{104}{120} - \frac{102}{120} = \frac{1}{60} = 0,01\overline{6}$

Portanto, a probabilidade de essa pessoa ser aprovada somente no exame psicológico é $\frac{1}{60}$ ou $1,\overline{6}\%$.

35. $P(A) = \frac{17}{20} \qquad P(B) = \frac{14}{20}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{95}{100} = \frac{17}{20} + \frac{14}{20} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0,6$

Logo, a probabilidade de ser sorteado um problema que foi resolvido por ambos os estudantes é 60%.

36. Múltiplos de 4 entre 1 e 100: $\frac{(100 - 1) + 1}{4} = 25$

Números pares entre 1 e 100: $\frac{(100 - 1) + 1}{2} = 50$

Sendo A o evento em que ocorrem os números pares de 1 a 100 e B o evento em que ocorrem os múltiplos de 4 de 1 a 100, temos:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(B) = \frac{50}{100} - \frac{25}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Logo, a probabilidade de um número entre 1 e 100 ser par e não ser múltiplo de 4 é $\frac{1}{4}$ ou 25%.

37. Indicando por B os filmes dirigidos pelo cineasta **B**, segue a quantidade de filmes dirigidos por ele: $n(B) = 25 - 15 + 10 = 20$.

Assim: $P(B) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$. Logo, a probabilidade é $\frac{2}{5}$ ou 40%.

38. Seja C o evento em que chova em algum momento no dia do aniversário de Camila e S o evento em que faça Sol em algum momento desse dia, temos:

$P(C \cap S) = P(C) + P(S) - P(C \cup S) =$

$= 79\% + 84\% - 100\% = 163\% - 100\% = 63\%$

Logo, a probabilidade de que chova em algum momento e faça Sol em outro é 63%.

39. **a)** Indicando por A e B, respectivamente, a 1ª peça e a 2ª peça perfeita, temos:

$P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A) \Rightarrow P(B \cap A) = \frac{15}{19} \cdot \frac{16}{20} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(B \cap A) = \frac{12}{19} \simeq 0,6316$

Logo, a probabilidade de ambas serem perfeitas é $\frac{12}{19}$ ou, aproximadamente, 63,16%.

b) Indicando por E e F, respectivamente, a 1ª peça e a 2ª peça com defeito, temos:

$P(F \cap E) = P(F|E) \cdot P(E) \Rightarrow P(F \cap E) = \frac{3}{19} \cdot \frac{4}{20} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(F \cap E) = \frac{3}{95} \simeq 0,0316$

Logo, a probabilidade de ambas serem defeituosas é $\frac{3}{95}$ ou, aproximadamente, 3,16%.

40. **a)** Sim, pois o casal pode ter o traço falciforme sem desenvolver a doença, conforme apresentado nos esquemas.

b) Se um filho teve a doença, ele tem genótipo **SS**. Logo, os pais têm pelo menos um genótipo **S** cada um. Como o outro filho tem o traço, ele é **AS**. Logo, um dos pais tem um genótipo **A**. Portanto, os pais são **AS** × **SS** ou **AS** × **AS**.

c) Os pais são **AS** × **SS**.

A probabilidade de um filho não ter a doença é $\frac{3}{4}$.

Para dois filhos, temos: $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} = 0,5625$.

Logo, a probabilidade de dois filhos não terem a doença é $\frac{9}{16}$ ou 56,25%.

A probabilidade de um filho não ter a doença é $\frac{3}{4}$ e de ter a doença é $\frac{1}{4}$.

Logo, $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16} = 0,1875$.

A probabilidade de ter um filho com a doença e outro sem a doença é $\frac{3}{16}$ ou 18,75%.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

d) Se o pai da mulher tinha a doença, ela é **AS** ou **SS**. O genótipo do pai da criança é **AS**, pois sua mãe era **SS** e seu pai, **AA**. As possibilidades de genótipo para o filho do casal, neste caso, são: **AA**, **AS**, **AS**, **SS**, **AS**, **AS**, **SS**, **SS**. Portanto, a probabilidade seria $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ou 50%.

41. a) Indicando por A e B, respectivamente, a 1ª peça e a 2ª peça como vermelhas, temos:

$P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A) \Rightarrow P(B \cap A) = \frac{15}{47} \cdot \frac{16}{48} = \frac{5}{47} \simeq 0{,}1064$

Assim, a probabilidade de ambas serem vermelhas é $\frac{5}{47}$ ou, aproximadamente, 10,64%.

Indicando por C e D, respectivamente, a 1ª peça de qualquer formato e a 2ª peça com o mesmo formato da primeira, temos:

$P(D \cap C) = P(D|C) \cdot P(C) \Rightarrow P(D \cap C) = \frac{11}{47} \cdot 1 = \frac{11}{47} \simeq 0{,}2340$

Assim, a probabilidade de a 2ª peça ter o mesmo formato da 1ª peça é $\frac{11}{47}$ ou, aproximadamente, 23,4%.

b) Indicando por E e F, respectivamente, a peça com formato de triângulo e as peças sem formato circular, temos:

$$P(E|F) = \frac{n(E \cap F)}{n(F)} \Rightarrow P(E|F) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} = 0{,}33\overline{3}$$

Logo, a probabilidade de a peça ter formato de triângulo é $\frac{1}{3}$ ou $33{,}\overline{3}$%.

42. Indicando por A e B, respectivamente, a funcionária com número do calçado maior do que 36 e a funcionária que calça 38, temos:

$$P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} \Rightarrow P(B|A) = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

Portanto, a alternativa **b** é a correta.

43. Para que a 1ª bola preta seja retirada pelo 3º amigo, o 1º e o 2º devem retirar uma bola branca. Assim, a probabilidade:

- de o 1º amigo retirar uma bola branca é $\frac{3}{5}$;
- de o 2º amigo também retirar uma bola branca é $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;
- de o 3º amigo retirar uma bola preta é $\frac{2}{3}$.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

A probabilidade de o 3º amigo retirar a primeira bola preta e ficar com o livro é $\frac{1}{5}$ ou 20%. Portanto, a alternativa **b** é a correta.

44. São 33 camisetas lisas de tamanho P e 26 camisetas lisas de tamanho M. Já de camisetas estampadas, são 67 do tamanho P e 24 do tamanho M.

Indicando por E e M, respectivamente, as camisetas estampadas de tamanho M e a quantidade total de camisetas tamanho M, temos:

$$P(E|M) = \frac{n(E \cap M)}{n(M)} \Rightarrow P(E|M) = \frac{24}{26 + 24} \Rightarrow P(E|M) = \frac{12}{25} = 0{,}48$$

A probabilidade de tirar uma camiseta estampada tamanho M é $\frac{12}{25}$ ou 48%. Portanto, a alternativa **c** é a correta.

45. São 35 pessoas sadias que tomaram placebo e 15 pessoas sadias que tomaram remédio. Das pessoas doentes, 5 tomaram placebo e 145 tomaram remédio.

Indicando por S e P, respectivamente, as pessoas sadias e as que tomaram placebo, temos:

$$P(\overline{P}|S) = \frac{n(\overline{P} \cap S)}{n(S)} \Rightarrow P(\overline{P}|S) = \frac{15}{35 + 15} \Rightarrow P(\overline{P}|S) = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

Logo, a probabilidade de escolher ao acaso uma pessoa que tomou o remédio entre as pessoas sadias é $\frac{3}{10}$ ou 30%.

46. Indicando por H e V, respectivamente, ser homem e ser obrigado a votar, temos:

$P(H) = 45\%$ $\qquad P(\overline{V}|H) = 100\% - 80\% = 20\%$

Logo, $P(H \cap \overline{V}) = \frac{20}{100} \cdot \frac{45}{100} \Rightarrow P(H \cap \overline{V}) = \frac{9}{100} = 0{,}09$.

A chance de uma pessoa desse bairro, escolhida ao acaso, ser homem e não ser obrigado a votar é $\frac{9}{100}$ ou 9%.

47. Indicando por A e B, respectivamente, o 1º jogador e o 2º jogador, ambos com cartão amarelo, temos: $P(B|A) = \frac{3}{17} \simeq 0{,}1765$.

Logo, a probabilidade de o 2º sorteado para o exame ser um jogador que recebeu cartão amarelo é $\frac{3}{17}$ ou aproximadamente 17,65%.

49. a) 22 municípios tinham coleta seletiva. Logo, a probabilidade é $\frac{22}{100}$ ou 22%.

b) Probabilidade de jogar o lixo em cada uma das lixeiras: $\frac{1}{5}$

Probabilidade de jogar os materiais nas lixeiras corretas: $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

Logo, a probabilidade de jogar pelo menos um dos materiais na lixeira correta é $\frac{7}{20}$ ou 35%.

50. Probabilidade de a compra ser a de um sapato com numeração 35 a 39: $\frac{4}{5}$

$$\binom{n}{p} \cdot [P(C)]^p \cdot [1 - P(C)]^{n-p} = \binom{12}{9} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^9 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right)^{12-9} =$$

$$= \binom{12}{9} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \simeq 0{,}2362$$

Logo, a probabilidade de exatamente 9 mulheres terem comprado sapatos com essa numeração é, aproximadamente, 23,62%.

51. a) Evento A: probabilidade de sortear o número 3. Logo, $P(A) = \frac{1}{4}$.

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} =$$

$$= \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{5-2} = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \simeq 0{,}2637$$

Portanto, a chance de sortear o número 3 duas vezes é, aproximadamente, 26,37%.

b) Evento B: probabilidade de sortear apenas o número 2. Logo, $P(B) = \frac{1}{4}$.

$$\binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{5-5} = \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \simeq 0{,}001$$

Portanto, a chance de sortear apenas o número 2 é, aproximadamente, 0,1%.

c) Evento C: probabilidade de sortear o número 4 apenas uma vez. Logo: $P(C) = \frac{1}{4}$.

Assim: $\binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{5-1} = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \simeq 0{,}3955$.

Portanto, a chance de sortear o número 4 apenas uma vez é aproximadamente 39,55%.

d) Evento D: probabilidade de o número 1 não ser sorteado. Sendo assim, temos:

$P(D) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(\overline{D}) = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow P(\overline{D}) = \frac{3}{4}$

Assim: $\binom{5}{5} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{5-5} = \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \simeq 0{,}2373$.

Portanto, a chance de não ser sorteado o número 1 é, aproximadamente, 23,73%.

52. Indicando por A a probabilidade de a direção escolhida ser de ataque, temos:

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

$P(A) = \frac{1}{2}$

$\binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-5} = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{32} \simeq 0{,}0938$

Logo, a chance de a equipe escolher a direção de ataque, em 5 das 6 partidas, é $\frac{3}{32}$ ou, aproximadamente, 9,38%.

53. $\binom{3}{2} \cdot (0{,}8)^2 \cdot (1 - 0{,}8)^{3-2} = \binom{3}{2} \cdot (0{,}8)^2 \cdot (0{,}2) = 0{,}384$

Logo, a probabilidade de o atleta realizar o salto com mais de 8,5 m, em 2 dos 3 saltos, é 38,4%.

54. **a)** $\binom{8}{5} \cdot (0{,}7)^5 \cdot (1 - 0{,}7)^{8-5} = \binom{8}{5} \cdot (0{,}7)^5 \cdot (0{,}3)^3 \simeq 0{,}2541$

Logo, a probabilidade de o jogador ter acertado 5 arremessos é, aproximadamente, 25,41%.

b) $\binom{8}{0} \cdot (0{,}7)^0 \cdot (1 - 0{,}7)^{8-0} = \binom{8}{0} \cdot (0{,}7)^0 \cdot (0{,}3)^8 \simeq 0{,}00007$

Logo, a probabilidade de o jogador ter errado todos os arremessos é, aproximadamente, 0,007%.

55. $\binom{3}{0} \cdot (0{,}0004)^0 \cdot (1 - 0{,}0004)^{3-0} =$

$= \binom{3}{0} \cdot (0{,}0004)^0 \cdot (0{,}9996)^3 \simeq 0{,}9988$

Logo, a probabilidade de uma com idade entre 20 e 25 ter 3 filhos sem síndrome de Down é aproximadamente 99,88%.

56. O candidato deve acertar, no mínimo, 5 questões de Matemática e 7 de Conhecimentos gerais. E, como a probabilidade de acertar cada uma delas é $\frac{1}{4}$, temos:

• Matemática: $\binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-5} \simeq 0{,}0584$

• Conhecimentos gerais: $\binom{14}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{14-7} \simeq 0{,}028$

$0{,}0584 \cdot 0{,}028 = 0{,}0016$

Logo, a probabilidade é aproximadamente 0,16%.

57. **a)** A probabilidade de o filho ser menino é $\frac{1}{2}$. Logo:

$$\binom{13}{13} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{13-13} = \binom{13}{13} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8\,192}$$

Assim, a probabilidade de essa condição acontecer é $\frac{1}{8\,192}$ ou, aproximadamente, 0,012%.

b) A probabilidade é a mesma, ou seja, é igual. Isso ocorre pois a probabilidade de uma criança nascer com o sexo masculino ou feminino é 50% cada, e os eventos são independentes.

Trabalho e juventudes (página 68)

2. A profissão de cientista de dados pode estar relacionada no campo matemático com o estudo de probabilidades, a fim de antever determinada situação.

Síntese do capítulo (página 75)

3. Sugestão de resposta: Calcular a probabilidade de sucesso de um tratamento médico baseado nas estatísticas de recuperação fornecidas por estudos clínicos e decidir a melhor rota para ir ao trabalho, considerando a probabilidade de trânsito.

4. **a)** Verdadeira.

b) Falsa. Esse evento não inclui os números 1 e 10, logo não tem todos os elementos do espaço amostral.

c) Verdadeira.

5. O conjunto dos números reais é infinito para o intervalo]0, 1[. Portanto, a alternativa **b** é a correta.

6. A questão aborda a fórmula da probabilidade da união de dois eventos A e B, que se refere à probabilidade de ocorrer A ou B em um mesmo espaço amostral. A fórmula correta é: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Essa fórmula subtrai a interseção $P(A \cap B)$, pois ela é contada duas vezes ao somar as probabilidades de A e B. Portanto, a alternativa **a** é a correta.

7. Dois eventos são independentes se a ocorrência de um não afetar a ocorrência do outro.

8. É usada a fórmula $P(Q|M) = \frac{n(Q \cap M)}{n(M)}$, em que Q é o evento "sortear um químico" e M é o evento "sortear uma mulher".

9. Sugestão de resposta: Inicialmente, determina-se a probabilidade de sortear uma bolinha azul na primeira retirada, que é $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Como restam 9 bolinhas na urna, sendo 4 delas azuis, a probabilidade de sortear uma bolinha azul na segunda retirada é $\frac{4}{9}$. Por fim, a probabilidade de ambos os eventos ocorrerem consecutivamente é $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$.

CAPÍTULO 3 ESTATÍSTICA

Questões

A. Sugestão de resposta: Adicionaria os produtos de cada frequência à respectiva quantidade de gols, cujo total é de 47 gols.

B. Seja um conjunto A com n valores iguais, temos:

$$A = \{x, x, x, x, \ldots, x\},\ x \in \mathbb{R}$$

Calculando a média: $\bar{x} = \frac{x + x + x + x + \cdots + x}{\underbrace{n}_{\text{quantidade de elementos do conjunto}}} = \frac{nx}{n} = x.$

Calculando a variância:

Desvios: $x_n - \bar{x} = x - x = 0$ $\qquad V_x = \frac{0}{n} = 0$

Calculando o desvio padrão: $DP_x = \sqrt{V_x} = \sqrt{0} = 0$.

Portanto, o desvio padrão para todo conjunto de n valores iguais é zero.

C. Qualitativa ordinal, pois a variável pode ser ordenada por níveis, dependendo do conhecimento do estagiário, de forma crescente, Básico, Intermediário e Avançado.

D. As notas maiores ou iguais a 43 são: 43, 62, 62, 64, 64, 69, 70, 78, 79, 71, 84, 85, 88, 89, 97, 97, 97, 99, 100, 100, 100, 100, 100, 100. Logo, 24 estudantes obtiveram nota superior ou igual a 43, o que representa aproximadamente 70,6% dos 34 estudantes que fizeram a prova.

E. Empresa **A**: 37 funcionários; empresa **B**: 31 funcionários.

F. Resolução na página **MP092**.

Exercícios e problemas

1. **a)** Pesquisa censitária. **b)** Pesquisa amostral.

2. Quantitativa discreta: Idade (em anos) e quantidade de filhos; quantitativa contínua: massa (em kg) e altura (em cm); qualitativa ordinal: grau de instrução; qualitativa nominal: gênero e estado civil.

4. Quando todo elemento da população P também é elemento da amostra A, ou seja, quando todos os elementos da população são pesquisados.

6. **a)** Amostragem estratificada.

b) Variável qualitativa nominal.

c) Sugestão de resposta: inicialmente, deveria organizar os elementos da população em determinada ordem ou listagem (possibilitando a identificação de cada um deles). Em seguida, escolher os elementos que compõem a amostra conforme um critério ou fator de repetição.

7. **a)** Total de peças produzidas diariamente: $100 \cdot 500 = 50\,000$.

Logo: $\frac{200}{50\,000} = 0{,}004 = 0{,}4\%$. Portanto, é analisada diariamente 0,4% da produção.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

8. **a)** Na tabela **I**, é apresentado o consumo médio diário de água por pessoa no Brasil e nas regiões brasileiras, no ano de 2022. Na tabela **II**, é apresentada a quantidade média de água necessária para produzir alguns produtos.

b) A região com o menor consumo médio de água por habitante no Brasil foi a Nordeste, e a região com maior consumo foi a Sudeste.

c) $203 \cdot 10^6 \cdot 148{,}2 \simeq 3 \cdot 10^{10}$

Portanto, nesse ano, foram consumidos aproximadamente $3 \cdot 10^{10}$ L de água diariamente no Brasil.

d) Multiplicamos cada item da tabela **II** por 2 e analisamos se a quantidade é inferior a 4 000 L. Nesse caso, apenas o milho atende a essa condição, pois:

$$1\,222 \text{ L} \cdot 2 \text{ kg} = 2\,444 \text{ kg/L}$$

e) Como a tabela **II** apresenta a quantidade de água para produzir 1 kg de cada produto, então, a fim de calcular a quantidade de água para produzir 500 g de cada produto da tabela **II**, devemos dividir o resultado por 2. Assim, temos:

$$\frac{9\,980 + 18\,415 + 2\,497 + 4\,325 + 1\,222}{2} = 18\,219{,}5$$

Portanto, são necessários 18 219,5 L de água para produzir a quantidade desejada.

9. **a)** Norte e Nordeste. Sugestão de resposta: A intensificação não foi bem-sucedida, pois, em 2020, não ocorreu um aumento na taxa de doação nessas regiões quando comparada com 2019.

b) Norte, Nordeste e Sul, pois nessas regiões houve uma taxa de doação inferior à taxa de doação brasileira.

10. **a)** O campo "Outro" é referente aos atendimentos interrompidos ou ao dado não ter sido informado nas ligações. De acordo com as informações, conclui-se que esses casos diminuíram de 2022 para 2023, o que pode ser positivo, pois demonstra que mais pessoas estão conseguindo concluir seus atendimentos e informar suas localizações.

b) Houve um aumento de ligações para o Ligue 180 em todas as regiões brasileiras. Consequentemente, esse aumento impactou na quantidade total de ligações recebidas pela central.

12. **a)** Não, pois os dados do gráfico são referentes à produção por pessoa. Para fazer uma comparação quantitativa, é necessário conhecer a quantidade de habitantes de cada região em questão.

b) $\frac{1{,}439 \cdot 16\,707\,336}{1\,000} \simeq 24\,042$

Serão produzidas, aproximadamente, 24 042 toneladas de resíduos de serviços de saúde.

13. **a)** As duas regiões com maiores populações indígenas eram Norte e Nordeste.

b) • Norte: $\frac{753\,357}{1\,693\,535} \simeq 0{,}4448 = 44{,}48\%$.

• Nordeste: $\frac{528\,800}{1\,693\,535} \simeq 0{,}3122 = 31{,}22\%$.

• Centro-Oeste: $\frac{199\,912}{1\,693\,535} \simeq 0{,}1180 = 11{,}80\%$.

• Sudeste: $\frac{123\,369}{1\,693\,535} \simeq 0{,}0728 = 7{,}28\%$.

• Sul: $\frac{88\,097}{1\,693\,535} \simeq 0{,}052 = 5{,}2\%$.

14. **a)** Em todos os estados citados, observa-se um aumento no número total de registros de crimes contra a população LGBTQIA+ em relação aos anos de 2022 e 2023.

b) Goiás: $\frac{31}{28} - 1 \simeq 0{,}107 = 10{,}7\%$; Bahia: $\frac{508}{451} - 1 \simeq 0{,}126 = 12{,}6\%$; Pará: $\frac{113}{74} - 1 \simeq 0{,}527 = 52{,}7\%$; Paraná: $\frac{119}{111} - 1 \simeq 0{,}072 = 7{,}2\%$; e São Paulo: não é possível calcular por ausência de dados no ano de 2022.

c) Não foi possível calcular o aumento percentual para o estado de São Paulo em razão da ausência de dados sobre os registros de crimes contra a população LGBTQIA+ em 2022.

d) A falta de informações completas pode levar a uma subestimação dos números reais de registros de crimes, criando uma visão imprecisa da situação da violência contra a população LGBTQIA+.

e) Com base na pesquisa, espera-se que os estudantes identifiquem como as leis podem influenciar a proteção da população LGBTQIA+ e a prevenção efetiva da violência contra essa população. As pesquisas também podem trazer informações sobre a ausência de uma legislação específica para a homofobia e a transfobia, mas apontar que, desde 2019, o Supremo Tribunal Federal (STF) passou a equiparar esse tipo de discriminação aos crimes de racismo, conforme a Lei de Crimes Raciais nº 7 716/1989. Eles podem também indicar que, em 2023, o STF passou a considerar ofensas contra pessoas LGBTQIA+ como injúria racial. Embora essa equiparação legislativa não abranja todas as particularidades dos crimes, como a homofobia e a transfobia, representa um importante avanço ao oferecer uma base legal para combater essas formas de discriminação, protegendo legalmente os direitos dessa população.

15. **a)** De acordo com a estimativa para novos casos de câncer no Brasil, de 2023 a 2025 as mulheres serão a maioria diagnosticada com cânceres de cólon e reto.

b) $21\,970 + 23\,660 = 45\,630$

c) $\frac{7\,870}{11\,370} \simeq 0{,}692 = 69{,}2\%$

16. • Entre 01/2015 e 01/2016: $281\,720\,211 - 257\,247\,860 = 24\,472\,351$.

• Entre 01/2016 e 01/2017: $257\,247\,860 - 243\,419\,575 = 13\,828\,285$.

• Entre 01/2017 e 01/2018: $243\,419\,575 - 236\,229\,949 = 7\,189\,626$.

• Entre 01/2018 e 01/2019: $236\,229\,949 - 228\,316\,213 = 7\,913\,736$.

• Entre 01/2019 e 01/2020: $228\,316\,213 - 226\,707\,460 = 1\,608\,753$.

• Entre 01/2020 e 01/2021: $226\,707\,460 - 236\,014\,786 = -9\,307\,326$.

• Entre 01/2021 e 01/2022: $236\,014\,786 - 255\,676\,462 = -19\,661\,676$.

• Entre 01/2022 e 01/2023: $255\,676\,462 - 251\,630\,958 = 4\,045\,504$.

Portanto, entre 01/2015 e 01/2016 foi quando houve mais variação.

17. **a)** É possível perceber que, no decorrer dos anos, a quantidade tanto de candidaturas quanto de eleitos indígenas tem aumentado e, nas eleições municipais, as quantidades de candidatos e eleitos indígenas são muito superiores às das eleições gerais.

b) • Eleições gerais (2014 a 2022): $164 - 74 = 90$, aumento de 90 candidaturas, logo: $\frac{90}{74} \simeq 121{,}62\%$.

• Eleições municipais (2016 a 2020): $2\,069 - 1\,554 = 515$, aumento de 515 candidaturas indígenas, logo: $\frac{515}{1\,554} \simeq 33{,}14\%$.

18. **a)** • Estados Unidos: $464\,814 - 159\,468 = 305\,346$.

• Brasil: $319\,653 - 77\,203 = 242\,450$.

• Índia: $298\,145 - 26\,278 = 271\,867$.

Portanto, a diferença entre os novos casos foram Estados Unidos da América: 305 346; Brasil: 242 450; Índia: 271 867.

19. A representação gráfica referente a essa tarefa está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

20. **a)** As cestas de 2 pontos correspondem a 60% das cestas convertidas pelo time.

b) • Cestas de 3 pontos: $0{,}25 \cdot 40 = 10$.

• Cestas de 2 pontos: $0{,}60 \cdot 40 = 24$.

• Cestas de 1 ponto: $0{,}15 \cdot 40 = 6$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Indicando por T o total de pontos convertidos, temos:

$$T = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 24 + 1 \cdot 6 \Rightarrow T = 84$$

21. Em uma planilha eletrônica, preencha as células com os dados da tabela. Em seguida, selecione os dados, clique em **Inserir**, selecione **Gráfico...** e, na janela **Assistente de gráficos**, selecione a opção ***Pizza***. Por fim, inserimos a fonte de pesquisa, que é Catálogo da instituição.

A representação gráfica referente a essa tarefa está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

22. **a)** 15 a 19 anos: 542 861 indivíduos; 35 a 39 anos: 549 298 indivíduos.

b) 0 a 4 anos: masculino; 60 a 64: feminino.

23. **a)** 2021

b) Não. Espera-se que os estudantes respondam que entre os anos de 2021 e 2022 a área desmatada foi decrescente.

c) Área desmatada: $\frac{13\,038 - 11\,594}{13\,038} \simeq 11{,}07\%$.

24. **a)** $203\,000\,000 \cdot 0{,}059 = 11\,977\,000$. Portanto, 11 977 000 pessoas estavam em situação de extrema pobreza no Brasil em 2022.

b) • Mulheres pretas ou pardas: 38%.
• Homens pretos ou pardos: 35%.
• Mulheres brancas: 14%.
• Homens brancos: 12%.
• Outros: 1%.

25. **a)** Não, pois diferentes tipos de pessoa frequentam diferentes tipos de supermercado. A amostra daria unicamente indicações sobre a população constituída pelos clientes desse supermercado.

b) Sim, as porcentagens somam mais do que 100%. Nesse caso, a amostra usada não é representativa e a área do setor correspondente a 55% é maior do que a do setor correspondente a 60%.

26. **a)** No 1º trimestre: MatSong vendeu 534 guitarras; o Concorrente **A** vendeu 545 guitarras; e o Concorrente **B**, 500 guitarras.

Portanto, o Concorrente **A** vendeu a maior quantidade de guitarras no 1º trimestre.

No 3º trimestre, MatSong vendeu 8 guitarras $(740 - 732 = 8)$, o Concorrente **A** vendeu 120 guitarras, e o Concorrente **B**, 210 guitarras.

Portanto, o Concorrente **B** vendeu a maior quantidade de guitarras no 3º trimestre.

c) MatSong: 800 guitarras.

Concorrente **A**: $545 + 200 + 120 + 340 = 1\,205$.

Concorrente **B**: $500 + 160 + 210 + 250 = 1\,120$.

Portanto, o Concorrente **A** vendeu mais guitarras em 2020.

27. Não, pois foram analisadas apenas as empresas que tiveram os maiores volumes de exportação no último ano, o que, geralmente, não representa a situação financeira de todas as empresas de um estado.

28. Não. Espera-se que os estudantes respondam que o eixo "Quantidade (%)" está invertido.

29. **b)** • Marca **B**: 19%.
• Marca **D**, **E** e **F**: $11\% + 11\% + 8\% = 30\%$.

Portanto, as marcas **D**, **E** e **F** juntas venderam mais que a marca **B**.

30. **a)** Média aritmética: $\bar{x} = \frac{2 \cdot 3 + 5 + 7 + 8 + 11 + 12 + 15}{8} = 8$

O número com maior frequência no conjunto é o 3, portanto a moda é 3.

As posições centrais são: $\frac{n}{2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \frac{n}{2} + 1 = \frac{8}{2} + 1 = 5$.

Organizando os dados em ordem crescente, temos que a 4ª e a 5ª posição correspondem aos números 7 e 8, respectivamente.

Mediana: $Md = \frac{7 + 8}{2} = 7{,}5$.

b) Média aritmética: Como a soma do conjunto de valores é -138 e temos ao todo 15 valores, calculamos:

$$\bar{x} = \frac{-138}{15} = -9{,}2$$

Os números com maiores frequências no conjunto são o -7 e o -6. Logo, as modas são: -7 e -6.

A posição central é: $\frac{15 + 1}{2} = 8$.

Organizando os dados em ordem crescente, temos que a mediana corresponde à 8ª posição. Portanto, a mediana é -7.

c) Média aritmética: Como a soma do conjunto de valores é 0 e temos ao todo 13 valores, calculamos: $\bar{x} = \frac{0}{13} = 0$.

O número com maior frequência no conjunto é o -1. Portanto, a moda é -1.

A posição central é: $\frac{13 + 1}{2} = 7$.

Organizando os dados em ordem crescente, verificamos que a mediana corresponde à 7ª posição. Então, a mediana é 0.

31. Indicando em rol as alturas dos prédios, temos:
599; 601; 632; 679; 828

a) Média aritmética: $\bar{x} = \frac{599 + 601 + 632 + 679 + 828}{5} = 667{,}8$

Não há uma medida com maior frequência, portanto o conjunto é amodal.

Posição central: $\frac{5 + 1}{2} = 3$.

A média é 667,8 m, o conjunto de dados é amodal e a mediana é 632 m.

b) Desconsiderando o Burj Khalifa, determinamos a média aritmética, assim:

$$\bar{x} = \frac{599 + 601 + 632 + 679}{4} = 627{,}75$$

Se o prédio com maior altura for desconsiderado do rol, a média das alturas dos prédios será 627,75 m.

32. Indicando a idade de Felipe por x, a idade do filho de Felipe por $\frac{1}{2}x$ e a idade do pai de Felipe por $2x$, temos:

$$\frac{x + \frac{x}{2} + 2x}{3} = 49 \Rightarrow x = 42$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{42}{2} = 21 \Rightarrow 2x = 2 \cdot 42 = 84$$

A idade de Felipe é 42 anos; a de seu filho, 21 anos; e a de seu pai, 84 anos.

33. A média ponderada das notas das provas **A** e **B** deve ser maior ou igual a 7. Então:

$$7 \leq \frac{7 \cdot 6{,}5 + 5 \cdot x}{12} \Rightarrow 38{,}5 \leq 5x \Rightarrow x \geq 7{,}7$$

Portanto, Carlos precisa obter na prova **B** nota igual ou superior a 7,7.

34. **a)** $\bar{x} = \frac{5{,}2 + 6{,}3 + 9}{3} = \frac{20{,}5}{3} \Rightarrow \bar{x} \simeq 6{,}83$

Portanto, Amanda não será aprovada, pois sua média seria aproximadamente 6,83.

b) $7 \leq \frac{6{,}5 + 7{,}2 + x}{3} \Rightarrow x \geq 7{,}3$

Portanto, Pedro deve obter, no mínimo, 7,3 na prova prática.

c) $\bar{x} = \frac{7{,}8 + 8{,}3 + 5}{3} = \frac{21{,}1}{3} \Rightarrow \bar{x} \simeq 7{,}03$

Portanto, se Fátima não for eliminada na prova prática, ela será aprovada, pois sua média final será aproximadamente 7,03, isto é, acima de 7.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

35. $\bar{x} = \frac{24 \cdot 77 + 30 \cdot 59 + 26 \cdot 67}{24 + 26 + 30} = \frac{5\,360}{80} = 67$

36. Indicando as notas em rol:
12,133; 13,000; 13,166; 13,600; 13,666; 13,700; 13,766; 14,133; 14,166

Posição central: $\frac{9+1}{2} = 5$.

Assim, a mediana corresponde à 5ª posição. Logo, a alternativa **b** é a correta.

37. **a)** $\bar{x} = \frac{31 + 35 + 52 + 38}{13 + 8 + 17 + 14} = \frac{156}{52} = 3$

Portanto, cada vídeo tem tempo médio de 3 minutos.

b) Espera-se que os estudantes respondam que não, pois não é dado o tempo de cada vídeo para organizá-los em um rol e analisar esses dados.

38. Organizando as notas em rol, temos: 3; 3,4; 5; 6,8; 7; 7,5; 7,8; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8,5; 9; 9; 9; 9; 9,5; 10; 10; 10; 10; 10; 10.

a) Média aritmética: Como a soma do conjunto de valores é 202,5 e temos ao todo 25 valores, calculamos: $\bar{x} = \frac{202,5}{25} = 8,1$.

O conjunto é bimodal, com 8 e 10.

Posição central: $\frac{25+1}{2} = 13$.

Logo, é a 13ª posição. Portanto, a mediana é 8.

Dessa maneira, a média é 8,1, o que significa que a nota média dos estudantes é 8,1 pontos; a moda é 8 e 10, ou seja, as notas que mais estudantes obtiveram foram 8 e 10; e a mediana é 8. Assim, a nota mediana dos 25 estudantes é 8.

40. Indicando o conjunto de dados, de acordo com os dados do problema, temos:

$$102;\ \underbrace{__;__}_{102,\ 103\ \text{ou}\ 104};104;__;__;__$$

Os números que estão entre 102 e 104 podem ser 102, 103 ou 104, o que nos leva a concluir que haverá repetição, ou seja, algum deles deverá aparecer ao menos duas vezes. Como foi dada a informação de que 107 é a única moda, logo esse número deverá aparecer 3 vezes, ou seja, os três últimos termos do conjunto são iguais a 107.

a) Verdadeira. Como os três últimos termos do conjunto são iguais a 107, logo é o maior número do conjunto.

b) Falso. Caso 105 fizesse parte do conjunto de dados, estaria posicionado depois do 104, o que não pode ocorrer, já que os três últimos termos do conjunto são iguais a 107.

c) Falso, pois o maior número é 107.

d) Falso. Não é possível afirmar que 103 é o segundo maior número do conjunto, tendo em vista que 102 pode aparecer mais uma vez.

e) Falso. Não é possível afirmar o valor da média, visto que não se conhece o segundo e o terceiro termo do conjunto.

Portanto, a alternativa **a** é a correta.

41. Resolução na página **MP092**.

42. Uma possível resposta: $a = 15$, $b = 8$, $c = 7$, $d = 6$, $e = 5$, $f = 4$, $g = 3$, $h = 2$, $i = 1$, pois, calculando a média por meio dessa sugestão de resposta, temos:

$$\bar{x} = \frac{15 \cdot 20 + 8 \cdot 22 + \cdots + 2 \cdot 48 + 1 \cdot 55}{51} \simeq 25,88$$

Para esses pesos, a média é aproximadamente 25,88, que é menor do que 26.

43. A soma das estaturas corresponde a $15 \cdot 1,93 = 28,95$.

A soma das estaturas dos quatro jogadores que serão substituídos corresponde a $1,78 + 1,82 + 1,84 + 1,86 = 7,3$. Após as substituições, a soma das estaturas passará a ser de $28,95 - 7,3 = 21,65$.

Após a contratação de um jogador de estatura 2,02 m, a soma das estaturas passará a ser de $21,65 + 2,02 = 23,67$.

Como a estatura média desejada é de no mínimo 1,99, sua soma será de $15 \cdot 1,99 = 29,85$. Assim, considerando a soma atual, que é de 23,67, para atingir a soma desejada, serão necessários: $29,85 - 23,67 = 6,18$.

Ou seja, 6,18 m de estatura.

Considerando que serão contratados três novos jogadores, a estatura média desse grupo será de, no mínimo, $\frac{6,18}{3} = 2,06$.

A estatura média, em metro, dos três novos jogadores será de no mínimo 2,06 m. Logo, a alternativa **d** é a correta.

44. Organizando os elementos em rol, temos:
0, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10

a) $Q_2 = \frac{5+5}{2} \Rightarrow Q_2 = 5$

b) $8 \cdot \frac{24}{10} \simeq 19$. Como o oitavo decil ocupa a 19ª posição, então D_8 é igual a 8.

c) Determinando a mediana da primeira metade dos elementos do conjunto dos dados, temos: $Q_1 = \frac{2+3}{2} \Rightarrow Q_1 = 2,5$.

d) $5 \cdot \frac{24}{10} = 12$. Como o quinto decil ocupa a 12ª posição, então D_5 é igual a 5.

e) $2 \cdot \frac{24}{10} \simeq 5$. Como o segundo decil ocupa a 5ª posição, então D_2 é igual a 1.

f) Determinando a mediana da segunda metade dos elementos do conjunto dos dados, temos: $Q_3 = \frac{8+8}{2} \Rightarrow Q_3 = 8$.

45. **a)** $3 \cdot \frac{20}{10} = 6$ Como o terceiro decil ocupa a 6ª posição, então D_3 é igual a 101,23.

b) Uma possível resposta: 30% dos pilotos fizeram sua volta mais rápida em 101,23 s ou menos.

46. Organizando os elementos em rol, temos:
1,5; 1,7; 3,2; 3,2; 4,3; 5,0; 5,2; 5,9; 6,0; 6,2; 6,3; 6,5; 6,5; 6,6; 6,7; 7,1; 7,3; 7,3; 7,5; 7,8; 7,8; 8,0; 8,0; 8,2; 8,2; 8,3; 8,8; 9,5; 9,8; 10,0

a) Falsa. Como a nota 5 está na 6ª posição das notas organizadas em rol, apenas 20% dos estudantes tiraram 5 ou menos no simulado. Logo, ao analisarmos a 12ª posição (40% das 30 notas), temos que 12 estudantes obtiveram uma nota menor ou igual a 6,5.

Portanto, estaria correto se a afirmativa fosse: "Aproximadamente 40% dos estudantes obtiveram uma nota menor ou igual a 6,5.".

b) Verdadeira.

c) Falsa. Ao calcularmos a posição do 9º decil, temos: $9 \cdot \frac{30}{10} = 27$.

Logo, o 9º decil ocupa a 27ª posição, ou seja, $D_9 = 8,8$. Sabemos que a nota 8 está na 22ª e na 23ª posição. Determinando o decil que ocupa essas posições, temos:

$x \cdot \frac{30}{10} = 22 \Rightarrow x \simeq 7$ $\qquad$ $x \cdot \frac{30}{10} = 23 \Rightarrow x \simeq 8$

Os decis que ocupam a 22ª e a 23ª posição são o sétimo e o oitavo, respectivamente. Portanto, estaria correto se a alternativa fosse: "Um estudante que obteve a nota 8 está no 7º decil." ou "Um estudante que obteve a nota 8 está no 8º decil.".

d) Verdadeira.

47. **a)** Quantidade aproximada de pessoas que votaram nessa seção: $352 \cdot 0,78 \simeq 275$.

A soma da quantidade de eleitores de 18 a 35 anos é igual a 254. Logo, aproximadamente 78% das pessoas que votaram nessa seção têm menos de 39 anos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) Resolução na página **MP092**.

49. Resolução na página **MP092**.

50. **a)** 1ª semana: $\frac{6{,}71 - 6{,}67}{6{,}67} \cdot 100 \simeq 0{,}60$.

2ª semana: $\frac{6{,}74 - 6{,}70}{6{,}70} \cdot 100 \simeq 0{,}60$.

Na 1ª semana, a variação foi aproximadamente 0,60%; na 2ª semana, aproximadamente 0,60%.

b) 1ª semana: $\bar{x} = \frac{6{,}67 + 6{,}68 + \ldots + 6{,}70 + 6{,}69}{6} = 6{,}69$.

2ª semana: $\bar{x} = \frac{6{,}70 + 6{,}73 + \ldots + 6{,}73 + 6{,}71}{6} = 6{,}72$.

Portanto, o preço médio da gasolina na 1ª semana foi R$ 6,69; na 2ª semana, R$ 6,72.

c) Na 1ª semana:

$Dm = \frac{|6{,}67 - 6{,}69| + \ldots + |6{,}69 - 6{,}69|}{6} = 0{,}01$

$V = \frac{(6{,}67 - 6{,}69)^2 + \ldots + (6{,}69 - 6{,}69)^2}{6} \simeq 0{,}00016$

$Dp \simeq \sqrt{0{,}00016} \simeq 0{,}013$

Na 2ª semana:

$Dm = \frac{|6{,}70 - 6{,}72| + \ldots + |6{,}71 - 6{,}72|}{6} \simeq 0{,}013$

$V = \frac{(6{,}70 - 6{,}72)^2 + \ldots + (6{,}71 - 6{,}72)^2}{6} = 0{,}0002$

$Dp = \sqrt{0{,}0002} \simeq 0{,}014$

51. Organizando os dados da tabela em rol, temos:
14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 18, 18, 18, 18, 19, 19, 20, 20, 21, 25, 25, 28, 28, 28, 29, 30

a) $A = 30 - 14 = 16$. Logo, a amplitude é 16 anos.

b) $A = 42 - 14 = 28$. Logo, a amplitude será 28 anos.

c) A alteração do valor máximo do conjunto de valores altera muito a amplitude.

52. $\bar{x} = \frac{54 + 68 + 61}{3} = 61$

$Dp = \sqrt{\frac{(54 - 61)^2 + (68 - 61)^2 + (61 - 61)^2}{3}} \simeq 5{,}72$

A candidata não foi aprovada, pois, apesar de sua média ser superior a 60 pontos, o desvio padrão foi superior a 5 pontos.

53. **a)** $\bar{x}_A = \frac{870 + 848 + 855 + 845 + 852}{5} = 854$

$\bar{x}_B = \frac{866 + 850 + 847 + 845 + 847}{5} = 851$

$\bar{x}_C = \frac{867 + 851 + 843 + 849 + 855}{5} = 853$

Logo, o tempo médio do piloto **A** foi 854 s; do piloto **B**, 851 s; e do piloto **C**, 853 s. Portanto, o piloto **A** obteve o pior tempo médio.

b) Resolução na página **MP093**.

55. **a)** Pontuação da equipe **A** em rol: 88, 93, 98, 98, 100, 105, 112, 115.

$A = 115 - 88 = 27$

$\bar{x} = \frac{88 + \ldots + 115}{8} = 101{,}125$

$V = \frac{(88 - 101{,}125)^2 + \ldots + (115 - 101{,}125)^2}{6} \simeq 73{,}1$

$Dp \simeq \sqrt{73{,}11} \simeq 8{,}6$

Pontuação da equipe **B** em rol: 90, 90, 92, 100, 104, 109, 118, 123.

$A = 123 - 90 = 33$

$\bar{x} = \frac{90 + 90 + \cdots + 118 + 123}{8} = 103{,}25$

$V = \frac{(90 - 103{,}25)^2 + \ldots + (123 - 103{,}25)^2}{8} \simeq 141{,}2$

$Dp \simeq \sqrt{141{,}2} \simeq 11{,}9$

b) As pontuações obtidas nas oito primeiras partidas pela equipe **A** são menos variáveis do que as obtidas pela equipe **B**.

56. **a)** $\bar{x} = \frac{30 \cdot 1720 + \ldots + 2 \cdot 5\,000}{70} = 2\,360$

A média dos salários dessa fábrica é R$ 2 360,00.

b) $Dp = \sqrt{\frac{30 \cdot (1720 - 2\,360)^2 + \ldots + 2 \cdot (5\,000 - 2\,360)^2}{70}} \simeq 773{,}12$

O desvio padrão dos salários dessa fábrica é aproximadamente R$ 773,12.

c) Espera-se que os estudantes respondam que, como o desvio padrão não está próximo de zero, os valores estão afastados da média, ou seja, não há uma regularidade na distribuição salarial dessa empresa.

58. **a)** Falso. As medidas de dispersão indicam a distribuição dos valores do conjunto em torno da média.

b) Falso. A amplitude considera apenas os valores extremos.

c) Verdadeiro.

d) Falso. O desvio médio absoluto considera os valores absolutos dos desvios de cada valor em relação à média, ou seja, apenas o sinal positivo.

Portanto, a alternativa **c** é a correta.

59. **a)** A soma das notas é: $25 \cdot 4 = 100$.

Ao adicionar um ponto a cada nota, o somatório das notas passará a ser: $25 + 100 = 125$.

Recalculando a média: $\bar{x} = \frac{125}{25} = 5$.

Logo, a média passou a ser 5.

b) $Dp = \sqrt{V} \Rightarrow V = Dp^2$

Como $Dp = 3$, então $V = 3^2 = 9$.

Logo, a variância é 9.

c) Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{25}$ as notas iniciais dos estudantes. O desvio de cada valor será:

$|x_1 - 4|, |x_2 - 4|, |x_3 - 4|, \ldots, |x_{25} - 4|$.

Após adicionar um ponto, as notas dos estudantes assumiram os seguintes valores:

$x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 + 1, \ldots, x_{25} + 1$.

Calculando os desvios médios, considerando a média obtida na letra **a**, temos:

$|x_1 + 1 - 5| = |x_1 - 4|$

$|x_2 + 1 - 5| = |x_2 - 4|$

$|x_3 + 1 - 5| = |x_3 - 4|$

$\vdots$

$|x_{25} + 1 - 5| = |x_{25} - 4|$

Note que os desvios não foram afetados pela nova média. Assim, a variância não será afetada e, por consequência, o desvio padrão também não.

Logo, o desvio padrão é 3.

60. A tabela de frequência referente a essa tarefa está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

61. **a)** $4 + 5 + 12 + 11 + 6 + 2 = 40$. Logo, esse condomínio tem 40 apartamentos. De acordo com o gráfico, 6 deles têm exatamente 4 moradores.

b) A tabela de frequência referente a esse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

c) Dos 40 apartamentos, 21 têm 2 moradores ou menos. Então, determinando a porcentagem que essa quantidade representa, temos: $\frac{21}{40} \cdot 100 = 52{,}5$.

Portanto, 52,5% dos apartamentos têm 2 moradores ou menos.

62. a) A tabela de frequência referente a esse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

b) A quantidade de estudantes entre 14 e 17 anos nesse grupo de estudos é 32 estudantes, e 6,25% deles dormem as 10 horas recomendadas.

63. a) $6 + 18 = 24$. Portanto, 24 pacientes têm níveis de triglicérides iguais ou superiores a 70 mg/dL e inferiores a 170 mg/dL.

b) $20\% + 25\% = 45\%$

Portanto, 45% dos pacientes têm níveis de triglicérides iguais ou superiores a 220 mg/dL.

c) O tratamento é recomendado para pessoas com níveis de triglicérides superiores a 150 mg/dL, então pode ser recomendado a 43 pacientes.

64. a) 20 atletas treinam nessa equipe.

b) A maior quantidade de atletas está concentrada no intervalo $1{,}8 \vdash 1{,}9$.

c) Três atletas têm altura igual ou superior a 2 m.

d) 55% dos atletas têm altura inferior a 1,9 m.

e) Não, pois não conhecemos a altura de nenhum deles; sabemos apenas que existem 7 atletas com alturas entre 1,8 m e 1,9 m.

f) A representação gráfica referente a esse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

65. $12\,330 + 9\,456 + 10\,234 = 32\,020$

Portanto, 32 020 pessoas pagaram menos de R$ 325,60.

67. a) $6 + 18 + 47 + 21 + 8 = 100$.

A amostra é composta de 100 plantas.

b) Inicialmente, obtemos o valor médio de cada intervalo:

- $3 \vdash 5$: $\bar{x} = \frac{3+5}{2} = 4$
- $5 \vdash 7$: $\bar{x} = \frac{5+7}{2} = 6$
- $7 \vdash 9$: $\bar{x} = \frac{7+9}{2} = 8$
- $9 \vdash 11$: $\bar{x} = \frac{9+11}{2} = 10$
- $11 \vdash 13$: $\bar{x} = \frac{11+13}{2} = 12$

Calculando a média dos comprimentos das amostras, temos:

$$\bar{x} = \frac{6 \cdot 4 + \ldots + 8 \cdot 12}{100} = 8{,}14$$

A amostra que mais se repete é a com 8 cm, logo a moda é 8 cm.

A mediana corresponde à média do 50º e do 51º elemento, ambos dentro do valor médio 8 cm, então: $Md = \frac{8+8}{2} = 8$. Portanto, a média é 8,14 cm, a moda é 8 cm e a mediana, 8 cm.

c) Não se pode afirmar uma quantidade exata, mas sabemos que é entre 29% e 76%.

68. a) Inicialmente, obtemos o valor médio de cada intervalo:

- $50 \vdash 60$: $\bar{x} = \frac{50+60}{2} = 55$
- $60 \vdash 70$: $\bar{x} = \frac{60+70}{2} = 65$
- $70 \vdash 80$: $\bar{x} = \frac{70+80}{2} = 75$
- $80 \vdash 90$: $\bar{x} = \frac{80+90}{2} = 85$
- $90 \vdash 100$: $\bar{x} = \frac{90+100}{2} = 95$

Calculando a média das velocidades registradas, temos:

$$\bar{x} = \frac{55 \cdot 3 + \ldots + 105 \cdot 3}{50} = 82$$

Portanto, a média das velocidades registradas é 82 km/h.

b) A média da velocidade ficou acima do limite do trecho.

69. Inicialmente, obtemos o valor médio de cada intervalo:

- $0 \vdash 1$: $\bar{x} = \frac{0+1}{2} = 0{,}5$
- $1 \vdash 2$: $\bar{x} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$
- $2 \vdash 3$: $\bar{x} = \frac{2+5}{2} = 2{,}5$
- $3 \vdash 4$: $\bar{x} = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$
- $4 \vdash 5$: $\bar{x} = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$
- $5 \vdash 6$: $\bar{x} = \frac{5+6}{2} = 5{,}5$
- $6 \vdash 7$: $\bar{x} = \frac{6+7}{2} = 6{,}5$
- $7 \vdash 8$: $\bar{x} = \frac{7+8}{2} = 7{,}5$
- $8 \vdash 9$: $\bar{x} = \frac{8+9}{2} = 8{,}5$
- $9 \vdash 10$: $\bar{x} = \frac{9+10}{2} = 9{,}5$

Calculando a média das notas obtidas por essa turma, temos:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 1{,}5 + \ldots + 7 \cdot 8{,}5 + 0 \cdot 9{,}5}{40} \simeq 6{,}08$$

70. Sugestões de resposta: Dois funcionários levam 5 minutos para ir de suas casas ao trabalho; aproximadamente 40% dos funcionários levam 25 minutos para ir de suas casas ao trabalho; o funcionário que leva mais tempo demora 45 minutos.

71. a) Nesse município, há 15 produtores.

b) 1º semestre de 2024:

$8 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 21 + 29 + 50 + 2 \cdot 52 + 2 \cdot 57 + 2 \cdot 91 = 577$

1º semestre de 2025:

$5 \cdot 37 + 39 + 6 \cdot 70 + 2 \cdot 112 + 115 = 983$

Logo, no ano de 2025, foi vendida a maior quantidade de arroz.

c) 1º semestre de 2024: $\bar{x} = \frac{3 + 3 + \ldots + 91 + 91}{15} = 38{,}5$

Cada produtor vendeu, em média, aproximadamente 38,5 toneladas no 1º semestre de 2024.

1º semestre de 2025: $\bar{x} = \frac{37 + 37 + \ldots + 112 + 115}{15} = 65{,}5$

Portanto, cada produtor vendeu, em média, aproximadamente 65,5 toneladas no 1º semestre de 2025.

72. A quantidade mediana de acertos da turma **A** foi 11; da turma **B** foi 9; da turma **C**, 10; da turma **D**, 11.

73. b) Construindo o diagrama de ramo-e-folhas, temos:

Tempo, em minutos, dedicado diariamente aos estudos, em 2025

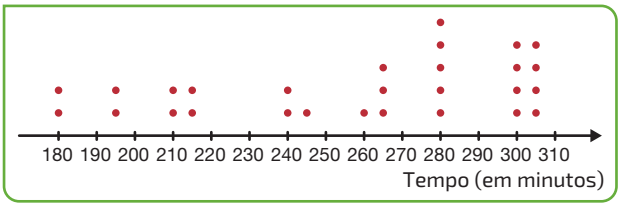
18	0 0
19	5 5
20	
21	0 0 5 5
22	
23	
24	0 0 5
25	
26	0 5 5 5
27	
28	0 0 0 0 0
29	
30	0 0 0 0 5 5 5 5 5

Legenda:
21|0 é igual a 210 minutos.
30|5 é igual a 305 minutos.

Fonte de pesquisa: Registros de João.

Construindo o diagrama de pontos:

Tempo, em minutos, dedicado diariamente aos estudos, em 2025



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

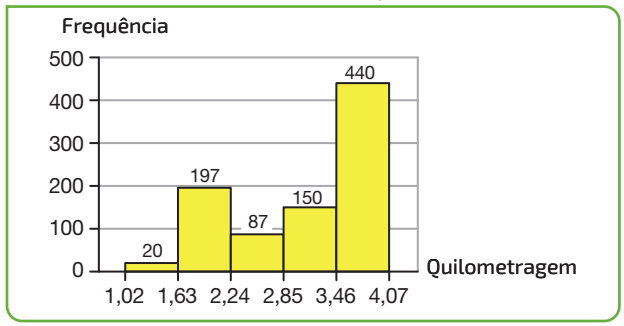
Fonte de pesquisa: Registros de João.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

c) Não, pois, dos 28 estudantes, apenas 13 estudam mais do que 4 h 30 min, ou 270 min, ou seja, menos da metade.

74. **b)** Construindo um histograma, temos:

Quilometragem média por litro de óleo *diesel* dos ônibus de certo município, em março de 2025

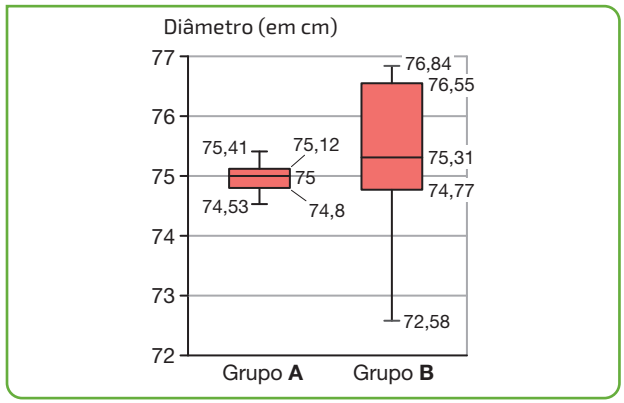


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: Registros da prefeitura do município.

75. **b)** Construindo um *box-plot*, temos:

Diâmetro, em centímetros, das peças produzidas pelo grupo A e pelo grupo B no dia 10 de agosto de 2025



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: Registros da empresa.

76. **a)** Indicando por A o evento de um domicílio ter água canalizada em 2017, temos: $P(A) = \frac{66\,097}{68\,018} \simeq 0{,}972$.

A probabilidade de um domicílio no Brasil ter água canalizada em 2017 é aproximadamente 97,2%.

b) Indicando por B o evento de um domicílio não ter água canalizada em 2022, temos: $P(\overline{B}) = 1 - \frac{72\,732}{74\,145} \simeq 0{,}019$.

A probabilidade de um domicílio no Brasil não ter água canalizada em 2022 é aproximadamente 1,9%.

c) O ano em que havia a maior chance de ser escolhido um domicílio aleatoriamente com água canalizada é 2022.

77. $P = \frac{27}{90} = 0{,}3$

A chance de selecionar um professor nessa idade é 0,3 ou 30%.

78. Total de sorteios realizados: 427 + 902 + 271 = 1600.

- Branca: $\frac{427}{1600} \cdot 100 \simeq 26{,}69$.
- Preta: $\frac{902}{1600} \cdot 100 \simeq 56{,}37$.
- Vermelha: $\frac{271}{1600} \cdot 100 \simeq 16{,}94$.

Determinando a quantidade de bolinhas de cada cor, temos:

- Branca: $30 \cdot 0{,}2669 \simeq 8$.
- Preta: $30 \cdot 0{,}5637 \simeq 17$.
- Vermelha: $30 \cdot 0{,}1694 \simeq 5$.

Assim, a estimativa é que essa urna contenha 8 bolinhas brancas, 17 bolinhas pretas e 5 bolinhas vermelhas.

79. Sim. Espera-se que os estudantes digam que a probabilidade de obter cada face deveria ser próxima da probabilidade teórica, que é $\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$, ou seja, $16,\overline{6}\%$. Há uma tendência maior de saírem as faces de números 2 e 5. Podemos demonstrar isso indicando por A e B, respectivamente, o evento de ocorrer a face de número 2 e o evento de ocorrer a face de número 5.

$$P(A) = \frac{225}{113 + 225 + 105 + 120 + 202 + 135} = 0{,}25$$

$$P(B) = \frac{202}{113 + 225 + 105 + 120 + 202 + 135} = 0{,}22\overline{4}$$

Nesse caso, a probabilidade de ocorrer as faces de números 2 e 5 são, respectivamente, 25% e $22,\overline{4}\%$. Portanto, pode-se suspeitar desse dado.

80. Sugestões de resposta: Abertura de um negócio; destino de uma viagem considerando a possibilidade de chuva.

Acessando tecnologias (páginas 86 e 87)

1. Inicialmente, preencha as células com os dados da tabela. Em seguida, selecione os dados, clique em **Inserir**, selecione **Gráfico...** e, na janela **Assistente de gráficos**, selecione a opção **Coluna**, obtendo um gráfico de barras verticais. Por fim, insira a fonte de pesquisa. De maneira semelhante, porém selecionado a opção ***Pizza*** na janela **Assistente de gráficos**, obtém-se um gráfico de setores.

As representações gráficas referentes a essa tarefa estão apresentadas na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

O gráfico mais adequado para representar essas informações é o gráfico de barras verticais, pois ele possibilita uma noção visual imediata sobre a proporção entre as altitudes dos picos, permitindo uma rápida comparação. O gráfico de setores não é adequado, nesse caso, porque não se trata de comparar as partes de um mesmo todo.

Desenvolvimento sustentável (páginas 88 e 89)

1. Acre, Rondônia, Amazonas, Roraima, Mato Grosso, Pará, Amapá, Tocantins e Maranhão.

2. Sugestão de resposta: Perda da biodiversidade, alterações nos recursos hídricos da região e mudanças climáticas causadas pelo aumento do aquecimento global, em razão da redução das árvores, causando acúmulo de CO_2 na atmosfera.

4. 2012: 4 571 km^2 e em 2022: 11 594 km^2.

Educação midiática (página 103)

2. Conteúdo fabricado, manipulação de conteúdos e conteúdo impostor sempre serão *fake news*, pois são conteúdos criados ou manipulados com a intenção de enganar. Conteúdo enganoso, falso contexto ou falsa conexão podem ser *fake news*, mas geralmente são baseados em conteúdos reais que podem ser compartilhados de maneira enganosa não intencional ou com interesses mercadológicos, sem necessariamente ter a intenção de prejudicar alguém. Sátira é um conteúdo de entretenimento e humor, sem a intenção de prejudicar, portanto não é considerada *fake news*.

Desenvolvimento sustentável (páginas 138 e 139)

2. Como ambos os grupos tomam a pílula anticoncepcional, então estima-se que o grupo que usou camisinha masculina como segunda medida preventiva teve uma redução de 97% nos casos de gravidez não planejada se comparado ao primeiro grupo.

Síntese do capítulo (página 141)

3. **a)** Salário – variável quantitativa contínua, pois admite valores no conjunto dos números reais positivos; tipo sanguíneo – variável qualitativa nominal, pois não há hierarquia entre os diferentes grupos sanguíneos.

b) Classe social – variável qualitativa ordinal, pois as classes sociais são hierarquizadas segundo alguns critérios;

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

quantidade de filhos – variável quantitativa discreta, pois é resultante de uma contagem.

c) Grau de instrução – variável qualitativa ordinal, pois a instrução formal segue uma hierarquia; idade em anos – variável quantitativa discreta, pois é resultante de uma contagem.

d) IDH – variável quantitativa contínua, pois admite valores no conjunto dos números reais positivos; nacionalidade – variável qualitativa nominal, pois não há hierarquia entre as diferentes nacionalidades.

4. O título sintetiza o conteúdo representado e a fonte de pesquisa identifica a origem dos dados.

5. **a)** Sugestão inadequada. O gráfico sugerido é utilizado para comparar partes de um conjunto de dados com o todo, que não é o caso. O gráfico adequado é o de linhas.

b) Sugestão adequada. Esse tipo de gráfico é utilizado para comparar dados entre si. Nesse caso, ele possibilita comparar as taxas de analfabetismo entre as grandes regiões.

c) Sugestão inadequada. Esse tipo de gráfico é utilizado para representar uma população com distribuição disposta em faixa etária. O gráfico adequado para representar essa variável é o de barras, em se tratando de uma pesquisa em particular. Quando se deseja comparar a evolução temporal das intenções de voto dos candidatos, o gráfico de linhas é o mais adequado.

d) Sugestão adequada. Esse tipo de gráfico costuma ser utilizado quando se deseja fazer uso de recursos visuais em sua apresentação. Nesse caso, seria adequado utilizar, por exemplo, a figura de uma motocicleta para representar certa unidade de vendas mensal.

6. **a)** Como há 20 valores, a mediana é dada pela média dos termos, ou seja, $\frac{n}{2} = \frac{20}{2} = 10$ e $\frac{n}{2} + 1 = 10 + 1 = 11$. Ordenando os valores, há 8 termos iguais a 1 e 5 termos iguais a 2. Portanto, os termos nas posições 10 e 11 são iguais a 2. Logo, a mediana é 2.

b) Não é possível obter a média aritmética, pois não sabemos a quantidade de salários mínimos de dois funcionários.

7. Sabendo que $Dp = \sqrt{V}$, temos que $V = Dp^2$. Assim, no 3º **A**, $V = 9{,}1^2 = 82{,}81$, e no 3º **B**, $V = 3^2 = 9$. Com isso, podemos concluir, por exemplo, que, em relação às respectivas médias, as notas do 3º **A** são mais dispersas do que as notas do 3º **B**.

8. Sugestão de resposta: Ponto positivo – possibilita agrupar grande quantidade de dados sem perder a forma de distribuição desses dados; ponto negativo – perdem-se os valores exatos dos dados, uma vez que eles são agrupados em intervalos.

9. No ano 2000, temos que a população feminina brasileira representa 50,8% da população total do Brasil. Portanto, a probabilidade de escolher aleatoriamente uma pessoa no Brasil em 2000 e ser do gênero feminino é 50,8%.

Calculando a porcentagem da população feminina em 2022, sendo P_F a população feminina do Brasil, temos:

$$P_F = \frac{104\,548\,325}{203\,080\,756} \cdot 100 \simeq 51{,}5$$

Logo, a chance de escolher aleatoriamente uma pessoa no Brasil em 2022 e ser do gênero feminino é 51,5%. Portanto, entre 2000 e 2022, houve a diminuição dessa chance.

CAPÍTULO 4 GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

Exercícios e problemas

1. **a)** Verdadeira.

b) Falsa. Sugestão de correção: Existem infinitos pontos que pertencem a um plano e infinitos pontos que não pertencem a ele.

c) Falsa. Sugestão de correção: Três pontos colineares determinam uma única reta.

d) Verdadeira.

e) Falsa. Sugestão de correção: Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então essa reta está contida no plano.

2. **a)** Cinco planos: um em cada face lateral e outro na base.

b) Cada vértice da base está contido em três planos: um que contém a base e outros dois que contêm faces laterais. Já o outro vértice (que não pertence à base) está contido nos quatro planos que contêm, respectivamente, cada uma das faces laterais da pirâmide.

3. A construção feita por Carina é a do item **A**, pois nesse caso as retas r e s formam um ângulo reto, então elas são perpendiculares entre si. Já no item **B**, as retas r e s não têm ponto em comum, ou seja, são paralelas entre si.

4. **a)** • Perpendiculares, pois formam um ângulo reto.
• Reversas, pois não há um plano que as contém.

b) Não, pois se $r \perp t$, o triângulo formado por r, t e s teria dois ângulos internos retos, o que é um absurdo.

5. **a)** $\overleftrightarrow{FG}$

b) $\overleftrightarrow{AF}$, $\overleftrightarrow{BG}$ e $\overleftrightarrow{EJ}$, pois essas retas são reversas a $\overleftrightarrow{CD}$ e existem r, s e t, tais que $r // \overleftrightarrow{CD}$, $r \perp \overleftrightarrow{AF}$, $s // \overleftrightarrow{CD}$, $s \perp \overleftrightarrow{BG}$, $t // \overleftrightarrow{CD}$ e $t \perp \overleftrightarrow{EJ}$.

c) $\overleftrightarrow{DI}$ e $\overleftrightarrow{EJ}$.

d) $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BG}$, $\overleftrightarrow{GH}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{DI}$, $\overleftrightarrow{HI}$, $\overleftrightarrow{EJ}$ e $\overleftrightarrow{AF}$.

e) $\overleftrightarrow{IJ}$, $\overleftrightarrow{DI}$, $\overleftrightarrow{IH}$, $\overleftrightarrow{CH}$, $\overleftrightarrow{GH}$, $\overleftrightarrow{BG}$ e $\overleftrightarrow{FG}$.

6. Sim, pois $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, de maneira que toda reta definida por dois pontos, entre A, B, C e D, é coplanar.

7. **a)** Sugestão de resposta: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

b) $\overleftrightarrow{HG}$, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

c) $\overleftrightarrow{CI}$, $\overleftrightarrow{DI}$, $\overleftrightarrow{EI}$ e $\overleftrightarrow{HI}$.

d) Note que $\overleftrightarrow{BC}$ é paralela a $\overleftrightarrow{AD}$ e perpendicular a $\overleftrightarrow{CE}$. Portanto, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{CE}$ são ortogonais.

8. Se $s \perp u$, necessariamente $s = t$ ou $s // t$, o que não acontece, pois, de acordo com as informações do problema, s e t são oblíquas. Portanto, a alternativa **c** apresenta uma informação incorreta.

9. **a)** Verdadeira. **b)** Verdadeira.

c) Falsa. Sugestão de correção: Se uma reta r e um plano α são paralelos, então há retas perpendiculares a r que são perpendiculares a α.

10. **a)** Nenhuma. **b)** Concorrente. **c)** $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{HI}$.

11. Concorrentes (perpendiculares ou oblíquas) ou reversas (ortogonais ou oblíquas).

12. **a)** • Contida no plano. • Paralela.

b) $\overleftrightarrow{GH}$, pois essa reta não tem ponto em comum com o plano determinado por $ABCD$.

c) $\overleftrightarrow{CH}$ e $\overleftrightarrow{GH}$.

13. Não, pois, por exemplo, considere as retas s e t e o plano α, tais que $s \perp t$, $t \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$. Assim, se uma reta s for perpendicular a apenas uma reta contida em um plano α, então não é possível afirmar que s é perpendicular a α.

14. Os planos paralelos são α e γ.

15. **a)** Falsa, pois dois planos secantes têm uma reta em comum, ou seja, infinitos pontos em comum.

b) Verdadeira.

c) Falsa, pois se dois planos α e β são paralelos, então as retas paralelas a α são paralelas ou estão contidas em β.

d) Verdadeira.

e) Falsa, pois os planos α e β são concorrentes quando têm apenas uma reta em comum.

16. • α e β: concorrentes • β e θ: concorrentes
• α e δ: concorrentes

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

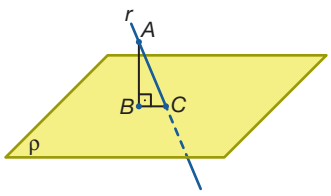
17. a) Sim, pois eles têm apenas $\overleftrightarrow{AB}$ em comum.
b) Não, pois para dois planos serem perpendiculares é necessário que eles sejam secantes e o ângulo formado entre esses dois planos seja 90°.
c) A interseção entre cada plano que contém uma face lateral do poliedro e todos os outros planos é uma reta. Portanto, os planos que contêm as faces *ABFE*, *BCGF*, *CDHG* e *ADHE* são secantes a todos os outros.

18. a) Os planos que contêm as faces *IJKL*, *MNOP* e *ABCD*.
b) • 8 planos.
• O plano que contém a face *ABONKJGF*.

19. a) Verdadeira.
b) Falsa, pois uma reta não contida em α pode ser paralela a esse plano e estar contida em γ.
c) Verdadeira.
d) Falsa, pois pode haver um plano coincidente a δ.
e) Verdadeira.

20. a) • Os planos que contêm as faces *BCFG* e *ADEH*.
• Os planos que contêm as faces *CDEF*, *BCFG*, *ABGH* e *ADEH*.
• O plano que contém a face *ADEH*.
b) Sim, pois as retas $\overleftrightarrow{DC}$ e $\overleftrightarrow{EH}$ não estão contidas no mesmo plano, logo são reversas.
c) Nos planos que contêm as faces *CDEF* e *BCFG*.

21.



RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

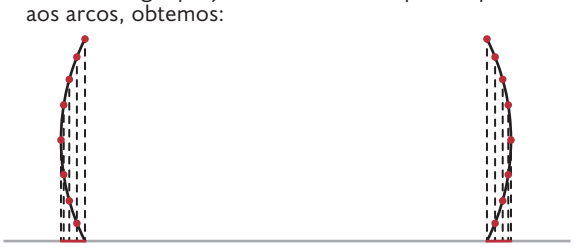
Se a reta *r* é oblíqua a um plano ρ, significa que ela não é nem paralela, nem perpendicular a ρ. Assim, todo plano que contém *r* e é perpendicular a ρ deve conter os pontos *A*, *B* e *C*. Portanto, existe um único plano que satisfaz essas condições, pois *A*, *B* e *C* são não colineares.

22. a) Os planos α e θ são paralelos, logo qualquer reta perpendicular a α também é perpendicular a θ. Assim, o plano θ e a reta *r* são perpendiculares.
b) Os planos são perpendiculares. Essa posição não muda de acordo com a abertura da porta.
c) Perpendicular, pois toda reta perpendicular ao plano α será perpendicular a qualquer plano paralelo ao plano α.

23. Os planos que contêm a capa e cada uma das páginas do livro são perpendiculares ao plano que contém o tampo da mesa. Logo, a reta *r* é perpendicular a α.

24. a) Falsa, pois a projeção ortogonal pode ser uma única reta, por exemplo, se uma das retas for perpendicular ao plano de projeção.
b) Verdadeira.
c) Falsa, pois *r* e *s* podem ser retas reversas.
d) Falsa, pois a projeção ortogonal de qualquer polígono sobre um plano depende da posição relativa entre o objeto e o plano de projeção.
e) Verdadeira.

25. A trajetória dos pontos *A* e *B* é descrita por arcos de circunferência. Logo, projetando os infinitos pontos pertencentes aos arcos, obtemos:

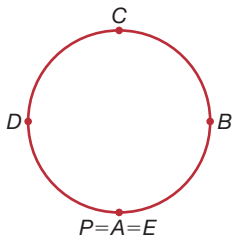


RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

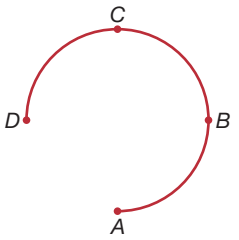
Portanto, a alternativa **b** é a correta.

26. • A projeção é um triângulo.
• A projeção será um segmento de reta.
• A projeção é um triângulo.

27. Como os cinco pontos do corrimão têm a mesma distância, a projeção ortogonal do corrimão da escada sobre o piso da escada é:



Logo, a projeção ortogonal, sobre o piso da casa, do caminho percorrido pela mão da pessoa é:



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, a alternativa **C** é a correta.

28. a) • Os planos que contêm as faces *ABCD*, *IJKL* e *MNOP*.
• Os planos que contêm as faces *ABCD*, *EFGH*, *IJKL*, *MNOP*, *BCFGJKON* e *ADEHILPM*.
b) As imagens com as representações das vistas referentes a esse item estão apresentadas na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.
c) A imagem com a representação do objeto em perspectiva referente a esse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.
d) I. Sugestão de resposta: Vistas superior e lateral esquerda ou direita.
II. Sugestão de resposta: Vistas lateral direita, esquerda, frontal e superior.

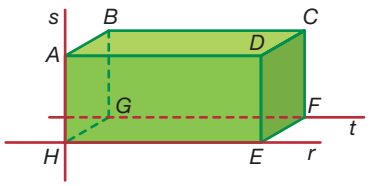
29. a) Falsa, pois se um ponto pertencer a uma reta, então a distância entre eles é nula.
b) Verdadeira.
c) Verdadeira.
d) Falsa, pois somente terão distância nula se o ponto pertencer à reta.

30. a) $\overline{MN}$, $\overline{IK}$ e $\overline{JH}$.
b) $\overline{EO}$ e $\overline{GN}$.
c) $\overline{BO}$
d) $\overline{CO}$ e $\overline{KL}$.

31. a) Três.
b) • Os planos α e δ.
• Os planos α e β e os planos β e δ.
c) Como os segmentos $\overline{DH}$ e $\overline{EF}$ são perpendiculares a ambos os planos, então esses segmentos determinam a distância entre os planos α e δ.

Resolvendo por etapas (páginas 157 e 158)

2. Sim, é possível resolver o problema usando o plano apresentado na seção com algumas adequações. Para isso, basta construir um paralelepípedo reto retângulo e traçar as retas *r*, *s* e *t* da maneira como mostra a figura a seguir, de onde se pode concluir que $r \perp s$, $r // t$ e que *s* e *t* são ortogonais entre si. Isso comprova que a afirmação de Aroldo é verdadeira.



RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

Trabalho e juventudes (página 163)

1. Arquitetos podem desenvolver projetos em diversos segmentos, desde os industriais até os hospitalares. Também podem trabalhar com reformas, revitalizações e renovações de estruturas já existentes, contribuindo para a modernização e a preservação histórica desses lugares.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Síntese do capítulo (página 167)

3. Os axiomas são afirmações tomadas como verdadeiras, sem a necessidade de demonstrações. Já os teoremas são conclusões baseadas em postulados ou em outros teoremas já demonstrados, necessitando de demonstrações para serem aceitos como verdadeiros.

4. Duas retas quaisquer são paralelas se, e somente se, elas forem coplanares e não tiverem pontos em comum.

5. Não. Como duas retas coincidentes correspondem ao mesmo conjunto de pontos, isto é, são a mesma reta, elas não podem ser paralelas, pois duas retas paralelas são coplanares e não têm ponto em comum.

6. Sim, pois, tomando os pontos A e B distintos de P e não colineares, pertencentes às retas t e u, respectivamente pelo **postulado 5**, existe um plano que os contém.

7. **a)** A reta é paralela ao plano.
b) A reta é concorrente ou secante ao plano.

8. Para que uma reta r seja perpendicular ao plano α, é necessário e suficiente que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes contidas em α.

9. **a)** Verdadeira.
b) Falsa, pois planos paralelos não têm pontos em comum.
c) Falsa, pois planos coincidentes correspondem ao mesmo conjunto de pontos.
d) Verdadeira.

10. A. Segmento de reta. B. Reta. C. Ponto.

11. **a)** Falsa. A distância entre dois pontos coincidentes é nula.
b) Verdadeira.
c) Falsa. A distância entre uma reta r e um ponto A, não pertencente à reta, é determinada pelo comprimento do segmento de reta AB perpendicular a essa reta, tal que B pertence a r.

CAPÍTULO 5 POLIEDROS

Questões

A. O algoritmo e o fluxograma referentes a essa questão estão apresentados na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

B. Os volumes são iguais. Espera-se que os estudantes percebam que o volume de cada uma dessas pilhas é o mesmo, independentemente da maneira como as chapas são empilhadas.

D. A veracidade da afirmação dessa questão está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

E. $A_B = 6 \cdot \frac{5^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{150\sqrt{3}}{4}$ $\qquad V = \frac{150\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 150\sqrt{3}$

O volume do prisma é $150\sqrt{3}$ cm³.

I. A veracidade da afirmação dessa questão está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Exercícios e problemas

1. A. Poliedro.
B. Não poliedro.
C. Não poliedro.
D. Poliedro.
E. Não poliedro.
F. Poliedro.

2. A. 6 faces, 10 arestas e 6 vértices.
B. 8 faces, 18 arestas e 12 vértices.
C. 11 faces, 20 arestas e 11 vértices.
D. 8 faces, 12 arestas e 6 vértices.
E. 7 faces, 15 arestas e 10 vértices.
F. 9 faces, 21 arestas e 14 vértices.

3. A. Convexo.
B. Não convexo.
C. Não convexo.
D. Convexo.

4. A. Quadriláteros.
B. Triângulos e quadriláteros.
C. Quadriláteros e hexágonos.
D. Pentágonos.

5. Ao cortarmos cada vértice do cubo, obtemos 8 novas faces e, como o cubo tem 6 faces, efetuamos: $6 + 8 = 14$. Portanto, serão necessárias 14 cores diferentes para pintar cada uma das faces. Logo, a alternativa **c** é a correta.

7. Usando a Relação de Euler, temos: $10 + F = 15 + 2 \Rightarrow F = 7$. Portanto, o poliedro tem 7 faces.

8. **a)** Não convexo, pois é possível traçar uma reta não paralela a nenhuma de suas faces e cortá-lo em mais de dois pontos.
b) 9 vértices, 16 arestas e 9 faces.
c) Sim. Usando a Relação de Euler com as informações do item anterior, temos: $9 + 9 = 16 + 2$.

9. Como todas as faces do poliedro são hexagonais, cada face tem 6 arestas. Além disso, cada aresta é comum a duas faces. Logo, como $F = 15$, temos: $A = \frac{6F}{2} \Rightarrow A = 45$.

Pela Relação de Euler, temos: $V + 15 = 45 + 2 \Rightarrow V = 32$.
Portanto, esse poliedro tem 32 vértices.

10. Utilizando a Relação de Euler, obtemos:

$$9 + F = 16 + 2 \Rightarrow F = 9$$

Indicando por x a quantidade de faces triangulares e por y o número de faces quadrangulares, temos o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x + y = 9 \\ \frac{3x + 4y}{2} = 16 \end{cases} \Rightarrow x = 4$ e $y = 5$.

Portanto, esse poliedro tem 4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares.

11. Para resolver essa tarefa, utilizamos um sistema de equações.

$$\begin{cases} A = 2V \\ \frac{3F}{2} = A \\ V + F = A + 2 \end{cases}$$

Logo, $A = 12$, $V = 6$ e $F = 8$.
Portanto, esse poliedro tem 6 vértices, 12 arestas e 8 faces.

12. Como a molécula de *buckminsterfullerene* é composta de 60 átomos de carbono, temos: $A = \frac{3 \cdot 60}{2} = 90$.

Aplicando a Relação de Euler, obtemos:

$$60 + F = 90 + 2 \Rightarrow F = 32$$

Indicando por x o número de faces pentagonais e y o número de faces hexagonais, temos:

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ \frac{5x + 6y}{2} = 90 \end{cases}$$

Logo, $x = 12$ e $y = 20$.
A molécula tem 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais.

14. Como cada aresta é comum a dois vértices, temos:

$$A = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$$

Pela Relação de Euler, temos: $12 + F = 30 + 2 \Rightarrow F = 20$.
Portanto, esse poliedro tem 20 faces e 30 arestas.

15. **a)** Como o poliedro é regular, cada face tem o mesmo número de lados. Seja n esse número. Então:

$A = \frac{n \cdot F}{2}$ $\qquad V = F$

Logo:

$V + F = A + 2 \Rightarrow F + F = \frac{n \cdot F}{2} + 2 \Rightarrow F = \frac{4}{4 - n}$

$F > 0$, logo $4 - n > 0 \Rightarrow n < 4$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Assim, como $0 < n \leq 3$, segue que $n = 3$. Logo:

$V = F = \frac{4}{4-3} = 4$ $\qquad A = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

Portanto, o poliedro tem 4 faces, 4 vértices e 6 arestas.

b) Tetraedro regular.

c) As faces são polígonos regulares com $n = 3$, ou seja, todas são triangulares equiláteras.

16. Não, pois o fato de esse poliedro ser de Platão não garante que seja regular. Para que isso ocorra, é necessário que suas faces tenham formato triangular equilátero e sejam congruentes entre si.

17. Um tetraedro regular tem 4 faces triangulares. Logo:

$$S = (4-2) \cdot 180° = 720°$$

Portanto, a soma é igual a 720°.

18. A. 8 vértices e 12 arestas. B. 6 vértices e 12 arestas.

20. O algoritmo referente a essa questão está apresentado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

a) Usando o algoritmo, temos:

- 4 vértices.
- 12 vértices.

b) O algoritmo em linguagem Scratch referente a esse item está apresentado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

21. • Arestas: $A = \frac{12 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{2} = 90$

• Vértices: $V + 32 = 90 + 2 \Rightarrow V = 60$

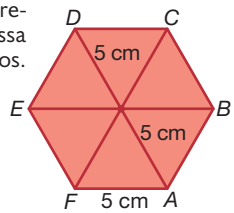
Portanto, o icosaedro truncado tem 60 vértices e 90 arestas.

22. **a)** Prisma regular hexagonal.

b) Prisma regular octogonal.

c) Prisma regular decagonal.

23. **a)** Como o hexágono $ABCDEF$ é regular, podemos decompor essa figura em 6 triângulos equiláteros.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$AD = 5 + 5 = 10$

$(AD)^2 + (KD)^2 = (AK)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^2 + 15^2 = (AK)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AK = 5\sqrt{13}$

Logo, $AD = 10$ cm e $AK = 5\sqrt{13}$ cm.

b) Como o prisma é regular, temos:

$BE = AD = 10$; $EL = KD = IB = 15$; $BL = AK = 5\sqrt{13}$.

Assim: $A = \frac{BE \cdot EL}{2} = \frac{10 \cdot 15}{2} = 75$.

Perímetro: $BE + EL + BL = 10 + 15 + 5\sqrt{13} = 5 \cdot (5 + \sqrt{13})$

Logo, a área é 75 cm² e o perímetro é $5 \cdot (5 + \sqrt{13})$ cm.

24. $\begin{cases} db = 5 \\ dp = 13 \\ c \cdot h = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{c^2 + a^2} = 5 \\ \sqrt{c^2 + a^2 + h^2} = 13 \\ c \cdot h = 48 \end{cases}$

Consequentemente, $a = 3$, $c = 4$ e $h = 12$.

Logo, $a = 3$ cm, $c = 4$ cm e $h = 12$ cm.

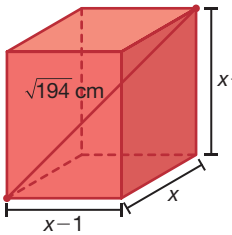
25. Indicando por c, a e h, respectivamente, comprimento, largura e altura, com as medidas em centímetros, temos:

$$\begin{cases} d_p = 15\sqrt{2} \\ \frac{c}{3} = \frac{a}{4} = \frac{h}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{c^2 + a^2 + h^2} = 15\sqrt{2} \\ \frac{c^2}{9} = \frac{a^2}{16} = \frac{h^2}{25} \end{cases}$$

$\frac{c^2}{9} = 9 \Rightarrow c = 9$ $\qquad \frac{a^2}{16} = 9 \Rightarrow a = 12$ $\qquad \frac{h^2}{25} = 9 \Rightarrow h = 15$

Portanto, o comprimento é 9 cm; a largura, 12 cm; e a altura, 15 cm.

26.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

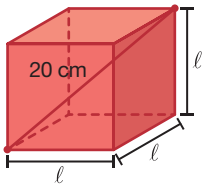
$\sqrt{(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2} = \sqrt{194} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 =$

$= 194 \Rightarrow x = 8$

Logo, as dimensões dessa caixa são 7 cm, 8 cm e 9 cm.

27. Comprimento das arestas do cubo:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$\sqrt{\ell^2 + \ell^2 + \ell^2} = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{3}} \simeq 11{,}5$

$20 - 11{,}5 = 8{,}5$

Assim, é preciso cortar, aproximadamente, 8,5 cm de cada canudo para construir a aresta desse cubo.

28. **a)** Diagonal da base quadrada: $d = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{3}$

Logo, o comprimento da diagonal da base é $2\sqrt{3}$ cm.

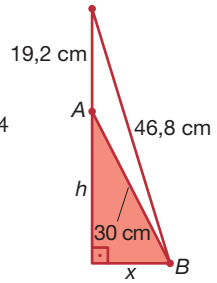
b) Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$(2\sqrt{3})^2 + x^2 = (4\sqrt{3})^2 \Rightarrow x = 6$$

Portanto, altura x desse prisma é 6 cm.

29.

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = 30^2 \\ (h + 19{,}2)^2 + x^2 = 46{,}8^2 \end{cases}$$



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$h^2 + 38{,}4h + 368{,}64 + x^2 = 2\,190{,}24$

Como $h^2 + x^2 = 30^2$, temos:

$30^2 + 38{,}4h = 1\,821{,}6 \Rightarrow h = 24$.

Portanto, esse prisma tem 24 cm.

30. A. $A_t = 6 \cdot 4 \cdot 4 = 96$

Logo, a área da superfície é 96 cm².

B. $A_l = 6 \cdot 5 \cdot 10\sqrt{3} \Rightarrow A_l = 300\sqrt{3}$

$A_b = 6 \cdot \frac{5^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \frac{75\sqrt{3}}{2}$

$A_t = 300\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{75\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_t = 375\sqrt{3}$

Logo, a área da superfície é $375\sqrt{3}$ cm².

C. $A_l = 2 \cdot (4 \cdot 3 + 6 \cdot 3) \Rightarrow A_l = 60$

$A_b = 6 \cdot 4 \Rightarrow A_b = 24$

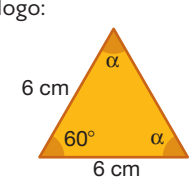
$A_t = 60 + 2 \cdot 24 \Rightarrow A_t = 108$

Logo, a área da superfície desse prisma é 108 cm².

D. A base é um triângulo equilátero, logo:

$60° + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 60°$

Assim:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$A_l = 3 \cdot 6 \cdot 8\sqrt{3} \Rightarrow A_l = 144\sqrt{3}$

$A_b = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 9\sqrt{3}$

$A_t = 144\sqrt{3} + 2 \cdot 9\sqrt{3} \Rightarrow A_t = 162\sqrt{3}$

Logo, a área da superfície é $162\sqrt{3}$ cm².

31. **a)** Indicando por x a medida de cada aresta: $6x^2 = 54 \Rightarrow x = 3$.

Assim, o comprimento de cada aresta mede 3 cm.

b) $EG = CA \Rightarrow d_b = \sqrt{3^2 + 3^2} \Rightarrow d_b = 3\sqrt{2}$

Perímetro de $AEGC$: $P = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6 \cdot (1 + \sqrt{2})$

Logo, o perímetro é $6 \cdot (1 + \sqrt{2})$ cm.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

32. **a)** Cada aresta foi dividida em 30 partes, pois $\frac{120}{4} = 30$.

O cubo vermelho foi dividido em 27 000 cubinhos $(30^3 = 27\,000)$.

b) Esses cubinhos são os que contêm a aresta do cubo maior. Como são 12 arestas e cada um dos 8 vértices contém um cubinho em comum com 3 arestas, temos:

$$12 \cdot 30 - 2 \cdot 8 = 344$$

Portanto, 344 cubinhos.

c) $A_{\text{cubinho}} = 6 \cdot 4 \cdot 4 \Rightarrow A_t = 96$

$A_{\text{cubo vermelho}} = 6 \cdot 120 \cdot 120 \Rightarrow A_t = 86\,400$

Razão: $\frac{96}{86\,400} = \frac{1}{900}$

33. **a)** A base do prisma é formada por um triângulo equilátero, logo:

$$A_b = \frac{30^2\sqrt{3}}{4} = 225\sqrt{3}$$

Portanto, a área da base desse prisma é $225\sqrt{3}$ cm².

b) Área lateral: $A_l = 3 \cdot 30 \cdot 30 \Rightarrow A_l = 2\,700$

Área total: $A_t = 2\,700 + 2 \cdot 225\sqrt{3} = 450 \cdot (6 + \sqrt{3})$

A área lateral é 2 700 cm² e a área total desse prisma, $450(6 + \sqrt{3})$ cm².

34. $A_b = 6 \cdot \frac{0{,}12^2\sqrt{3}}{4} = 0{,}0216\sqrt{3}$; $A_l = 6 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}25 = 0{,}18$.

Área total do prisma regular dividida pela área que pode ser pintada com 1 L de tinta: $\frac{2A_b + A_l}{100} = \frac{0{,}0432\sqrt{3} + 0{,}18}{100} \simeq 0{,}0025$.

Portanto, serão necessários, aproximadamente, 0,0025 L ou 2,5 mL.

35. A área total do cubo é 384 cm². Logo: $6 \cdot L^2 = 384 \Rightarrow L = 8$.

$$A_l = 4L^2 \Rightarrow A_l = 4 \cdot 8^2 = 256$$

Aumentando a área em 144 cm², temos 400 cm². Logo:

$$A = 4 \cdot a^2 \Rightarrow 400 = 4 \cdot a^2 \Rightarrow a = 10$$

Portanto, a diagonal após o aumento mede $10\sqrt{3}$ cm e a diagonal antes do aumento media $8\sqrt{3}$ cm. Portanto, a diagonal deve ser aumentada em $2\sqrt{3}$ cm, ou seja, 3,46 cm.

36. **a)** Caixa de base hexagonal:

$$A_t = A_b + 6A_l \Rightarrow A_t = 6 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 8 \cdot 8 \simeq 550$$

Caixa de base quadrada:

$$A_t = A_b + 4A_l \Rightarrow A_t = 64 + 4 \cdot 6 \cdot 8 = 256$$

A área da caixa de base hexagonal é aproximadamente 550 cm² e a da caixa de base quadrada, 256 cm².

b) Área total: $2 \cdot 550 + 3 \cdot 256 = 1\,100 + 768 = 1\,868$

Como 1868 cm² = 0,1868 m², então: $0{,}1868 \cdot 3{,}2 \simeq 0{,}60$.

Logo, Bruna vai gastar, aproximadamente, R$ 0,60 com o papel colorido.

37. **a)** Indicando por x e h, respectivamente, a aresta da base e a medida da aresta lateral, obtemos:

$$D^2 = 3d^2 \Rightarrow x^2 + x^2 + h^2 = 3 \cdot \left(x\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2 + h^2 = 6x^2 \Rightarrow h = 2x$$
$$A_t = 2x^2 + 4 \cdot x \cdot 2x \Rightarrow 640 = 10x^2 \Rightarrow x = 8$$

Portanto, o comprimento da aresta da base é 8 cm e o da aresta lateral, 16 cm.

b) Área lateral do prisma: $A_l = 4 \cdot 8 \cdot 16 = 512$

Logo, a área lateral desse prisma é 512 cm².

38. **a)** $A_l = 2x(20 - 2x) + 2x(35 - 2x) = 110x - 8x^2$

$A_b = (20 - 2x)(35 - 2x) = 700 - 110x + 4x^2$

Como a área da superfície externa da caixa mede 684 cm², temos:

$$(110x - 8x^2) + (700 - 110x + 4x^2) = 684 \Rightarrow x = 2$$

Portanto, $x = 2$ cm.

b) $A_l = 110 \cdot 2 - 8 \cdot 2^2 = 188$

$A_b = 700 - 110 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 = 496$

Portanto, a área da lateral é 188 cm² e a da base, 496 cm².

39. **a)** Área da peça sem o "recorte":

$A_l = 6 \cdot 120 \cdot 80 = 57\,600$ $\quad A_b = 6 \cdot \frac{80^2\sqrt{3}}{4} = 9\,600\sqrt{3}$

$A_t = 57\,600 + 2 \cdot 9\,600\sqrt{3} = 57\,600 + 19\,200\sqrt{3}$

Assim:

$57\,600 + 19\,200\sqrt{3} - 2 \cdot 45^2 + 4 \cdot 45 \cdot 120 =$

$= 75\,150 + 19\,200\sqrt{3} \simeq 108\,405$

Portanto, a área total da superfície dessa peça é aproximadamente 108 405 cm² ou 10,8405 m².

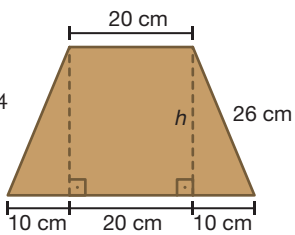
b) • $\frac{10{,}8405}{4} \simeq 2{,}71$ $\quad$ • $25 \cdot 2{,}71 = 67{,}75$

Logo, o gasto aproximado com tinta será R$ 67,75.

40. **a)**

$h^2 + 10^2 = 26^2 \Rightarrow h = 24$

Portanto, $h = 24$ cm.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

b) $A_l = 2 \cdot 15 \cdot 26 + 20 \cdot 15 + 40 \cdot 15 = 1\,680$

$A_b = \frac{(20 + 40) \cdot 24}{2} = 720$

$A_t = 1\,680 + 2 \cdot 720 = 3\,120$

Assim, foram usados 3 120 cm² de papelão.

41. **a)** Comprimento das arestas da peça cúbica maior:

$$\frac{486}{6} = 81 \Rightarrow \ell^2 = 81 \Rightarrow \ell = 9$$

Como o comprimento das arestas dessa peça é igual ao triplo das arestas de cada peça amarela, então o comprimento das arestas de cada peça amarela é 3 cm.

Razão: $\frac{6 \cdot 3^2}{6 \cdot 9^2} = \frac{1}{9}$

b) Área total da superfície da peça cúbica maior:

$$A_t = 6 \cdot 9^2 = 486$$

Área total da superfície de uma peça amarela:

$$A_t = 6 \cdot 3^2 = 54$$

Logo, a área total da superfície da peça cúbica maior é 486 cm² e a de cada peça amarela é 54 cm².

42. **a)** Como $b = 2a$ e $c = 3a$, temos:

$198 = 2 \cdot (ac + ab + bc) \Rightarrow 99 = a \cdot 3a + a \cdot 2a + 2a \cdot 3a \Rightarrow$

$\Rightarrow 99 = 11a^2 \Rightarrow a = 3$

Logo, $a = 3$ cm; $b = 6$ cm e $c = 9$ cm.

b) $D = \sqrt{3^2 + 6^2 + 9^2} \Rightarrow D = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$

Assim, o comprimento da diagonal desse paralelepípedo é $3\sqrt{14}$ cm.

c) $A_b = 3 \cdot 6 = 18$ $\quad A_l = 2 \cdot 54 + 2 \cdot 27 = 162$

Logo, a área da base desse paralelepípedo é 18 cm² e a área lateral, 162 cm².

43. **a)** Note que o prisma regular tem área total igual a 350 cm². Assim, temos:

$350 = 2 \cdot 25 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 10 \cdot h \Rightarrow 263{,}5 = 30h \Rightarrow h \simeq 8{,}8$

Logo, a altura desse prisma é aproximadamente 8,8 cm.

b) $A_b = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b \simeq 43{,}25$

$A_l = 3 \cdot 10 \cdot 8{,}8 = 264$

Assim, a área da base desse prisma é aproximadamente 43,25 cm² e a área lateral, aproximadamente 264 cm².

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

44. **a)** O algoritmo e o fluxograma dessa tarefa estão apresentados na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

45. De $a + b + c = 12$, segue que $a = 12 - b - c$.

$A_t = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$

$A_t = 2 \cdot (12 - b - c \cdot b + b \cdot c + 12 - b - c \cdot c)$

$A_t = 24b - 2b^2 - 2c^2 + 24c - 2bc$

De acordo com os dados desse problema, temos:

$a^2 + b^2 + c^2 = 56 \Rightarrow (12 - b - c)^2 + b^2 + c^2 = 56 \Rightarrow$

$\Rightarrow 24b - 2b^2 - 2c^2 + 24c - 2bc = 88$

Logo, a área total é 88 cm².

46. **a)** Padrão **1**: $2{,}44 \cdot 6{,}09 \cdot 2{,}59 \simeq 38{,}49$.

Padrão **2**: $2{,}44 \cdot 12{,}19 \cdot 2{,}59 \simeq 77$.

Logo, a capacidade aproximada do padrão **1** é 38,49 m³ e a do padrão **2** é aproximadamente 77 m³.

b) Padrão **1**:

$2 \cdot 2{,}44 \cdot 6{,}09 + 2 \cdot 2{,}44 \cdot 2{,}59 + 2 \cdot 6{,}09 \cdot 2{,}59 \simeq 73{,}9$

Padrão **2**:

$2 \cdot 2{,}44 \cdot 12{,}19 + 2 \cdot 2{,}44 \cdot 2{,}59 + 2 \cdot 12{,}19 \cdot 2{,}59 = 135{,}27$

Portanto, a área da superfície do padrão **1** é aproximadamente 73,9 m² e a do padrão **2** é aproximadamente 135,27 m².

47. Indicando por a a aresta do cubo:

$A_t = 384 \Rightarrow 6a^2 = 384 \Rightarrow a = 8$

Se $V = 1728$ cm³, logo: $a^3 = 1728 \Rightarrow a = 12$.

Como $12 - 8 = 4$, logo é preciso aumentar cada aresta em 4 cm.

48. Indicando por x o volume da mistura sabor morango, temos:

$(1000 + x) + 0{,}25(1000 + x) = 2000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1000 + x + 250 + 0{,}25x = 2000 \Rightarrow x = 600$

Portanto, o volume máximo da mistura é 600 cm³. Logo, a alternativa **c** é a correta.

49. **a)** $V = 10 \cdot 12 \cdot 14 = 1680$. Portanto, a capacidade desse recipiente é 1680 cm³.

b) $V = 10 \cdot 12 \cdot 8 = 960$. Portanto, o volume de água dentro do recipiente é 960 cm³.

c) $V = 10 \cdot 12 \cdot 1{,}8 = 216$. Como $a = \sqrt[3]{216}$, o comprimento da aresta do cubo é 6 cm.

50. $V = 10 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 0{,}15 = 36$. Logo, o volume de concreto utilizado no piso da galeria é 36 m³.

51. Indicando com ℓ_A e ℓ_B, respectivamente, a aresta do recipiente **A** e a aresta do recipiente **B**, temos:

$$\sqrt{\ell_B^2 + \ell_B^2 + \ell_B^2} = 2\sqrt{\ell_A^2 + \ell_A^2 + \ell_A^2} \Rightarrow \ell_B = 2\ell_A$$

a) $\dfrac{\ell_A^3}{\ell_B^3} = \dfrac{\ell_A^3}{(2\ell_A)^3} = \dfrac{1}{8}$

b) $50\ell_A^2 = 50\left(\dfrac{\ell_B}{2}\right)^2 = 12{,}5\ell_B^2$. Logo, a altura que o líquido ocupará no recipiente **B** é 12,5 cm.

52. Indicando com c' a nova medida de c, temos:

$$(a - 0{,}2a) \cdot b \cdot c' = a \cdot b \cdot c \Rightarrow 0{,}8c' = c \Rightarrow c' = 1{,}25c$$

Logo, a medida de c deve ser aumentada em 25%.

53. **a)** Cada coluna tem forma de um prisma regular hexagonal com $A_b = 6 \cdot \dfrac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, logo $V = 6 \cdot \dfrac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 12 = 72\sqrt{3} \simeq 124{,}7$.

Assim, o volume de cada coluna é aproximadamente 124,7 m³.

b) $V = 0{,}8 \cdot 8 \cdot 124{,}7 = 789{,}08$. Portanto, o volume total de concreto utilizado é 798,08 m³.

54. Indicando por c o comprimento da aresta do reservatório:

$$\underbrace{0{,}3}_{30\text{ cm}} \cdot c^2 = 2{,}7 \Rightarrow c = 3$$

Capacidade total: $c^3 = 3^3 = 27$

Assim, a capacidade total é 27 m³ ou 27 000 L.

55. Calculando 75% da capacidade: $0{,}75 \cdot 4\text{ L} = 3\text{ L}$.

O volume do prisma triangular regular é proporcional à sua altura. Utilizando regra de três, temos: $\dfrac{3}{x} = \dfrac{40}{100} \Rightarrow x = 7{,}5$.

Assim, a capacidade do recipiente é 7,5 L.

56. Como $h = 2$ m e a largura do topo aumenta 0,5 m para cada metro de altura em relação à largura do fundo, segue que $B - b = 1$.

Logo, $b = B - 1 \Rightarrow b = 6 - 1 \Rightarrow b = 5$.

$A_b = \dfrac{(6 + 5) \cdot 2}{2} = 11$ $\qquad$ $V = 11 \cdot 20 = 220$

Como 1 tonelada de forragem ocupa 2 m³ e o volume do silo é 220 m³, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo é 110 toneladas. Portanto, a alternativa **a** é a correta.

57. $\dfrac{3{,}75}{x} = \dfrac{27}{32{,}4} \Rightarrow x = 4{,}5$

Assim, o tempo necessário para a bomba encher completamente essa caixa é 4,5 h ou 4 h 30 min.

58. • Parte de baixo: $A_b = \dfrac{(2{,}6 + 1{,}2) \cdot 1}{2} = 1{,}9$ e $V = 1{,}9 \cdot 1{,}7 = 3{,}23$

• Parte de cima: $V = 2{,}6 \cdot 1{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}884$

$4 \cdot (3{,}23 + 0{,}884) \simeq 16{,}46$

Logo, o volume máximo de entulho gerado é aproximadamente 16,46 m³.

59. Indicando por x a medida da aresta da parte cúbica de cima, o volume desse cubo corresponde a x^3 e o volume do cubo de baixo, a $8x^3$.

Como a torneira leva 8 minutos para encher metade da parte de baixo, que corresponde a um volume de $4x^3$, vai levar 2 minutos para encher a parte de cima, que tem um volume de x^3.

Além disso, para terminar de encher a parte de baixo, ela vai levar 8 minutos.

Portanto, para a torneira encher o restante do depósito, vai levar 10 minutos. Logo, a alternativa **b** é a correta.

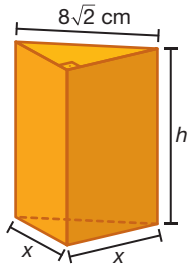
60. **a)** $x^2 + x^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x = 8$

$A_b = \dfrac{8 \cdot 8}{2} = 32$

$V = 640$

$32h = 640 \Rightarrow h = 20$

Logo, esse prisma tem 20 cm de altura.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

b) $A_l = 2 \cdot 8 \cdot 20 + 8\sqrt{2} \cdot 20 = 320 + 160\sqrt{2}$

$A_t = \left(320 + 160\sqrt{2}\right) + 2 \cdot 32 \simeq 610{,}27$

Assim, a área total desse prisma é aproximadamente 610,27 cm².

61. **a)** É necessário 1 bloco para construir o 1º degrau, 2 blocos para construir o 2º degrau, e assim por diante. Então, o total necessário de blocos é dado por:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 20 = \frac{20 \cdot (1 + 20)}{2} = 210$$

Portanto, são necessários 210 blocos.

b) $V = 210 \cdot 0{,}2^2 \cdot 1{,}5 = 12{,}6$

Assim, o volume de concreto necessário para construir a escada descrita no item **a** é 12,6 m³.

62. **a)** $V = x \cdot (30 - x) \cdot 2{,}5 = -2{,}5x^2 + 75x$

$$x_v = -\frac{75}{2 \cdot (-2{,}5)} = 15$$

Logo, as dimensões da piscina devem ser 2,5 m, 15 m e 15 m.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) $V = 15 \cdot 15 \cdot 2{,}5 = 526{,}5$

Logo, a capacidade dessa piscina é 562,5 m³.

63. O reservatório é um prisma regular de base hexagonal, logo

$V = 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \cdot 10 \simeq 104.$

Assim: $\frac{104\,000}{10\,000} \simeq 10.$

A água do reservatório supre os bebedouros por, aproximadamente, 10 dias.

64. a) Volume do assento: $V_{AC} = 1{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}07$

Volume do apoio: $V_{Ap} = \frac{0{,}2^2\sqrt{3}}{4} \cdot 0{,}4 = 0{,}0069$

Volume total: $V_t = V_{AC} + 2V_{Ap} = 0{,}07 + 2 \cdot 0{,}0069 = 0{,}0838$

$$\frac{2}{0{,}0838} \simeq 23$$

Portanto, com essa quantidade de concreto é possível construir aproximadamente 23 bancos.

b) Área da superfície do assento A_a:

$A_a = 2 \cdot (1{,}4 \cdot 0{,}5 + 1{,}4 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}1) = 1{,}78$

$A_l = 6 \cdot (0{,}4 \cdot 0{,}2) = 0{,}48$

$A_b = \frac{0{,}2^2\sqrt{3}}{4} \simeq 0{,}017$

Área considerada para a pintura:

$$1{,}78 - (2 \cdot 0{,}017) + 0{,}48 \simeq 2{,}23$$

A área de superfície total que será pintada de um único banco é 2,23 m², totalizando 6,69 m² após 3 demãos. Como são 23 bancos, temos: $6{,}69 \cdot 23 = 153{,}87$.

Cada lata de tinta pinta 45 m², logo: $\frac{153{,}87}{45} \simeq 3{,}42$.

Assim, devem ser adquiridas 4 latas de tinta para pintar os bancos.

65. a) A variação corresponde ao volume da elevação interna: $V_{antes} = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}7 = 2{,}8$, ou seja, 2,8 m³.

Não há variação na área da superfície interna (0 m³) e ocorre uma redução de 2,8 m³ na capacidade máxima.

66. Área da superfície da embalagem antiga:

$$A_t = 2 \cdot (20 \cdot 8 + 20 \cdot 10 + 8 \cdot 10) = 880$$

Volume da embalagem antiga: $V = 20 \cdot 8 \cdot 10 = 1600$

Área da superfície da embalagem atual:

$$A_t = 20 \cdot 8 + 10 \cdot 8 + 2 \cdot \left(20 \cdot 5 + 8 \cdot 5 + \frac{(20+10) \cdot 5}{2} + 8 \cdot 5\sqrt{2}\right)$$

$A_t \simeq 160 + 80 + 2 \cdot (100 + 40 + 75 + 56{,}4) \simeq 782{,}8$

Volume da embalagem atual: $V_t = 20 \cdot 8 \cdot 5 + 75 \cdot 8 = 1400$

Redução da área da superfície: $A_R = 880 - 782{,}8 = 97{,}2$

Redução do volume da embalagem: $V_R = 1600 - 1400 = 200$

Portanto, houve uma redução de aproximadamente 97,2 cm² na área da superfície e de 200 cm³ no volume da embalagem.

67. $V = 25{,}6 \cdot 20 = 512 \qquad a^3 = 512 \Rightarrow a = 8$

Assim, o comprimento da aresta desse cubo é 8 cm.

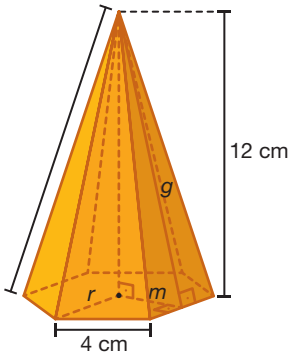
68. Aresta da base: $x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x = 4$

$$V = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot 4 = 64\sqrt{3} \simeq 108{,}8$$

Assim, o volume dessa embalagem é aproximadamente 108,8 cm³.

70.
- O número total de arestas é igual ao dobro do número de lados do polígono que compõe a base.
- O número de faces da pirâmide é igual ao número de lados do polígono que compõe a base mais 1.

71. a) Como a base da pirâmide é um hexágono regular, o raio da base, representado por r, é igual à aresta da base, portanto o raio da base é 4 cm.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

b) Indicando como x o comprimento da aresta lateral, temos:

$$x^2 = \underbrace{4^2}_{r} + 12^2 \Rightarrow x = 4\sqrt{10}$$

Assim, o comprimento da aresta lateral é $4\sqrt{10}$ cm.

c) Indicando como m o comprimento do apótema da base, temos:

$$m^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow m = 2\sqrt{3}$$

Assim, o comprimento do apótema da base é $2\sqrt{3}$ cm.

d) Indicando como g o comprimento do apótema da pirâmide, temos:

$$g^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 12^2 \Rightarrow g = 2\sqrt{39}$$

Logo, o comprimento do apótema da pirâmide é $2\sqrt{39}$ cm.

72. Como as menores arestas da pirâmide são $\overleftrightarrow{HE}$ e $\overleftrightarrow{GF}$ e ambas têm o mesmo comprimento da aresta $\overleftrightarrow{AD}$, o comprimento da menor aresta é 3 cm.

Para calcular o comprimento da maior aresta, fazemos:

$$HF^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow HF = 5$$

$$HV^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow HV = 5\sqrt{2}$$

Assim, o comprimento da maior aresta é $5\sqrt{2}$ cm.

73. Como a pirâmide é quadrangular regular, sua base é um quadrado. Logo, o comprimento do raio da circunferência inscrita é igual à metade do comprimento da aresta do quadrado. Então: $2^2 + 2^2 = x^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$.

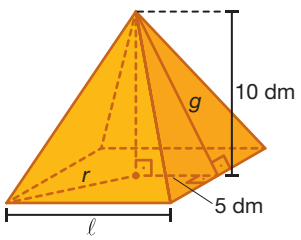
Logo, o comprimento do raio que circunscreve a base dessa circunferência é $2\sqrt{2}$ cm.

74. O tetraedro regular tem 6 arestas congruentes. Assim, a medida de cada aresta é 2 cm.

a) $A_l = 3 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$. Logo, a área lateral é $3\sqrt{3}$ cm².

b) $A_t = 4 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$. Logo, a área total é $4\sqrt{3}$ cm².

75.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Como o comprimento da aresta da base representado por ℓ é o dobro do apótema da base, logo: $\ell = 2 \cdot 5 = 10$. Portanto, o comprimento da aresta da base é 10 dm.

b) O raio da circunferência, representado por r, coincide com a metade da diagonal do quadrado. Logo: $(2r)^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow r = 5\sqrt{2}$. Portanto, o comprimento do raio da circunferência que circunscreve a base é $5\sqrt{2}$ dm.

c) $A_b = 10^2 = 100$. Logo, a área da base é 100 dm².

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

d) Comprimento do apótema: $g^2 = 10^2 + 5^2 \; g = 5\sqrt{5}$

Área da lateral: $A_l = 4 \cdot \frac{10 \cdot 5\sqrt{5}}{2} = 100\sqrt{5}$

Área total: $A_t = 100 + 100\sqrt{5} = 100 \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)$

Logo, a área total é $100 \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)$ dm².

76. Área lateral: $A_l = 6 \cdot \frac{4 \cdot g}{2} = 12g$

Área da base: $A_b = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

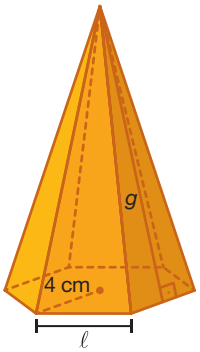
$\Rightarrow A_b = 24\sqrt{3}$

Área total: $A_t = 24 \cdot \left(4 + \sqrt{3}\right)$

Comprimento do apótema:

$12g + 24\sqrt{3} = 24 \cdot \left(4 + \sqrt{3}\right) \Rightarrow g = 8$

Logo, o comprimento do apótema é 8 cm.



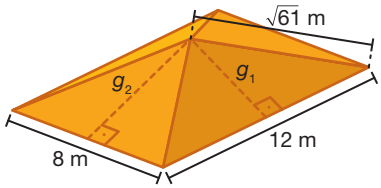
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

77. **a)** Sendo g a medida do apótema da pirâmide inferior, temos:

$g^2 + 3^2 = 8^2 \Rightarrow g = \sqrt{55}$ $\qquad A_l = 4 \cdot \frac{6\sqrt{55}}{2} = 12\sqrt{55}$

Assim, foram utilizados, no mínimo, $12\sqrt{55}$ cm² de papel para encapar a parte inferior.

78.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Temos duas medidas de apótema diferentes, logo:

$g_1^2 + 6^2 = \left(\sqrt{61}\right)^2 \Rightarrow g_1 = 5$

$g_2^2 + 4^2 = \left(\sqrt{61}\right)^2 \Rightarrow g_2 = 3\sqrt{5}$

Área do telhado: $A_l = 2 \cdot \frac{12 \cdot 5}{2} + 2 \cdot \frac{8 \cdot 3 \cdot \overset{\sqrt{5}}{\overline{2,2}}}{2} = 112{,}8$

Telhas necessárias: $112{,}8 \cdot 16 + 195 = 1999{,}8$

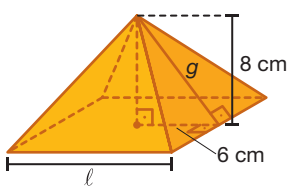
Assim, serão necessárias, no mínimo, 2 000 telhas.

79. Área de cada face: $A_F = \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Área da superfície: $A_t = 8 \cdot A_l = \frac{8\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$

Logo, a área da superfície de cada pingente é $2\sqrt{3}$ cm².

80.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Apótema lateral: $g^2 = 6^2 + 8^2 = 10$

Área lateral: $A_l = 4 \cdot \frac{12 \cdot 10}{2} = 240$

Área da base: $A_b = 12^2 = 144$

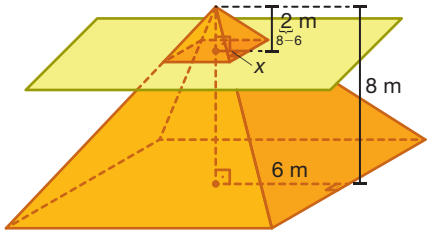
Área total da embalagem: $A_t = 240 + 144 = 384$

Área do papel de presente: $A_p = 15 \cdot 25 = 375$

Diferença entre a embalagem e o papel: $A = 384 - 375 = 9$

Portanto, faltarão 9 cm² de papel para encapar a embalagem.

82.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Proporcionalidade entre as pirâmides: $\frac{2}{x} = \frac{8}{6} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Área da base: $A_b = (2x)^2 = \left(2 \cdot \frac{3}{2}\right)^2 = 9$

Volume da pirâmide menor: $V = \frac{9 \cdot 2}{3} = 6$

Logo, o volume da pirâmide menor é 6 m³.

83. Área da base: $V = \frac{A_b \cdot h}{3} \Rightarrow 20 = \frac{A_b \cdot 5}{3} \Rightarrow A_b = 12$

Os possíveis comprimentos inteiros das arestas da base são: 1 cm e 12 cm; 2 cm e 6 cm; 3 cm e 4 cm.

84. **a)** • comprimento do apótema da pirâmide: 3 cm;

• comprimento da aresta da base: 2 cm.

Comprimento do apótema da base:

$m^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow m = \sqrt{3}$

Assim, o comprimento do apótema da base é $\sqrt{3}$ cm.

b) Área da base: $A_b = 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 6\sqrt{3}$

Área total: $A_t = 6 \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + 6\sqrt{3} = 6 \cdot \left(3 + \sqrt{3}\right)$

Portanto, a área da base é $6\sqrt{3}$ cm² e a área total é $6 \cdot \left(3 + \sqrt{3}\right)$ cm².

c) Indicando a altura por h, temos:

$h^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow h = \sqrt{6}$ $\qquad V = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{3} = 6\sqrt{2}$

A pirâmide, quando construída, terá um volume de $6\sqrt{2}$ cm³.

85. • Pirâmide $ABCDV$: $V = \frac{(a \cdot b) \cdot h}{3} = \frac{abh}{3}$

• Pirâmide $EFGHV$: $V = \frac{\left(\frac{a \cdot b}{2}\right) \cdot h}{3} = \frac{abh}{6}$

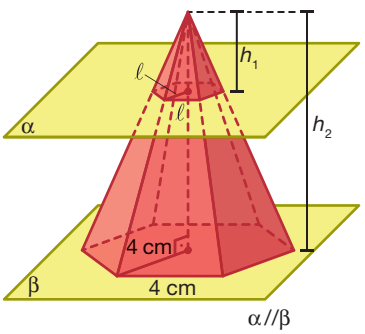
Razão entre os volumes: $\frac{\frac{abh}{6}}{\frac{abh}{3}} = \frac{1}{2}$

Assim, a razão entre os volumes das pirâmides $EFGHV$ e $ABCDV$ é $\frac{1}{2}$.

86. Volume da pirâmide: $\frac{50^2 \cdot 60}{3} = 50\,000$. Sabe-se que os trabalhadores levavam cerca de 1 mês para construir 500 m³. Então, $\frac{50\,000}{500} = 100$.

O tempo necessário para a conclusão da obra foi 100 meses ou 8 anos e 4 meses.

88.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Volume da pirâmide cuja base está contida no plano β:

$$72\sqrt{3} = \frac{6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \cdot h_2}{3} \Rightarrow h_2 = 9$$

Assim:

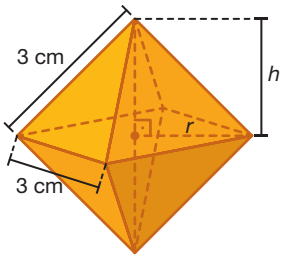
$\frac{h_1}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow h_1 = 3$ $\qquad$ $\frac{3}{\ell} = \frac{9}{4} \Rightarrow \ell = \frac{4}{3}$

Volume da pirâmide com base no plano α:

$$V = \frac{6 \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Logo, o volume da pirâmide com base no plano α é $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm³.

89.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$(2r)^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$h^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$V = 2 \cdot \frac{3^2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}}{3} = 9\sqrt{2}$

Massa da pedra: $9\sqrt{2} \cdot 19{,}3 \simeq 245$

Portanto, a massa da pedra de ouro é aproximadamente 245 g.

90. a) Indicando por a o comprimento da aresta do octaedro, temos:

$$a^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow a = 10\sqrt{2}$$

Área da superfície do octaedro:

$$A = 8 \cdot \frac{\left(10\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 400\sqrt{3}$$

Assim, a área da superfície do octaedro é $400\sqrt{3}$ cm².

b) Como o octaedro é formado por 2 pirâmides regulares de base quadrada, temos:

$$V = 2 \cdot \frac{\left(10\sqrt{2}\right)^2 \cdot 10}{3} = \frac{4\,000}{3}$$

Subtraindo o volume da caixa pelo volume do objeto:

$$20^3 - \frac{4\,000}{3} = \frac{20\,000}{3}$$

Logo, o volume que permaneceu na caixa é $\frac{20\,000}{3}$ cm³ ou $\frac{20}{3}$ L.

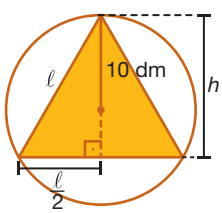
91. O apótema do triângulo equilátero corresponde a $\frac{1}{3}h$. Assim, temos:

$10 = \frac{2}{3}h \Rightarrow h = 15$

$\ell^2 = 15^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell = 10\sqrt{3}$

$V = \frac{10^3 \cdot \sqrt{3^3} \cdot \sqrt{2}}{12} = 250\sqrt{6}$

Assim, o volume é $250\sqrt{6}$ dm³.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

92. $A_b = \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ $\qquad$ $A_B = \frac{9^2\sqrt{3}}{4} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

$a^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow a = 4$

$A_l = 3 \cdot \frac{(9+3) \cdot 4}{2} = 72$

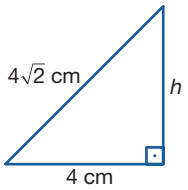
$A_t = \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{81\sqrt{3}}{4} + 72 = 9 \cdot \left(8 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

Logo, a área total desse tronco de pirâmide é $9 \cdot \left(8 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ m².

93. Indicando por ℓ o comprimento da aresta da base maior, temos:

$$\ell^2 + \ell^2 = \left(12\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \ell = 12$$

O comprimento do cateto do triângulo retângulo destacado na figura e contido na base é 4 cm.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) $h^2 + 4^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow h = 4$

Logo, o comprimento da altura do tronco de pirâmide é 4 cm.

b) $A_l = 4 \cdot \frac{(12+4) \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 128\sqrt{2}$

Logo, a área lateral do tronco de pirâmide é $128\sqrt{2}$ cm².

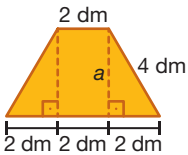
c) $A_b = 4^2 = 16$ $\qquad$ $A_B = 12^2 = 144$

$A_t = 128\sqrt{2} + 16 + 144 \Rightarrow A_t = 32 \cdot \left(4\sqrt{2} + 5\right)$

Logo, a área total desse tronco de pirâmide é $32 \cdot \left(4\sqrt{2} + 5\right)$ cm².

94.

$a^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Área lateral: $A_l = 3 \cdot \frac{(6+2) \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$

$A_b = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ $\qquad$ $A_B = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

$A_t = 24\sqrt{3} + \sqrt{3} + 9\sqrt{3} \Rightarrow A_t = 34\sqrt{3}$

Logo, a área lateral desse tronco de pirâmide é $24\sqrt{3}$ dm² e sua área total, $34\sqrt{3}$ dm².

95. • aresta da base maior:

$$A_B = 384\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \frac{\ell_1^2\sqrt{3}}{4} = 384\sqrt{3} \Rightarrow \ell_1 = 16$$

• aresta da base menor:

$$A_b = 150\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \frac{\ell_2^2\sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3} \Rightarrow \ell_2 = 10$$

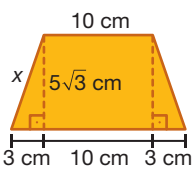
$A_t = 924\sqrt{3} \Rightarrow A_l + 150\sqrt{3} + 384\sqrt{3} = 924\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_l = 390\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \frac{(16+10) \cdot a}{2} = 390\sqrt{3} \Rightarrow a = 5\sqrt{3}$

A figura a seguir representa uma face lateral e x é a medida da aresta lateral.

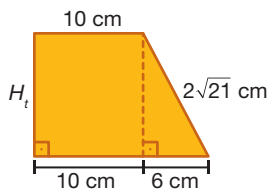
$x^2 = \left(5\sqrt{3}\right)^2 + 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2\sqrt{21}$



$H_t^2 + 6^2 = \left(2\sqrt{21}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow H_t = 4\sqrt{3}$

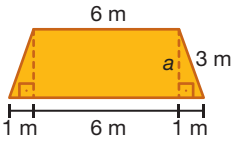


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, os comprimentos das arestas da base são 16 cm e 10 cm e a altura desse tronco de pirâmide é $4\sqrt{3}$ cm.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

96.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Altura da face lateral: $a^2 + 1^2 = 3^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$

Área da face lateral: $A_l = 4 \cdot \frac{(8+6)\cdot 2\sqrt{2}}{2} = 56\sqrt{2}$

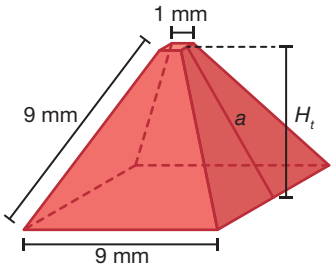
Área da base menor: $A_b = 6^2 = 36$

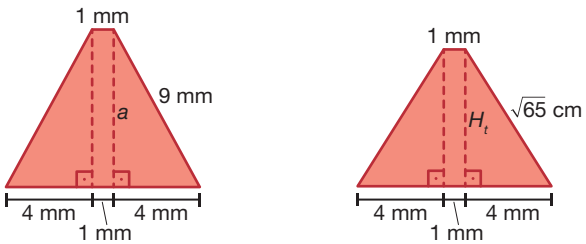
Área da base maior: $A_B = 8^2 = 64$

Area total: $A_t = 36 + 64 + 56\sqrt{2} = 4 \cdot \left(25 + 14\sqrt{2}\right)$

Assim, a área total desse tronco é $4 \cdot \left(25 + 14\sqrt{2}\right)$ m².

97.





ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$a^2 + 4^2 = 9^2 \Rightarrow a = \sqrt{65}$

$H_t^2 + 4^2 = \left(\sqrt{65}\right)^2 \Rightarrow H_t = 7$

$V_{tronco} = \frac{7}{3} \cdot \left(\sqrt{1^2 \cdot 9^2} + 1^2 + 9^2\right) = \frac{637}{3}$

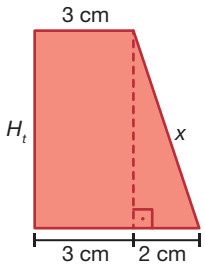
Assim, o volume desse tronco de pirâmide é $\frac{637}{3}$ mm³.

98. Dobro do volume: $2V_{tronco} = 2 \cdot \frac{30}{3} \cdot \left(\sqrt{15^2 \cdot 25^2} + 15^2 + 25^2\right)$

$V_{tronco} = 24\,500$

Assim, o volume do concreto é 24 500 cm³.

99. Indicando por x a aresta lateral e por H_t a altura do tronco, temos:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$V_{tronco} = 233$

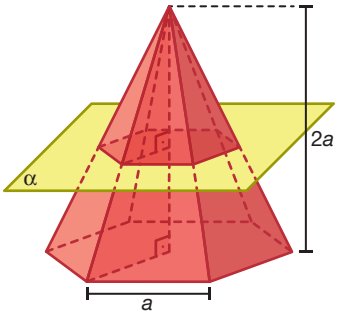
$\frac{H_t}{3} \cdot \left(\sqrt{13{,}5\sqrt{3} \cdot 37{,}5\sqrt{3}} + 13{,}5\sqrt{3} + 37{,}5\sqrt{3}\right) = 233 \Rightarrow$

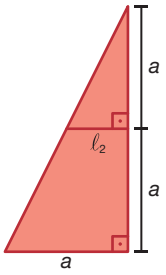
$\Rightarrow H_t\left(\sqrt{1518{,}75} + 51\sqrt{3}\right) = 699 \Rightarrow H_t \simeq 5{,}5$

$x^2 = 5{,}5^2 + 2^2 \Rightarrow x \simeq 5{,}9$

Logo, o comprimento da aresta lateral desse tronco de pirâmide é aproximadamente 5,9 cm.

100. a)





ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$\frac{a}{\ell_2} = \frac{2a}{a} \Rightarrow \ell_2 = \frac{a}{2}$ $\qquad A_b = 6 \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$

b) $V = \frac{\frac{3a^2\sqrt{3}}{8} \cdot a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

c) $A_B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$V_t = \frac{a}{3} \cdot \left(\sqrt{\frac{3a^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{8} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{7a^3\sqrt{3}}{8}$

101. a) A altura do subsolo do monumento é $(81 - 72 = 9)$ 9 m.

b) Calculando 10% das dimensões originais, temos:

$\ell_1 = 0{,}1 \cdot 9 = 0{,}9 \Rightarrow A_B = 0{,}9^2 = 0{,}81$

$\ell_2 = 0{,}1 \cdot 7 = 0{,}7 \Rightarrow A_b = 0{,}7^2 = 0{,}49$

$H_t = 0{,}1 \cdot 72 = 7{,}2$

$V_{tronco} = \frac{7{,}2}{3} \cdot \left(\sqrt{0{,}49 \cdot 0{,}81} + 0{,}49 + 0{,}81\right)$

$V_{tronco} = 4{,}632$

Assim, a quantidade necessária de material é 4,632 m³.

102. a) $A_b = 4 \cdot 3 - \frac{2 \cdot 1{,}5}{2} = 10{,}5$ $\qquad A_B = 10 \cdot 6 - \frac{5 \cdot 3}{2} = 52{,}5$

$A_b + A_B = 10{,}5 + 52{,}5 = 63$

Portanto, a soma é 63 cm².

b) Áreas das bases antes da seção:

$A_b = 4 \cdot 3 = 12$ $\qquad A_B = 10 \cdot 6 = 60$

$V_{tronco} = \frac{9}{3} \cdot \left(\sqrt{12 \cdot 60} + 12 + 60\right) = 36 \cdot \left(\sqrt{5} + 6\right)$

Assim, o volume do tronco antes da seção é $36 \cdot \left(\sqrt{5} + 6\right)$ cm³.

c) Áreas das bases obtidas pela seção:

$A_b = \frac{2 \cdot 1{,}5}{2} = \frac{3}{2}$ $\qquad A_B = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$

$V_{tronco} = \frac{9}{3} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{15}{2}} + \frac{3}{2} + \frac{15}{2}\right) = 9 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 3\right)$

Assim, o volume do tronco da pirâmide antes da seção é $9 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 3\right)$ cm³.

103. $A_b = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$ $\qquad A_B = 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}$

$V_{tronco} = \frac{3}{3} \cdot \left(\sqrt{24\sqrt{3} \cdot 54\sqrt{3}} + 24\sqrt{3} + 54\sqrt{3}\right) = 114\sqrt{3}$

Logo, o volume de plástico utilizado na confecção desse troféu foi $114\sqrt{3}$ cm³.

104. $A_b = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ $\qquad A_B = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

$V_{tronco} = \frac{3}{3} \cdot \left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{4} = 2{,}975$

O volume do tronco é 2,975 m³. Como 1 m³ = 1000 L, então esse reservatório é capaz de armazenar, no máximo, 2 975 L.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

105. A parte submersa da pirâmide é um tronco de pirâmide cujo volume, em cm^3, é:

$V_{tronco} = 20^2 \cdot 4 = 1600$ $\qquad \frac{A_B}{A_b} = \left(\frac{30}{15}\right)^2 \Rightarrow A_B = 4A_b$

$$\frac{15}{3} \cdot \left(\sqrt{A_b \cdot 4A_b} + A_b + 4A_b\right) = 1600 \Rightarrow A_b = \frac{320}{7}$$

O volume da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{\frac{320}{7} \cdot 15}{3} + 1600 = \frac{12\,800}{7}$$

Portanto, o volume dessa pirâmide é $\frac{12\,800}{7}$ cm^3.

Acessando tecnologias (páginas 172 e 173)

1. Caso as respostas do usuário dadas às perguntas, sejam 6 e 12, respectivamente, temos:

- O poliedro é composto de faces $F = 6$ e arestas $A = 12$.
- Seguindo o algoritmo dado:
  $V = A + 2 - F \Rightarrow V = 12 + 2 - 6 \Rightarrow V = 8$.

Portanto, de acordo com as respostas dadas pelo usuário, a mensagem exibida no **Palco** é "A quantidade de vértices é 8".

2. O algoritmo em linguagem Scratch referente a essa tarefa está apresentado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

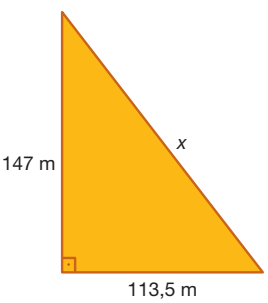
Educação midiática (páginas 182 e 183)

1. Por meio da ação dos algoritmos que coletam dados e informações sobre as preferências e os interesses dos usuários com base em suas interações *on-line*, filtrando os conteúdos para que só cheguem as informações alinhadas aos interesses e às opiniões deles.

Desenvolvimento sustentável (páginas 208 e 209)

1. Tratar dos patrimônios culturais da humanidade e a importância de preservá-los, trazendo como exemplo o Complexo de Pirâmides de Gizé, no Egito, especificamente a Grande Pirâmide, apresentando algumas características dessa construção.

2. Indicando x por altura da face lateral da pirâmide, temos:



KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

$(113{,}5)^2 + (147)^2 = x^2 \Rightarrow x = 185{,}7$

$A_l = 4 \cdot \frac{185{,}7 \cdot 227}{2} = 84\,307{,}8$

Assim, a quantidade de rocha calcária polida foi de, aproximadamente, 84 308 m^2.

3. $V = \frac{227^2 \cdot 147}{3} = 2\,524\,921$

Assim, o volume da Grande Pirâmide de Gizé, com sua altura original, seria 2 524 921 m^3.

Síntese do capítulo (página 215)

3. De acordo com a planificação, podemos analisar que o poliedro convexo é formado por 2 poliedros, um paralelepípedo Q e uma pirâmide de base quadrangular P. Temos:

O poliedro Q tem 6 faces quadrangulares, 8 vértices (pois os vértices das bases são compartilhados com todas as faces laterais) e, utilizando a Relação de Euler $V + F = A + 2$, temos:

$$8 + 6 - 2 = A \Rightarrow A = 12$$

Portanto, o poliedro Q é formado por 6 faces, 8 vértices e 12 arestas.

A pirâmide P tem 4 faces triangulares e 1 quadrangular, 5 vértices (pois são 4 vértices da base e 1 vértice fora dela) e, utilizando a Relação de Euler $V + F = A + 2$, temos:

$$5 + 5 - 2 = A \Rightarrow A = 8$$

Portanto, a pirâmide P é formada por 5 faces, 5 vértices e 8 arestas.

Como o poliedro Q e P compartilham uma mesma base, temos:

$V = 8 + 5 - 4 = 9$ $\qquad A = 12 + 8 - 4 = 16$

Logo, o poliedro convexo é composto de 9 vértices e 16 arestas.

5. a) Sabemos que o poliedro tem 12 vértices e é formado apenas por faces triangulares, logo $A = \frac{3F}{2}$. Por ser convexo, a Relação de Euler é verdade, logo:

$$V + F = A + 2 \Rightarrow 12 + F = \frac{3F}{2} + 2 \Rightarrow F = 20$$

Como o poliedro tem 20 faces, temos:

$$12 + 20 = A + 2 \Rightarrow A = 30$$

Assim, o poliedro tem 30 arestas e 20 faces.

b) Icosaedro regular.

c) Sim, pois todo poliedro regular é um Poliedro de Platão.

6. Sejam A_A, V_A e F_A as arestas, os vértices e as faces do poliedro convexo **A**, respectivamente, e A_B, V_B e F_B as arestas, os vértices e as faces do poliedro convexo **B**, respectivamente.

Temos também que $A_A = A_B \Rightarrow \frac{5F_A}{2} = \frac{3F_B}{2} \Rightarrow F_A = \frac{3F_B}{5}$ e $V_A = V_B + 8$. Como ambos são poliedros convexos, temos:

$$\begin{cases} V_A + F_A = A_A + 2 \\ V_B + F_B = A_B + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (V_B + 8) + \frac{3F_B}{5} = A_B + 2 \\ V_B + F_B = A_B + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (V_B + 8) + \frac{3F_B}{5} = V_B + F_B \Rightarrow F_B = 20$$

$$\frac{5F_A}{2} = \frac{3 \cdot 20}{2} \Rightarrow F_A = 12$$

Determinando a quantidade de arestas e vértices:

$$A_A = A_B \Rightarrow \frac{5 \cdot 12}{2} = \frac{3 \cdot 20}{2} = 30$$

$$\begin{cases} V_A + 12 = 30 + 2 \Rightarrow V_A = 20 \\ V_B + 20 = 30 + 2 \Rightarrow V_B = 12 \end{cases}$$

Assim, o poliedro **A** tem 12 faces, 20 vértices e 30 arestas e o poliedro **B**, 20 faces, 12 vértices e 30 arestas.

7. Para obter o volume de um paralelepípedo, deve-se obter o produto de suas dimensões. Portanto, deve-se multiplicar as medidas de comprimento, largura e altura.

8. O algoritmo referente a essa questão está apresentado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

9. Sugestão de resposta: Multiplicaria a medida do volume por três e dividiria esse resultado pela medida da altura.

10. $V = \frac{6}{3} \cdot \left(\sqrt{5^2 \cdot 9^2} + 5^2 + 9^2\right) = 302$

Assim, o volume da pirâmide é 302 cm^3.

CAPÍTULO 6 CORPOS REDONDOS

Abertura de capítulo

1. $T = 2 \cdot 13 + 1 = 27$

Portanto, a porcentagem de etanol na gasolina testada é de 27%.

2. Uma possibilidade para determinar a altura aproximada em que a marcação de 50 mililitros deve ser feita é calcular a altura de um cilindro cujo volume interno mede 50 mililitros (ou 50 centímetros cúbicos) e o comprimento do raio da base, 1,5 centímetro. Para calcular a altura aproximada em que a marcação de 100 mililitros deve ser feita, o procedimento é o mesmo, porém consideramos um cilindro cujo volume interno mede 100 mililitros (ou 100 centímetros cúbicos) e o comprimento do raio da base, 1,5 centímetro.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Questões

B. A veracidade da afirmação nessa questão está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

D. A veracidade da afirmação nessa questão está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Exercícios e problemas

1. A. $A_b = \pi \cdot 2^2 \Rightarrow A_b = 3{,}14 \cdot 4 \Rightarrow A_b = 12{,}56$

$A_l = 2\pi \cdot 2 \cdot 5 \Rightarrow A_l = 20 \cdot 3{,}14 \Rightarrow A_l = 62{,}8$

$A_t = 2 \cdot 12{,}56 + 62{,}8 \Rightarrow A_t = 87{,}92$

Portanto, $A_b \simeq 12{,}56$ cm², $A_l \simeq 62{,}8$ cm² e $A_t \simeq 87{,}92$ cm².

B. $A_b = \pi \cdot 3^2 \Rightarrow A_b = 3{,}14 \cdot 9 \Rightarrow A_b = 28{,}26$

$A_l = 2\pi \cdot 3 \cdot 9 \Rightarrow A_l = 54 \cdot 3{,}14 \Rightarrow A_l = 169{,}56$

$A_t = 2 \cdot 28{,}26 + 169{,}56 \Rightarrow A_t = 226{,}08$

Portanto, $A_b \simeq 28{,}26$ cm², $A_l \simeq 169{,}56$ cm² e $A_t \simeq 226{,}08$ cm².

2. $A_t = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 125 \cdot (125 + 40) \Rightarrow A_t = 129\,525$

Portanto, a área total do cilindro é aproximadamente 129 525 cm² ou 1295,25 dm².

3. $A_l = 1570 \Rightarrow 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \cdot 25 = 1570 \Rightarrow r = 10$

Portanto, o raio é aproximadamente 10 cm.

4. $A_t = 314 \Rightarrow 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot (5 + h) = 314 \Rightarrow h = 5$

Portanto, a altura é aproximadamente 5 m.

5. **a)** $A_l = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}65 \cdot 1{,}7 = 6{,}9394$

Portanto, a área da superfície lateral é aproximadamente 6,94 m².

b) $50 \cdot A_l = 50 \cdot 6{,}9394 = 346{,}97$

Portanto, a área é aproximadamente 346,97 m².

6. **a)** Ao rotacionar o retângulo em torno do eixo x, obtemos um cilindro de altura 5 u e comprimento do raio, 3 u. Assim:

$$A_t = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot (3 + 5) = 150{,}72$$

Portanto, a área é aproximadamente 150,72 unidades de área.

b) Ao rotacionar o retângulo em torno do eixo y, obtemos um cilindro de altura 3 u e comprimento do raio, 5 u. Assim:

$$A_t = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5(5 + 3) = 251{,}2$$

Portanto, a área é aproximadamente 251,2 unidades de área.

7. A altura do rótulo é 9 cm, pois $0{,}6 \cdot 15 = 9$. Agora, determinaremos o comprimento D do rótulo, que é igual à circunferência C do pote. Assim:

$$D = C = 2\pi \cdot 5 = 31{,}4$$

Área A do rótulo: $A = 9 \cdot 31{,}4 = 282{,}6$.

Portanto, a área do rótulo é aproximadamente 282,6 cm².

8. Inicialmente, determinamos a área total A_t de cada embalagem em metros quadrados.

$$A_t = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}175(0{,}175 + 0{,}35) \Rightarrow A_t \simeq 0{,}577$$

Sendo assim, a área total de 125 embalagens é aproximadamente 72,125 m². Consequentemente, temos:

$$\frac{350}{x} = \frac{2{,}5}{72{,}125} \Rightarrow x = 10\,097{,}5$$

Portanto, são necessários aproximadamente 10 097,5 mL de tinta.

9. Inicialmente, calculamos a área da superfície lateral A_1 dos seis pilares com 30 cm, ou seja, 0,3 m de diâmetro e 3,5 m de altura em metros quadrados.

$$A_1 = 6 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}15 \cdot 3{,}5 = 19{,}782$$

Agora, calculamos a área da superfície lateral A_2 do outro pilar.

$$A_2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}15 \cdot 5 = 4{,}71$$

Como $A_1 + A_2 = 24{,}492$, segue que:

$$\frac{900}{x} = \frac{9}{24{,}492} \Rightarrow x = 2\,449{,}2$$

Portanto, serão necessários aproximadamente 2 450 mL ou 2,45 L.

11. Seja C o comprimento do AquaDom. Assim:

$$A_l = 2\pi rh \Rightarrow A_l = C \cdot h \Rightarrow A_l = 34{,}54 \cdot 25 = 863{,}5$$

Portanto, a área da superfície lateral era de 863,5 m².

12. A área máxima ocorre quando o comprimento C da circunferência da base é 15,7 cm. Assim:

$$C = 15{,}7 \Rightarrow 2 \cdot 3{,}14 \cdot r = 15{,}7 = 2{,}5$$

$$A_b = 3{,}14 \cdot (2{,}5)^2 = 19{,}625$$

Portanto, a área máxima será de aproximadamente 19,625 cm².

13. $A_b = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$; $A_l = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10 = 60\pi$; $9\pi + 60\pi = 69\pi$.

Assim: $\frac{130}{69\pi} \simeq 0{,}6$. Portanto, em 1 cm² dessa chapa há aproximadamente 0,6 g de metal.

14. A. $V = 3{,}14 \cdot 1{,}5^2 \cdot 8 = 56{,}52$. Portanto, o volume desse cilindro é aproximadamente 56,52 m³.

B. $V = 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 10 = 502{,}4$. Portanto, o volume desse cilindro é aproximadamente 502,4 m³.

C. $V = 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 6 = 169{,}56$. Portanto, o volume desse cilindro é aproximadamente 169,56 m³.

D. $V = 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 5 = 565{,}2$. Portanto, o volume desse cilindro é aproximadamente 565,2 m³.

15. $V = 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 20 = 251{,}2$. Portanto, foram usados aproximadamente 251,2 cm³ de parafina.

16. $V = 15\pi \Rightarrow \pi r^2 \cdot 3 = 15\pi \Rightarrow r = \sqrt{5}$. Portanto, o comprimento do raio da base é $\sqrt{5}$ cm.

17. $V = 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 4 = 113{,}04$. Logo, o volume desse reservatório é aproximadamente 113,04 m³. Como 1 m³ = 1000 L, segue que:

$$113{,}04 \text{ m}^3 = 113{,}04 \cdot 1\,000 \text{ L} = 113\,040 \text{ L}$$

Portanto, a capacidade desse reservatório é aproximadamente 113 040 L.

18. A. Ao rotacionar o retângulo, obtemos um cilindro cujo comprimento do raio da base é 2 cm e a altura, 4 cm. Assim: $V = 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 4 = 50{,}24$.

Portanto, o volume é aproximadamente 50,24 cm³.

B. Ao rotacionar o retângulo, obtemos um cilindro cujo comprimento do raio da base é 8 cm e a altura, 3,7 cm. Assim: $V = 3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 3{,}7 \simeq 743{,}55$.

Portanto, o volume é aproximadamente 743,55 cm³.

19. Como 1 cm³ = 1 mL, temos: $628 = 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot h \Rightarrow 8$.

Portanto, deve-se encher a jarra até aproximadamente 8 cm de altura.

20. $81 = 3 \cdot r^2 \cdot 3 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$. Logo, o aumento deve ser em torno de 2 m, pois $3 - 1 = 2$. Portanto, a alternativa **c** é a correta.

21. **a)** A área da superfície A_s é:

$A_s = \pi 4^2 + 2\pi \cdot 4 \cdot 8 + \pi \cdot 10^2 + 2\pi \cdot 10 \cdot 9 + \pi \cdot 10^2 - \pi 4^2$

$A_s = 444\pi = 1\,394{,}16$

Portanto, a área desejada é aproximadamente 1394,16 cm².

b) Sejam C_1 e C_2 os cilindros que compõem o sólido. O volume V_s é:

$V_s = V_{C_1} + V_{C_2} = 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 8 + 3{,}14 \cdot (10)^2 \cdot 9 = 3\,227{,}92$

Portanto, o volume do sólido é aproximadamente 3 227,92 cm³.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

22. **a)** Chamando *A*, *B* e *C*, respectivamente, os furos de 8 cm, 15 cm e 12 cm de diâmetro, temos:

$V_A + V_B + V_C =$

$= 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 20 + 3{,}14 \cdot 7{,}5^2 \cdot 20 + 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 20 =$

$= 1004{,}8 + 3532{,}5 + 2260{,}8 = 6798{,}1$

Portanto, o volume de metal retirado é aproximadamente 6 798,1 cm^3.

b) $V = 50 \cdot 60 \cdot 20 - 6798{,}1 = 53201{,}9$

Portanto, o volume da peça é aproximadamente 53 201,9 cm^3.

23. Seja *V* o volume do tanque. Assim:

$$\underbrace{0{,}05}_{5\%} \cdot V = 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 0{,}25 \Rightarrow V = \frac{3{,}14}{0{,}05} = 62{,}8$$

Logo, o volume total de água que cabe no tanque é aproximadamente 63 m^3. Portanto, a alternativa **c** é a correta.

24. $V = 3{,}14 \cdot 6{,}5^2 \cdot (14 - 9) \simeq 663{,}33$

Portanto, o volume do sólido é aproximadamente 663,33 cm^3.

25. $0{,}058875\ m^3 = 0{,}058875 \cdot 1000000\ cm^3 = 58875\ cm^3$

$$\frac{58875}{1000} = 58{,}875$$

Logo, para produzir uma unidade, são necessários 58,875 cm^3 de alumínio. Assim:

$$58{,}875 = 3{,}14 \cdot 1{,}25^2 \cdot h \Rightarrow h = 12$$

Portanto, a altura é aproximadamente 12 cm.

26. Seja *V* o volume do reservatório do caminhão. Assim:

$V = 3{,}14 \cdot 0{,}9^2 \cdot 6 = 15{,}2604$.

Sendo assim, temos: $\frac{3}{7}V = \frac{45{,}7812}{7} \simeq 6{,}54$. Portanto, a alternativa **c** é a correta.

27. Sejam r_1 e r_2 os raios da base de C_1 e C_2, respectivamente. Desse modo:

$$\pi r_1^2 = 2\pi r_1^2 \Rightarrow r_1^2 = 2r_1^2$$

Assim:

$V_{C_1} = V_{C_2} \Rightarrow \pi r_1^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2 \Rightarrow 2r_2^2 \cdot h_1 = r_2^2 \cdot h_2 \Rightarrow h_2 = 2h_1$

Portanto, a alternativa **c** é a correta.

28. Denotando por *V* o volume do galpão, temos:

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 12}{2} + 8 \cdot 12 \cdot 3 = 589{,}44$$

Assim, o volume do galpão é 589,44 m^3. Desse modo, o número *P* de pontos a serem instalados é dado por:

$$P = \frac{589{,}44}{120} = 4{,}912$$

Portanto, serão instalados 5 pontos de refrigeração.

29. Seja *V* a capacidade interna do reservatório. Assim:

$$V = 3{,}14 \cdot (1{,}265)^2 \cdot 6 \simeq 30{,}15$$

Consequentemente, temos: $0{,}8 \cdot V \simeq 0{,}8 \cdot 30{,}15 = 24{,}12$.

Logo, serão abastecidos aproximadamente 24,12 m^3, ou seja, 24 120 L. Assim:

$$\frac{24120\ L}{10\ L/s} = 2412\ s = 40\ min$$

Portanto, serão necessários aproximadamente 40 minutos.

30. $V = (10 + 3)^3 + 8^3 + \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 10}{2} = 2960{,}2$. Portanto, o volume da peça é aproximadamente 2 960,2 cm^3.

31. $V = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot h}{4} \Rightarrow V = \frac{\pi \cdot \left(\frac{1{,}2 + 0{,}8}{2}\right)^2 \cdot 20}{4} = 15{,}7$.

Portanto, o volume dessa tora é aproximadamente 15,7 m^3.

32. Volume interno do recipiente: $V_r = 3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 85 = 60052{,}5$

Volume da substância:

$V_s = 0{,}65 \cdot V_r = 0{,}65 \cdot 60052{,}5 \simeq 39034{,}13$

Como 1 cm^3 = 0,001 L, temos $V_s \simeq 39{,}03$ L. Logo, a massa *M*, em quilogramas, do recipiente após o armazenamento da substância é:

$$M \simeq 5 + 1{,}3 \cdot 39{,}03 \simeq 55{,}7$$

Portanto, a massa é aproximadamente 55,7 kg.

33. Seja V_1 o volume de água contido no balde em decímetros cúbicos. Assim:

$$V_1 = \pi \cdot 1{,}25^2 \cdot 0{,}8 = 1{,}25\pi$$

Sendo *V* o volume captado, em decímetros cúbicos, por um cubo cuja área da base é 1 m^2, segue que: $\frac{1{,}5625\pi}{10 \cdot 10} = \frac{1{,}25\pi}{V} \Rightarrow V = 80$. Como 1 dm^3 = 1 L, concluímos que choveu 80 L por metro quadrado. Portanto, a precipitação ocorrida nessa propriedade foi 80 mm.

34. Seja *h* a altura do palmito. Assim:

$$84{,}78 = 3{,}14 \cdot (1{,}5)^2 \cdot h \Rightarrow h = 12$$

Portanto, a altura do palmito é aproximadamente 12 cm.

35. Seja *V* o volume do balde em metros cúbicos. Assim:

$$V = 3{,}14 \cdot 0{,}35 \cdot (0{,}14)^2 \simeq 0{,}022$$

Como 250 L = 0,25 m^3, segue que:

$$0{,}25 = A_b \cdot 0{,}64 \Rightarrow A_b \simeq 0{,}39$$

Ou seja, a área da base da caixa-d'água é aproximadamente 0,39 m^2. Consequentemente, sendo *h* a altura que o nível da água atingirá, temos:

$$5 \cdot 0{,}022 = 0{,}39 \cdot h \Rightarrow h \simeq 0{,}28$$

Portanto, a altura do nível da água será de aproximadamente 0,28 m ou 28 cm.

36. Área da base do prisma hexagonal: $A_b = \frac{6 \cdot 5^2\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$.

Indicando por *r* e *h*, respectivamente, o comprimento do raio da base do cilindro e a altura do cilindro e do prisma, temos:

$$\pi r^2 h = \frac{75\sqrt{3}}{2} \cdot h \Rightarrow r^2 = \frac{75\sqrt{3}}{2\pi} \Rightarrow r \simeq 4{,}55$$

Portanto, o comprimento do raio da base do cilindro é aproximadamente 4,55 cm.

37. Sejam A_1, A_2 e A_3, respectivamente, a área da superfície das embalagens **A**, **B** e **C** em metros quadrados. Além disso, sejam V_1, V_2 e V_3, respectivamente, o volume das embalagens **A**, **B** e **C** em metros cúbicos.

- $A_1 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}09 \cdot (0{,}34 + 0{,}09) = 0{,}243036$
- $V_1 = 3{,}14 \cdot (0{,}09)^2 \cdot 0{,}34 = 0{,}00864756$
- $A_2 = 2 \cdot (0{,}305 \cdot 0{,}193 + 0{,}14432 \cdot 0{,}193 + 0{,}14432 \cdot 0{,}305) =$ $= 0{,}26147272$
- $V_2 = 0{,}305 \cdot 0{,}193 \cdot 0{,}14432 = 0{,}0084953968$
- $A_3 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}12 \cdot (0{,}19125 + 0{,}12) = 0{,}234558$
- $V_3 = 3{,}14 \cdot (0{,}12)^2 \cdot (0{,}19125) = 0{,}00864756$

a) Pelos cálculos, as embalagens que têm o mesmo volume são **A** e **C**.

b) A área superficial da embalagem **C** é menor do que da embalagem **A**. Assim, o fabricante deverá optar pela embalagem **C**.

c) O custo total *C* para produzir 1500 embalagens é:

$$C = 32{,}50 \cdot 1500 \cdot 0{,}234558 \simeq 11435$$

Portanto, o gasto total será de aproximadamente R$ 11 435,00.

38. Como 0,66 L = 0,00066 m^3, em 5 minutos (300 segundos) serão abastecidos 0,198 m^3, pois: $0{,}00066 \cdot 300 = 0{,}198$. Sendo assim:

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

$$0{,}198 = 3{,}14 \cdot (0{,}65)^2 \cdot h \Rightarrow h \simeq 0{,}15$$

Portanto, a altura do nível da água será aproximadamente 0,15 m ou 15 cm.

39. Inicialmente, calculamos o volume V da taça em centímetros cúbicos.

$$V = 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 36 = 2\,826$$

Indicando por v o volume do outro metal em centímetros cúbicos, temos:

$$\bullet\ 19{,}3 = \frac{\frac{3}{4}m}{(2\,826 - v)} \Rightarrow 3m + 77{,}2v = 218\,167{,}2$$

$$\bullet\ 6{,}1 = \frac{\frac{1}{4}m}{v} \Rightarrow m - 24{,}4v = 0$$

Assim: $\begin{cases} 3m + 77{,}2v = 218\,167{,}2 \\ m - 24{,}4v = 0 \end{cases}$.

Logo, $v \simeq 1\,451$ e $m \simeq 35\,394$. Assim, a massa da taça é aproximadamente 35 400 g ou 35,4 kg. Portanto, a alternativa **a** é a correta.

40. Como o objeto tem formato de cilindro equilátero, temos que a embalagem terá formato de cubo, cujo comprimento das arestas internas é igual à altura do cilindro. Indicando por h a altura do objeto cilíndrico, temos:

$$3\,215{,}36 = \pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h \Rightarrow h^3 = 4\,096$$

Portanto, o volume interno é aproximadamente 4 096 cm³.

42. A altura de cada uma das peças é 10 cm, pois 50 **:** 5 = 10. Assim:

$$16\,956 = \pi \cdot x^2 \cdot 10 + \pi \cdot (x+2)^2 \cdot 10 + \pi \cdot (x+4)^2 \cdot 10 +$$

$$+ \pi \cdot (x+6)^2 \cdot 10 + \pi \cdot (x+8)^2 \cdot 10 = 10\pi(5x^2 + 40x + 120)$$

Consequentemente, temos:

$$10\pi(5x^2 + 40x + 120) = 16\,956 \Rightarrow 5x^2 + 40x - 420 = 0$$

Logo, $x = -14$ ou $x = 6$. Como $x > 0$, segue que $x = 6$. Portanto, estes são os comprimentos aproximados dos raios da base de cada peça: amarela, 6 cm; verde, 8 cm; roxa, 10 cm; azul, 12 cm; vermelha, 14 cm.

43. Seja V_s o volume total do suco na garrafa e V_c o volume do copo. Assim, o volume V_r de suco restante na garrafa após o suco ser despejado no copo é dado por:

$$V_{\text{restante}} = V_{\text{suco}} - V_{\text{copo}} = 3 \cdot 4^2 \cdot 13 - 3 \cdot 2^2 \cdot 7 = 540$$

Logo, o volume de suco restante na garrafa é aproximadamente 540 cm³. Portanto, a alternativa **c** é a correta.

44. Calculando a geratriz, temos: $g^2 = 25^2 + 114^2 \Rightarrow g \simeq 116{,}7$.

Assim, $g \simeq 116{,}7$ m. Logo: $A_t = 3{,}14 \cdot 25 \cdot 116{,}7 \Rightarrow A_t \simeq 9\,161$.

Portanto, a área total é aproximadamente 9 161 m².

45. Calculando a geratriz, temos: $g^2 = 10^2 + 24^2 \Rightarrow g = 26$.

a) Ao rotacionar o triângulo em torno do menor cateto, obtemos um cone reto com 10 cm de altura e comprimento do raio da base 24 cm.

Assim: $A_t = 3{,}14 \cdot 24 \cdot (24 + 26) = 3\,768$. Portanto, a área total é aproximadamente 3 768 cm².

b) Ao rotacionar o triângulo em torno do maior cateto, obtemos um cone reto com 24 cm de altura e comprimento do raio da base 10 cm. Assim:

$$A_t = 3{,}14 \cdot 10 \cdot (10 + 26) = 1\,130{,}4$$

Portanto, a área total é aproximadamente 1 130,4 cm².

46. Inicialmente, calculamos a área da base (A_{b_1}), a geratriz g_1 e a área da superfície lateral (A_{l_1}) do cone apresentado.

$\bullet\ A_{b_1} = \pi \cdot 12^2 = 144\pi$

$\bullet\ g_1^2 = 10^2 + 12^2 \Rightarrow g_1 = 2\sqrt{61}$

$\bullet\ A_{l_1} = \pi \cdot 12 \cdot 2\sqrt{61} \Rightarrow A_{l_1} = 24\pi\sqrt{61}$

Assim, a área da base é 144π cm², a geratriz, $2\sqrt{61}$ cm e a área lateral, $24\pi\sqrt{61}$ cm².

Logo:

$$\pi \cdot 12 \cdot g = 48\pi\sqrt{61} \Rightarrow g = 4\sqrt{61}$$

$$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow \left(4\sqrt{61}\right)^2 = h^2 + 12^2 \Rightarrow h = 8\sqrt{13}$$

Portanto, a altura é $8\sqrt{13}$ cm.

47. A veracidade da afirmação dessa tarefa está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

48. Indicando por A_1 e A_2 as áreas das superfícies dos cones maior e menor, respectivamente, e por g_1 e g_2 suas respectivas geratrizes, temos:

$\bullet\ g_1^2 = 12^2 + 4^2 \Rightarrow g_1 \simeq 12{,}65$

$\bullet\ A_1 = \pi \cdot 4 \cdot (4 + 12{,}65) \Rightarrow A_1 \simeq 209{,}12$

$\bullet\ g_2^2 = 8^2 + 3^2 \Rightarrow g_2 \simeq 8{,}54$

$\bullet\ A_2 = \pi \cdot 3 \cdot (3 + 8{,}54) \Rightarrow A_2 \simeq 108{,}71$

$\bullet\ A_1 - A_2 = 209{,}12 - 108{,}71 = 100{,}41$

Logo, a diferença é aproximadamente 100,41 cm². Portanto, a alternativa **c** é a correta.

49. O sólido obtido corresponderá à união de um cone reto de raio $r = 8$ cm, geratriz g e altura $h_1 = 6$ cm (pois $6 = 14 - 8$), com um cilindro reto de mesmo raio e altura $h_2 = 8$ cm. Além disso, temos:

$$g^2 = {h_1}^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow g = 10$$

Assim, a área total A da figura obtida é dada por:

$$A = \pi \cdot 8 \cdot 10 + 2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 8 + \pi \cdot 8^2 = 272\pi = 854{,}08$$

Portanto, a área total da figura obtida é aproximadamente 854,08 cm².

50. A. $g_A = 19^2 + 45{,}6^2 \Rightarrow g_A = 49{,}4$

$A_{t_A} = 3{,}14 \cdot 19(19 + 49{,}4) = 4\,080{,}744$

B. $g_B = 20^2 + 48^2 \Rightarrow g_B = 52$

$A_{t_B} = 3{,}14 \cdot 20(20 + 52) = 4\,521{,}6$

C. $g_C = 21{,}5^2 + 51{,}6^2 \Rightarrow g_C = 55{,}9$

$A_{t_C} = 3{,}14 \cdot 21{,}5(21{,}5 + 55{,}9) = 5\,225{,}274$

D. $g_D = 25^2 + 60^2 \Rightarrow g_D = 65$

$A_{t_D} = 3{,}14 \cdot 25(25 + 65) = 7\,065$

Área total do cilindro reto (A_R) e do cubo (A_C):

$$A_R = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15(15 + 40) = 5\,181$$

$$A_C = 6 \cdot 30^2 = 5\,400$$

Logo, $A_R < A_{t_C} < A_C$. Portanto, a alternativa **C** é a correta.

51. A. Calculando a altura, obtemos: $10^2 = h^2 + 8^2 \Rightarrow h = 6$.

Assim: $V = \dfrac{3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 6}{3} = 401{,}92$.

Portanto, o volume é aproximadamente 401,92 cm³.

B. $V = \dfrac{3{,}14 \cdot 4{,}5^2 \cdot 6}{3} \Rightarrow V = 127{,}17$.

Portanto, o volume é aproximadamente 127,17 cm³.

C. Comprimento do raio: $6{,}5^2 = 6^2 + r^2 \Rightarrow r = 2{,}5$

Volume: $V = \dfrac{3{,}14 \cdot 2{,}5^2 \cdot 6}{3} \Rightarrow V = 39{,}25$

Portanto, o volume é aproximadamente 39,25 cm³.

D. Calculando a altura, obtemos: $5^2 = h^2 + 3^2 \Rightarrow h = 4$.

Assim: $V = \dfrac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 4}{3} \Rightarrow V = 37{,}68$.

Portanto, o volume é aproximadamente 37,68 cm³.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

52. $V = 1004{,}8 \Rightarrow \frac{3{,}14 \cdot 8^2 \cdot h}{3} = 1004{,}8 \Rightarrow h = 15$

Portanto, a altura deve ser aproximadamente 15 cm.

53. $V_{cone} = \frac{V_{cilindro}}{3} \Rightarrow V_{cone} = \frac{600}{3} \Rightarrow V_{cone} = 200$

Portanto, o volume do recipiente cônico é 200 mL.

54. Indicando por r comprimento do raio da base do cone e por h sua altura, temos:

$$2\pi r = 37{,}68 \Rightarrow r = 6$$

Logo: $V = \frac{3{,}14 \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 24}{3} = 904{,}32$. Portanto, o volume do cone é aproximadamente 904,32 cm³.

55. Indicando por r comprimento do raio da base do cone correspondente ao modelo **2**, temos:

$$\frac{\pi \cdot (2{,}5)^2 \cdot 10}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 12}{3} \Rightarrow r \simeq 2{,}28$$

Portanto, o diâmetro do cone ao qual o adorno do modelo **2** se assemelha é aproximadamente 4,56 cm.

56. $A_b = 50{,}24 \Rightarrow 3{,}14 \cdot r^2 = 50{,}24 \Rightarrow r = 4$

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot (2 \cdot 4)}{3} \Rightarrow V \simeq 134$$

Portanto, o volume é aproximadamente 134 cm³.

57. A. $V_A = \frac{3{,}14 \cdot (4{,}5)^2 \cdot 10}{3} = 211{,}95$

B. $V_B = \frac{3{,}14 \cdot (4{,}5)^2 \cdot 9}{3} = 190{,}755$

C. $V_C = \frac{3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 7}{3} \simeq 183{,}17$

D. $V_D = \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 11}{3} \simeq 184{,}213$

Como 210 mL = 210 cm³, então a taça com a capacidade que mais se aproxima daquela que se deseja fabricar é a do item **A**.

58. **a)** $V = 0{,}3 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 10}{3} = 28{,}26$. Portanto, o volume de areia é aproximadamente 28,26 cm³.

b) Seja Q a quantidade de areia a ser acrescentada. Assim, temos:

$$\frac{28{,}26}{30} = \frac{28{,}26 + Q}{40} \Rightarrow Q = 9{,}42$$

Portanto, é necessário acrescentar aproximadamente 9,42 cm³ de areia.

59. $A_l = 3 \cdot A_b \Rightarrow \pi \cdot 15 \cdot g = 3 \cdot \pi \cdot 15^2 \Rightarrow g = 45$

Assim:

$$(45)^2 = (15)^2 + h^2 \Rightarrow h \simeq 42{,}43$$

Logo: $V = \frac{3{,}14 \cdot (15)^2 \cdot 42{,}43}{3} \simeq 9992{,}3$.

Assim, o volume do cone é aproximadamente 9 992,3 cm³.

60. Indicando como a e b, respectivamente, as medidas do menor cateto e do maior cateto do triângulo e como V_A e V_B, respectivamente, o volume dos cones obtidos quando giramos o triângulo em relação aos catetos a e b, temos:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{\pi \cdot b^2 \cdot a}{3}}{\frac{\pi \cdot a^2 \cdot b}{3}} = \frac{b}{a}$$

Portanto, a razão entre os volumes é $\frac{b}{a}$.

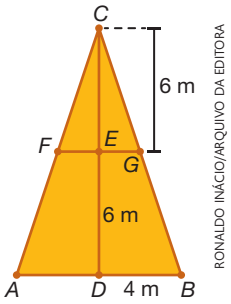
61. $V = \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 1}{3} + 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 7 + \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 2}{3} \Rightarrow V = 226{,}08$

Sendo assim, são necessários aproximadamente 158 256 kg de trigo para encher completamente o silo, pois 226,08 · 700 = = 158 256. Consequentemente, temos:

$$\frac{158\,256}{50} \simeq 3165$$

Portanto, são necessárias aproximadamente 3 165 sacas.

63. O triângulo a seguir representa a vista frontal do reservatório.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Como os triângulos $B\hat{C}D$ e $G\hat{C}E$ são semelhantes pelo caso AA, então:

$$\frac{CE}{CD} = \frac{EG}{DB} \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{EG}{4} \Rightarrow EG = 2$$

Portanto, $EG = 2$ m. Para calcular o volume de água contido no reservatório, considerando que o nível atinja apenas a metade de sua altura, podemos determinar a diferença entre o volume do cone de altura 12 m e raio da base 4 m e o volume do cone de altura 6 m e raio da base 2 m.

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 12}{3} - \frac{3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 6}{3} = 175{,}84$$

Assim, o volume de água necessário é aproximadamente 175,84 m³ ou 175 840 L. Como a vazão é 500 L por minuto, temos:

$$\frac{175\,840}{500} = 351{,}68$$

Logo, o tempo necessário para encher o reservatório até a metade da sua altura é aproximadamente 352 minutos ou 5 horas e 52 minutos. Portanto, a alternativa **c** é a correta.

64. **a)** Por semelhança de triângulos, segue que o raio r correspondente ao cone de altura igual a 3,8 cm é:

$$\frac{r}{3{,}8} = \frac{6}{41{,}8 + 3{,}8} \Rightarrow r = 0{,}5$$

Desse modo, o volume V_1 de partículas correspondente pode ser calculado como:

$$V_1 = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}5^2 \cdot 3{,}8}{3} \simeq 0{,}994$$

Portanto, há aproximadamente $\underbrace{2{,}49}_{0{,}994 \cdot 2{,}5}$ g de partículas sólidas sedimentadas.

b) Sendo V_2 o volume equivalente a 25 g de partículas, temos:

$$V_2 = \frac{25}{2{,}5} = 10$$

Por semelhança de triângulos, segue que:

$$\frac{r}{h} = \frac{6}{41{,}8 + 3{,}8} \Rightarrow r = \frac{6h}{45{,}6}$$

$$V_2 = 10 \Rightarrow \frac{3{,}14 \cdot r^2 \cdot h}{3} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3{,}14 \cdot \left(\frac{6h}{45{,}6}\right)^2 \cdot h = 30 \Rightarrow h \simeq 8{,}2$$

Portanto, elas atingem aproximadamente 8,2 cm de altura.

65. Sendo $\overline{BD}$ a altura do $\triangle ABC$ em relação ao lado $\overline{AC}$, temos:

$$(AC)^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow AC = 20$$

Assim:

- $12^2 = 20 \cdot CD \Rightarrow CD = 7{,}2$
- $16^2 = 20 \cdot AD \Rightarrow AD = 12{,}8$
- $BD^2 = 7{,}2 \cdot 12{,}8 \Rightarrow BD = 9{,}6$

Logo, o volume V do sólido é:

$$V = \frac{3{,}14 \cdot (BD)^2 \cdot (AD)}{3} + \frac{3{,}14 \cdot (BD)^2 \cdot (CD)}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{3{,}14 \cdot 9{,}6^2 \cdot 12{,}8}{3} + \frac{3{,}14 \cdot 9{,}6^2 \cdot 7{,}2}{3} \Rightarrow V \simeq 1929{,}2$$

Portanto, o volume é aproximadamente 1929,2 cm³.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

66. Seja V_c o volume do cone. Assim:

$$V_c = \frac{3{,}14 \cdot 1^2 \cdot 1{,}5}{3} = 1{,}57$$

Se $V_{c'}$ é o volume da parte cilíndrica da cisterna, então:

$$V_{c'} = 6 \cdot V_c \Rightarrow 3{,}14 \cdot 1^2 \cdot h = 9{,}42 \Rightarrow h = 3$$

Consequentemente, temos:

$$\frac{2}{5} \cdot h = \frac{2}{5} \cdot 3 = 1{,}2$$

Portanto, a altura da cisterna que aparece sobre a superfície do solo é aproximadamente 1,2 m.

67. O algoritmo e o fluxograma dessa tarefa estão apresentados na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

68. Comprimento da circunferência da base do cone:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot 6}{3} = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow r = 2$$

Altura do cone: $6^2 = 2^2 + h^2 \Rightarrow h \simeq 5{,}64$

Volume do cone: $V = \frac{3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 5{,}64}{3} \simeq 23{,}61$

Portanto, o volume do cone é aproximadamente 23,61 cm³.

69. Não. Sugestão de resposta: Para calcular a altura do reservatório cônico, é necessário apresentar o comprimento do diâmetro ou do raio da base.

70. Inicialmente, calculamos o volume interno disponível no recipiente cilíndrico.

$$V_s = 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 20 - 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 15 \Rightarrow V_s = 565{,}2$$

Para fazer a água transbordar, o volume da peça deverá ser maior do que 565,2 cm³. Agora, vamos calcular o volume de cada peça cônica.

$$V_A = \frac{3{,}14 \cdot (9{,}5)^2 \cdot 5\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V_a \simeq 666$$

$$V_B = \frac{3{,}14 \cdot (4\sqrt{2})^2 \cdot 5\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V_b \simeq 236{,}1$$

$$V_C = \frac{3{,}14 \cdot (4\sqrt{2})^2 \cdot 7\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V_c \simeq 331$$

$$V_D = \frac{3{,}14 \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot 6\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V_d \simeq 159{,}4$$

Portanto, a alternativa **A** é a correta.

71. Sejam r, g e h o comprimento do raio da base, o comprimento da geratriz e a altura do cone, respectivamente.

a) $A_b = 48\pi \Rightarrow \pi r^2 = 48\pi \Rightarrow r = 4\sqrt{3}$

Portanto, o comprimento do raio da base do cone é $4\sqrt{3}$ m.

b) Seja V_1 o volume do cilindro. Assim:

$$V_1 = 1152\pi \Rightarrow 48\pi \cdot (3g) = 1152\pi \Rightarrow g = 8$$

Assim:

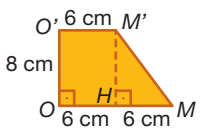
$$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 8^2 = (4\sqrt{3})^2 + h^2 \Rightarrow h = 4$$

Consequentemente, o volume V_2 do cone é:

$$V_2 = \frac{\pi \cdot (4\sqrt{3})^2 \cdot 4}{3} = 64\pi$$

Portanto, o volume do cone é 64π m³.

72. A.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Inicialmente, calculamos o comprimento da geratriz g.

$$(MM')^2 = (HM')^2 + (HM)^2 \Rightarrow g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = 10$$

Assim:

- $A_B = 3{,}14 \cdot 12^2 = 452{,}16$
- $A_b = 3{,}14 \cdot 6^2 = 113{,}04$
- $A_l = 3{,}14 \cdot 10 \cdot (12 + 6) = 565{,}2$
- $A_t = A_B + A_b + A_l = 1130{,}4$

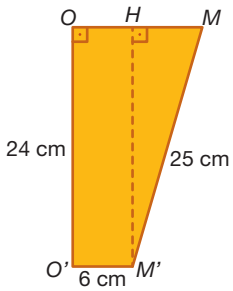
Logo, a área total é aproximadamente 1130,4 cm².

Agora, calculamos o volume do tronco.

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 8}{3} \cdot (12^2 + 12 \cdot 6 + 6^2) = 2110{,}08$$

Portanto, o volume é aproximadamente 2110,08 cm³.

B.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Inicialmente, determinamos o comprimento do raio r.

- $(MM')^2 = (HM')^2 + (HM)^2 \Rightarrow$
- $\Rightarrow 25^2 = 24^2 + (HM)^2 \Rightarrow HM = 7$
- $r = OH + HM \Rightarrow r = 6 + 7 \Rightarrow r = 13$

Assim:

- $A_B = 3{,}14 \cdot 13^2 = 530{,}66$
- $A_b = 3{,}14 \cdot 6^2 = 113{,}04$
- $A_l = 3{,}14 \cdot 25 \cdot (13 + 6) = 1491{,}5$
- $A_t = A_B + A_b + A_l = 2135{,}2$

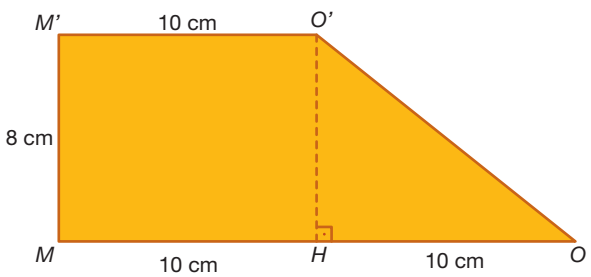
Logo, a área total é aproximadamente 2135,2 cm².

Agora, calculamos o volume do tronco.

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 24}{3} \cdot (13^2 + 13 \cdot 6 + 6^2) = 7108{,}96$$

Portanto, o volume é aproximadamente 7108,96 cm³.

C.



KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Calculando a geratriz, obtemos:

$$(OO')^2 = (HO')^2 + (HO)^2 \Rightarrow g^2 = 8^2 + 10^2 \Rightarrow g \simeq 12{,}81$$

Assim:

- $A_B = 3{,}14 \cdot 20^2 \Rightarrow A_B = 1256$
- $A_b = 3{,}14 \cdot 10^2 \Rightarrow A_b = 314$
- $A_l = 3{,}14 \cdot 12{,}81 \cdot (20 + 10) \simeq 1206{,}7$
- $A_t = A_B + A_b + A_l \simeq 2776{,}7$

Logo, a área total é aproximadamente 2776,7 cm².

Agora, calculamos o volume do tronco.

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 8}{3} \cdot (20^2 + 20 \cdot 10 + 10^2) \simeq 5861{,}33$$

Portanto, o volume é aproximadamente 5861,33 cm³.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

73. a) • $R = \frac{48}{2} = 24$

• $\frac{r}{R} = \frac{15}{45} \Rightarrow \frac{r}{24} = \frac{15}{45} \Rightarrow r = 8$

Portanto, o comprimento do raio menor é 8 cm e o do raio maior, 24 cm.

b) Inicialmente, calculamos a área total da superfície do cone menor. Para isso, seja g o comprimento da geratriz desse cone. Assim:

$$g^2 = 15^2 + r^2 \Rightarrow g = 15^2 + 8^2 \Rightarrow g = 17$$

Logo: $A_t = 3{,}14 \cdot 8 \cdot (8 + 17) = 628$.

Assim, a área total da superfície do cone menor é aproximadamente 628 cm².

Agora, calculamos a área total da superfície do tronco de cone. Para isso, inicialmente, determinamos o comprimento da geratriz G desse tronco. Assim:

$(G + 17)^2 = 45^2 + R^2 \Rightarrow G^2 + 2 \cdot G \cdot 17 + 17^2 = 45^2 + 24^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow G^2 + 34G - 2\,312 = 0 \Rightarrow G = 34$

Assim:

• $A_B = 3{,}14 \cdot 24^2 = 1\,808{,}64$

• $A_b = 3{,}14 \cdot 8^2 = 200{,}96$

• $A_l = 3{,}14 \cdot 34 \cdot (24 + 8) = 3\,416{,}32$

• $A_t = A_B + A_b + A_\ell = 5\,425{,}92$

Portanto, a área total da superfície do tronco de cone é aproximadamente 5 425,92 cm².

74. Inicialmente, vamos calcular a área da superfície externa de cada modelo de vaso.

Modelo **A**: Inicialmente, calculamos o raio r_A da parte superior do vaso.

$$(20)^2 = (16)^2 + (r_A - 8)^2 \Rightarrow r_A = 20$$

Assim, a área da superfície externa do modelo **A** é:

$$A_1 = \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 20 \cdot (20 + 8) = 624\pi$$

Modelo **B**: A área da superfície externa do modelo **B** é:

$$A_2 = \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 19{,}5 \cdot (13{,}5 + 6) = 416{,}25\pi$$

Modelo **C**: Inicialmente, calculamos a geratriz g_c do vaso.

$$g_c^2 = (20 - 11)^2 + (16)^2 \Rightarrow g_c \simeq 18{,}36$$

Assim, a área da superfície externa do modelo **C** é:

$$A_3 = \pi \cdot (11)^2 + \pi \cdot 18{,}36 \cdot (20 + 11) = 690{,}16\pi$$

Logo, a ordem do maior para o menor preço é **C**, **A** e **B**. Portanto, a alternativa **e** é a correta.

75. a) $A_l = 405\pi \Rightarrow \pi \cdot 15 \cdot \left(R + \frac{R}{2}\right) = 405\pi \Rightarrow R = 18$

Logo, o comprimento do raio da base maior é 18 cm.

Consequentemente, temos: $r = \frac{18}{2} = 9$. Portanto, o comprimento do raio menor é 9 cm.

b) $15^2 = 9^2 + h^2 \Rightarrow h = 12$

Portanto, a altura do tronco é 12 cm.

c) Calculando a área total da superfície, temos:

• $A_B = \pi \cdot 18^2 = 324\pi$

• $A_b = \pi \cdot 9^2 = 81\pi$

• $A_l = \pi \cdot 15 \cdot (18 + 9) = 405\pi$

• $A_t = 324\pi + 81\pi + 405\pi \Rightarrow A_t = 810\pi$

Portanto, a área total da superfície é 810π cm².

76. Ao rotacionar o polígono, obtemos um tronco de cone com $r = 10$, $R = 19$ e $h = 12$. Sendo assim, temos: $g^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = 15$.

Agora, calculamos a área total da superfície da figura.

• $A_B = 3{,}14 \cdot 19^2 = 1133{,}54$

• $A_b = 3{,}14 \cdot 10^2 = 314$

• $A_l = 3{,}14 \cdot 15 \cdot (19 + 10) = 1\,365{,}9$

• $A_t = A_B + A_b + A_l = 2\,813{,}44$

Portanto, a área da figura obtida é aproximadamente 2 813,44 u.a.

77. Inicialmente, determinamos o comprimento da geratriz g do cone menor.

$$g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = 10$$

Sendo assim, sendo r e R o comprimento do raio da base menor e da base maior, respectivamente, temos:

$$\frac{15}{g} = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{15}{10} = \frac{R}{6} \Rightarrow R = 9.$$

Assim:

• $A_B = 3{,}14 \cdot 9^2 = 254{,}34$

• $A_b = 3{,}14 \cdot 6^2 = 113{,}04$

• $A_l = 3{,}14 \cdot 5 \cdot (9 + 6) = 235{,}5$

• $A_t = A_B + A_b + A_l = 602{,}88$

Portanto, a área total da superfície do tronco de cone é aproximadamente 602,88 cm².

78. $G^2 = 5^2 + 50^2 \Rightarrow G^2 = 5^2 + 50^2 \Rightarrow G \simeq 50{,}3$

$$A_l = 3{,}14 \cdot 50{,}3 \cdot (15 + 10) = 3\,948{,}55$$

Portanto, a área lateral tem aproximadamente 3 948,55 cm².

79. A. $V = \frac{3{,}14 \cdot 9}{3} \cdot (24^2 + 24 \cdot 36 + 36^2) \simeq 25\,773$

Portanto, o volume é aproximadamente 25 773 cm³.

B. Inicialmente, determinamos a altura do tronco.

$$25^2 = H_t^2 + 10^2 \Rightarrow H_t \simeq 22{,}9$$

Logo:

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 22{,}9}{3} \cdot (5^2 + 5 \cdot 15 + 15^2) \simeq 7\,790$$

Portanto, o volume é aproximadamente 7 790 cm³.

C. Inicialmente, calculamos a altura do tronco.

$$(26)^2 = (10)^2 + h^2 \Rightarrow h = 24$$

Logo:

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 24}{3} \cdot (30^2 + 30 \cdot 20 + 20^2) = 47\,728$$

Portanto, o volume é aproximadamente 47 728 cm³.

80. Inicialmente, calculamos a altura do tronco.

$$(25)^2 = (13 - 6)^2 + H_t^2 \Rightarrow H_t = 24$$

Logo:

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 24}{3} \cdot (13^2 + 13 \cdot 6 + 6^2) = 7\,108{,}96$$

Portanto, o volume é aproximadamente 7 108,96 cm³.

81. a) Ao rotacionar o trapézio em torno de $\overline{AB}$, obtemos um tronco de cone de altura 6 cm, raio da base menor 2 cm e raio da base maior 4 cm. Assim:

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 6}{3} \cdot (4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2) = 175{,}84$$

Portanto, o volume do tronco de cone é aproximadamente 175,84 cm³.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) Inicialmente, calculamos a altura h do trapézio $ABCD$.

$$5^2 = (9-6)^2 + h^2 \Rightarrow h = 4$$

Nesse caso, ao rotacionar o trapézio em torno de $\overline{CD}$, obtemos um tronco de cone de altura 4 cm, raio da base menor 6 cm e raio da base maior 9 cm. Assim:

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 4}{3} \cdot (6^2 + 6 \cdot 9 + 9^2) \Rightarrow V \simeq 715{,}92$$

Portanto, o volume do tronco de cone é aproximadamente 715,92 cm³.

82. Inicialmente, determinamos o comprimento da geratriz G do tronco do cone em centímetros.

$$G^2 = 75^2 + 11^2 \Rightarrow G \simeq 75{,}8$$

Agora, calculamos a área A_1 da superfície lateral do tronco de cone em centímetros quadrados.

$$A_1 = 3{,}14 \cdot 75{,}8 \cdot (15+4) \simeq 4\,522{,}23$$

Na sequência, calculamos a área A_2 de uma das bases do prisma que representa a base do cone de sinalização em centímetros quadrados.

$$A_2 = 40 \cdot 40 = 1600$$

Depois, calculamos a área A_3 da superfície lateral do prisma que representa a base do cone de sinalização em centímetros quadrados.

$$A_3 = 4 \cdot (40 \cdot 0{,}5) = 80$$

Sendo assim:

$$A_1 + A_2 + A_3 = 4\,522{,}23 + 1600 + 80 = 6\,202{,}23$$

Por fim, subtraímos do resultado obtido a área, em centímetros quadrados, de um círculo de raio 15 cm. Desse modo, obtemos a área A da superfície externa do cone.

$$A = 6\,202{,}23 - 15^2 \cdot 3{,}14 \simeq 5\,496$$

Portanto, a área da superfície externa do cone é aproximadamente 5 496 cm².

83. Seja A a área da superfície a ser pintada e G a geratriz do tronco de cone. Assim:

- $G^2 = {H_t}^2 + (R-r)^2 \Rightarrow G^2 = 40^2 + (45-15)^2 \Rightarrow G = 50$
- $A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 \cdot 80 + 3{,}14 \cdot 50 \cdot (45+15) = 16\,956$

Com uma lata, é possível cobrir 4 500 cm² de alumínio. Assim: $\frac{16\,956}{4\,500} \simeq 3{,}8$. Portanto, são necessárias 4 latas para pintar a coifa.

84. Como 1 L = 1 dm³, segue que:

$$\frac{3{,}14 \cdot H_t}{3} \cdot (35^2 + 35 \cdot 24 + 24^2) = 165\,854{,}8 \Rightarrow H_t = 60$$

Portanto, a altura é aproximadamente 60 dm.

85. **a)** $V = \frac{3{,}14 \cdot 6}{3} \cdot (13^2 + 13 \cdot 10 + 10^2) = 2\,505{,}72$. Portanto, a capacidade da assadeira é aproximadamente 2 505,72 cm³.

b) 0,75 · 2 505,72 = 1 879,29. Desse modo, devem ser acondicionados, no máximo, aproximadamente 1 879,29 cm³ ou 1 879,29 mL de massa.

86. $V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (4^2 + 4 \cdot 3 + 3^2) \Rightarrow 464{,}72 = \frac{3{,}14 \cdot h}{3} \cdot 37 \Rightarrow h = 12$

Portanto, a altura do copo é aproximadamente 12 cm.

87. Sendo V_1 o volume da peça em forma de tronco de cone, segue que:

$$V_1 = \frac{\pi \cdot H_t}{3} \cdot \left[\left(3\sqrt{13}\right)^2 + 3\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} + \left(\sqrt{13}\right)^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{169\pi H_t}{3}$$

O volume V_1 da peça deve ser igual ao volume V_2 de um cilindro com raio de 13 cm e altura de 4 cm. Então:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{169\pi H_t}{3} = \pi \cdot 13^2 \cdot 4 \Rightarrow H_t = 12$$

Portanto, a altura é 12 cm.

88. $3^2 + x^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 12 - 9 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

$$x = R - r \Rightarrow \sqrt{3} = R - \sqrt{3} \Rightarrow R = 2\sqrt{3}$$

Assim:

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 3}{3} \cdot \left[\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2\right] = 65{,}94$$

Como 1 m³ = 1 000 L, segue que a capacidade do reservatório é aproximadamente 65,94 m³ ou 65 940 L.

89. **a)** $V = \frac{3{,}14 \cdot 9}{3} \cdot (4^2 + 2 \cdot 4 + 2^2) = 263{,}76$

Como 1 cm³ = 1 mL, segue que o volume máximo que a xícara pode conter é aproximadamente 263,76 mL.

b) $\frac{2}{3} \cdot V = \frac{2}{3} \cdot 263{,}76 = 175{,}84$

Como 1 L = 1 000 mL, efetuamos: $\frac{1000}{175{,}84} \simeq 5{,}7$. Portanto, no máximo, podem ser servidas 5 xícaras.

91. Sejam V_c e V_t o volume interno da parte com formato de cilindro e o volume interno da parte com formato de tronco de cone, respectivamente. Assim:

- $V_c = 3{,}14 \cdot (1{,}5)^2 \cdot 0{,}7 = 4{,}9455$
- $V_t = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}8}{3} \cdot \left[(1{,}5)^2 + (1{,}5) \cdot (0{,}65) + (0{,}65)^2\right] \simeq 6{,}8719$

$$V_c + V_t = 4{,}9455 + 6{,}8719 = 11{,}8174$$

Como 1 m³ = 1 000 L, concluímos que a capacidade do reservatório é aproximadamente 11 817,4 L.

92. Altura da peça: $(18)^2 = (15-9)^2 + h^2 \Rightarrow h \simeq 16{,}97$.

Volume da peça:

$$V_p = \frac{3{,}14 \cdot 16{,}97}{3} \cdot \left[(15)^2 + 15 \cdot 9 + 9^2\right] - 3{,}14 \cdot 9^2 \cdot 16{,}97 \simeq 3\,517$$

Portanto, o volume dessa peça é aproximadamente 3 517 cm³.

94. **a)** Seja g a geratriz do tronco de cone. Assim:

$$A_t = 2 \cdot A_l \Rightarrow \pi \cdot (4^2 + 8^2) + \pi \cdot g \cdot (4+8) =$$

$$= 2\pi \cdot g \cdot (4+8) \Rightarrow g = \frac{80\pi}{12\pi} \Rightarrow g = \frac{20}{3}$$

Portanto, $g = \frac{20}{3}$ dm.

b) $\left(\frac{20}{3}\right)^2 = (8-4)^2 + H_t^2 \Rightarrow H_t = \sqrt{\frac{400}{9} - 16} \Rightarrow h = \frac{16}{3}$

$$V = \frac{3{,}14 \cdot \left(\frac{16}{3}\right)}{3} \cdot (8^2 + 8 \cdot 4 + 4^2) \simeq 625{,}21$$

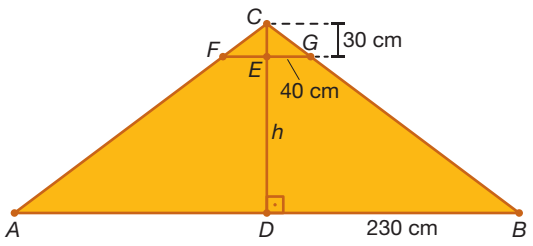
Portanto, o volume desse tronco de cone é aproximadamente 625,21 dm³.

95. Seja r o raio do círculo projetado pela lâmpada em centímetros. Assim:

$$\pi r^2 = 52\,900\pi \Rightarrow r = 230$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Assim:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Como os triângulos *DBC* e *EGC* são semelhantes pelo caso *AA*, temos:

$$\frac{40}{230} = \frac{30}{h + 30} \Rightarrow 40h + 1200 = 6900 \Rightarrow h = 142,5$$

Portanto, a altura entre o pêndulo e o chão é 142,5 cm.

96. $V = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 6^3}{3} = 904,32$

Portanto, o volume é aproximadamente 904,32 cm^3.

97. Seja *C* o comprimento do equador dessa esfera. Assim:

$$C = 9,42 \Rightarrow 2 \cdot 3,14 \cdot r = 9,42 \Rightarrow r = 1,5$$

$$V = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 1,5^3}{3} = 14,13$$

Portanto, o volume dessa esfera é aproximadamente 14,13 cm^3.

98. Para calcular o volume mínimo dessa bola, devemos determinar o raio correspondente à circunferência mínima C_1.

$C_1 = 749 \Rightarrow 2 \cdot 3,14 \cdot r_1 = 749 \Rightarrow r_1 \simeq 119,3$

$V_{mínimo} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 119,3^3}{3} \Rightarrow V_{mínimo} \simeq 7\,108\,692,3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{mínimo} \simeq 7,1 \cdot 10^6$

Para calcular o volume máximo dessa bola, devemos determinar o raio correspondente à circunferência máxima C_2.

$C_2 = 780 \Rightarrow 2 \cdot 3,14 \cdot r_2 = 780 \Rightarrow r_2 \simeq 124,2$

$V_{máximo} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 124,2^3}{3} \Rightarrow V_{máximo} \simeq 8\,021\,086 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{máximo} \simeq 8,0 \cdot 10^6$

Portanto, os volumes mínimo e máximo aproximados que uma bola de basquetebol deve ter são, respectivamente, $7,1 \cdot 10^6$ mm^3 e $8,0 \cdot 10^6$ mm^3.

99. $V = 1100 \cdot 10^9 \Rightarrow \frac{4 \cdot 3,14 \cdot r^3}{3} = 1100 \cdot 10^9 \Rightarrow r \simeq 6400$

Portanto, o raio aproximado da Terra é 6 400 km.

100. Seja *A* a área do círculo máximo dessa esfera. Assim:

$$A = 706,5 \Rightarrow 3,14 \cdot r^2 = 706,5 \Rightarrow r = 15$$

$$V = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 15^3}{3} = 14\,130$$

Portanto, o volume dessa esfera é aproximadamente 14 130 cm^3.

101. a) $V = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 0,6^3}{3} \simeq 0,904$

Massa de uma das esferas, em gramas:

$$8 = \frac{m}{0,904} \Rightarrow m = 7,232$$

Portanto, a massa aproximada de cada uma dessas esferas é 7,232 g.

b) Seja *V* o volume da esfera. Assim:

$$8 = \frac{200,96}{V} \Rightarrow V = 25,12$$

Comprimento do raio da esfera:

$$\frac{4 \cdot 3,14 \cdot r^3}{3} = 25,12 \Rightarrow r = \sqrt[3]{6}$$

Portanto, o diâmetro da esfera é $2\sqrt[3]{6}$ cm.

102. $V = 900 \Rightarrow \frac{4 \cdot 3,14 \cdot r^3}{3} = 900 \Rightarrow r \simeq 5,99$

Portanto, o número inteiro mais próximo do valor do comprimento desse raio é 6.

103. Sejam V_1 o volume da caixa e V_2 o volume da esfera. Assim:

- $V_1 = 24^3 = 13\,824$
- $V_2 = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 12^3}{3} = 7\,234,56$

Logo, o volume *V* de espuma usada em cada embalagem é:

$$V = V_1 - V_2 \Rightarrow V = 13\,824 - 7\,234,56 \Rightarrow V = 6\,589,44$$

Portanto, o volume de espuma utilizado em cada embalagem é aproximadamente 6 589 cm^3.

104. A veracidade da afirmação dessa tarefa está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

105. $V_{esfera} = 36\pi \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = 36\pi \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$

$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot (2r) = \pi \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3 = 54\pi$

Portanto, o volume do cilindro é 54π cm^3.

106. Seja *V* o volume da esfera. Assim:

- $V = 8 \cdot \frac{785}{96} = \frac{785}{12}$
- $V = \frac{785}{12} \Rightarrow \frac{4 \cdot 3,14 \cdot r^3}{3} = \frac{785}{12} \Rightarrow r = 2,5$

Portanto, o comprimento do raio dessa esfera é aproximadamente 2,5 cm.

107. $A = 4 \cdot 3,14 \cdot 2,5^2 = 78,5$. Portanto, a área da superfície é aproximadamente 78,5 cm^2.

108. $V = \frac{1570}{3} \Rightarrow \frac{4 \cdot 3,14 \cdot r^3}{3} = \frac{1570}{3} \Rightarrow r = 5$

$A = 4 \cdot 3,14 \cdot 5^2 = 314$

Portanto, a área da superfície é aproximadamente 314 dm^2.

109. Sendo *C* a medida da circunferência interna da cúpula, temos:

$$C = 69,08 \Rightarrow 2 \cdot 3,14 \cdot r = 69,08 \Rightarrow r = 11$$

Logo, a área *A* da superfície em que ocorre a projeção é:

$$A = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 11^2}{2} = 759,88$$

Portanto, a área da superfície em que ocorre a projeção é aproximadamente 759,88 m^2.

110. a) $A = 11\,304 \Rightarrow 4 \cdot 3,14 \cdot r^2 = 11\,304 \Rightarrow r = 30$

$$V = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 30^3}{3} = 113\,040$$

Portanto, o volume da esfera que representa o planeta Terra é aproximadamente 113 040 cm^3.

b) Anteriormente, calculamos que o raio da Terra é aproximadamente 6 400 km. Assim, temos: $\frac{6\,400}{5\,181,1} = \frac{30}{x} \Rightarrow x \simeq 24,3$.

Portanto, a distância entre o Centro de Lançamento de Alcântara e o Cabo Canaveral na representação feita na maquete é, aproximadamente, 24,3 cm.

111. Sejam V_1 o volume do recipiente cilíndrico e V_2 o volume máximo da esfera. Desse modo:

- $V_1 = \pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 1500\pi$
- $V_2 = 1500\pi - 1212\pi = 288\pi$

Assim, o volume máximo que a esfera pode ter é 288π cm^3. Agora, calculamos o raio da esfera.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

$$V_2 = 288\pi \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = 288\pi \Rightarrow r = 6$$

Logo, para $r = 6$ cm, a área da superfície A da esfera é dada por:

$$A = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi$$

Portanto, no máximo, a área da superfície da esfera será 144π cm^2.

112. Volume da esfera: $V_{esfera} = \pi \cdot 25^2 \cdot 7{,}2 = 4\,500\pi$.

Consequentemente, temos:

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 4\,500\pi \Rightarrow r^3 = 3\,375 \Rightarrow r = 15$$

$$A = 4 \cdot \pi \cdot 15^2 = 900\pi$$

Portanto, a área da superfície dessa esfera é 900π cm^2.

113. **a)** $\frac{360°}{24} = 15°$. Portanto, cada fuso tem ângulo de 15°.

b) Seja A a área da superfície do planeta. Assim:

$$A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,400^2 \Rightarrow A_1 = 514\,457\,600$$

Assim:

$$\frac{514\,457\,600}{24} \simeq 21\,435\,733$$

Portanto, a área aproximada do planeta que corresponde a cada fuso horário é 21 435 733 km^2.

Acessando tecnologias (páginas 232 e 233)

1. O volume do recipiente, em centímetros cúbicos, dividido por 1000 deve ser menor do que o volume de água, em litros, que se deseja armazenar no recipiente.

2. O algoritmo em linguagem Scratch referente a essa tarefa está apresentado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Resolvendo por etapas (páginas 254 e 255)

2. Sim, é possível resolver o problema usando o plano com algumas adequações. Inicialmente, calculamos o volume interno da taça (V_T), a fim de, em seguida, descobrir a capacidade ainda disponível.

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 18 = 301{,}44$$

Logo, o volume interno total da taça é aproximadamente 301,44 cm^3, o que equivale a 301,44 mL. Agora, vamos calcular a capacidade disponível na taça antes de serem acrescentadas as pedras de gelo. Para isso, fazemos:

$$301{,}44 \text{ mL} - 260 \text{ mL} = 41{,}44 \text{ mL}$$

Volume de cada pedra de gelo: $V_G = \frac{4\pi r^3}{3} \simeq 4{,}187$.

Logo, o volume de cada pedra de gelo é 4,187 cm^3, o que equivale a 4,187 mL. Assim:

$$\frac{41{,}44}{4{,}187} \simeq 9{,}897$$

Portanto, Amanda poderá acrescentar, no máximo, 9 pedras de gelo sem que o suco transborde da taça.

Síntese do capítulo (página 259)

3. Sugestão de resposta: Cálculo do volume interno de um copo com formato cilíndrico ou de tronco de cone; cálculo da área da superfície do planeta Terra.

4. **a)** Verdadeira.

b) Falsa. As geratrizes do cone são os segmentos com uma extremidade no vértice e outra na circunferência da base. A reta $\overleftrightarrow{OV}$ é o eixo do cone.

c) Verdadeira.

d) Verdadeira.

5. Uma sugestão de passo a passo é: 1º. Calcule a área A_b de uma das bases do cilindro; para isso, efetue πr^2. 2º. Calcule a área lateral A_l do cilindro; para isso, efetue $2\pi rh$. 3º. Calcule $2A_b + A_l$; o resultado obtido é a área total do cilindro.

6. O volume V do cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura. No caso do cone de altura h e raio da base r, temos: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Portanto, a alternativa **c** é a correta.

7. Em um cone equilátero, temos $g = 2r$. Nesse caso, a seção meridiana é um triângulo equilátero. Portanto, a alternativa **c** é a correta.

8. Sim, pois, conhecendo esses comprimentos, é possível determinar a altura do tronco de cone reto e utilizar a fórmula de cálculo do volume de um tronco de cone reto.

9. Uma sugestão de passo a passo é: 1º. Multiplique o volume da esfera por 3. 2º. Divida o produto obtido no passo anterior por 12,56 (nesta etapa, considerou-se $\pi = 3{,}14$). 3º. Calcule a raiz cúbica do quociente obtido no passo anterior. O resultado obtido é o comprimento aproximado do raio da esfera.

10. Inicialmente, determinamos o comprimento da geratriz g_1 do cone em centímetros.

$$g_1^2 = 3^2 + 8^2 \Rightarrow g_1 \simeq 8{,}5$$

Agora, calculamos o volume V_1, em centímetros cúbicos, e a área da superfície A_1, em centímetros quadrados, do cone.

$$V_1 = \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 8}{3} = 75{,}36$$

$$A_1 = 3{,}14 \cdot 3(3 + 8{,}5) = 108{,}33$$

Em seguida, calculamos o volume V_2, em centímetros cúbicos, e a área da superfície A_2, em centímetros quadrados, da esfera.

$$V_2 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 5{,}5^3}{3} \simeq 696{,}6$$

$$A_2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 5{,}5^2 = 379{,}94$$

Na sequência, calculamos o volume V_3, em centímetros cúbicos, e a área da superfície V_3, em centímetros quadrados, do cilindro.

$$V_3 = 3{,}14 \cdot 7^2 \cdot 2{,}5 = 384{,}65$$

$$A_3 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 7(7 + 2{,}5) = 417{,}62$$

Agora, vamos determinar o comprimento da geratriz G do tronco de cone em centímetros.

$$G^2 = (4{,}5 - 1{,}7)^2 + 7^2 \Rightarrow G \simeq 7{,}54$$

Finalmente, calculamos o volume V_4, em centímetros cúbicos, e a área da superfície A_4, em centímetros quadrados, do tronco de cone.

$$V_4 = \frac{3{,}14 \cdot 7}{3}\left(4{,}5^2 + 4{,}5 \cdot 1{,}7 + 1{,}7^2\right) \simeq 225{,}6$$

$$A_4 = 3{,}14 \cdot 4{,}5^2 + 3{,}14 \cdot 1{,}7^2 + 3{,}14 \cdot 7{,}54(1{,}7 + 4{,}5) \simeq 219{,}45$$

Como $V_2 > V_3 > V_4 > V_1$ e $A_3 > A_2 > A_4 > A_1$, a esfera tem o maior volume e o cilindro, a maior área da superfície.

CAPÍTULO 7 PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

Abertura de capítulo

1. Projeção de Mercator, Projeção de Gall-Peters, Projeção de Dymaxion e Projeção de Robinson.

2. Não, pois é impossível representar uma esfera em um plano sem que haja distorções.

Questões

A. As projeções equivalentes, como é o caso da Projeção de Albers.

Exercícios e problemas

1. **a)** Verdadeira.

b) Falsa, pois na Projeção de Mercator as deformações que ocorrem nas áreas representadas são mínimas na região equatorial, mas aumentam consideravelmente em direção aos polos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

c) Falsa, pois em ambas as projeções o globo é projetado sobre a superfície lateral de um cilindro.

d) Falsa, pois na Projeção de Peters as formas da superfície parecem visivelmente deformadas, como se os continentes tivessem sido mais alongados no sentido Norte-Sul e mais achatados no sentido Leste-Oeste.

Portanto, a alternativa **a** é a correta.

2. Azimutal, pois consiste na projeção do globo terrestre sobre um plano.

3. Em ambas as projeções o globo é projetado sobre a superfície lateral de um cilindro. Portanto, a alternativa **B** é a correta.

4. • Projeção de Lambert, pois não houve deformação nas circunferências no resultado obtido.

• Projeção de Albers, pois as áreas foram ajustadas de acordo com a posição correspondente no globo.

5. a) Projeção **1**: projeção cilíndrica; projeção **2**: projeção cônica.

b) Apenas a projeção **2** apresenta deformação de ângulo. Ambas as projeções têm deformação de área.

Acessando tecnologias (página 270)

1. O aplicativo é interativo e mostra o tamanho preciso dos países. Podemos selecioná-los e comparar o tamanho real entre eles no mapa. Pode-se dizer que a projeção é equivalente quando permite a utilização da função mover/transportar.

Síntese do capítulo (página 271)

3. Sugestão de resposta: Aplicativos de GPS para se locomover, mapas de cidades para se localizar ou encontrar endereços, planejar viagens utilizando mapas de estradas, entre outras situações.

4. Sugestão de resposta: Como todos os tipos de mapas mantêm as ligações entre as regiões, o posicionamento dos países e a presença dos oceanos, a estratégia seria observar cada um deles e destacar as diferentes características.

Resoluções referentes ao capítulo **1**.

76. a) $\binom{9}{3} = \binom{x}{6} \Rightarrow \binom{9}{6} = \binom{x}{6} \Rightarrow x = 9 \Rightarrow S = \{9\}$

b) $\binom{24}{x} + \binom{24}{12} = \binom{25}{12} \Rightarrow \binom{24}{x} + \binom{24}{12} = \binom{24}{12} + \binom{24}{11} \Rightarrow \binom{24}{x} = \binom{24}{11}$

Logo, $x_1 = 11$ ou $x_2 = 13$. Portanto, $S = \{11, 13\}$.

c) $\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} + \ldots + \binom{x}{x} = 2^{(-x+200)} \Rightarrow 2^x = 2^{(-x+200)}$

Logo, $x = 100$. Portanto, $S = \{100\}$.

d) $\binom{10}{x}^x = \binom{20}{14} - \binom{20}{6} + 1 \Rightarrow \binom{10}{x}^x = \binom{20}{14} - \binom{20}{14} + 1 \Rightarrow \binom{10}{x}^x = 1$

Logo, $x_1 = 0$ ou $x_2 = 10$. Portanto, $S = \{0, 10\}$.

82. a) $(x + y)^5 =$

$$= \underbrace{\binom{5}{0}}_{1}x^5y^0 + \underbrace{\binom{5}{1}}_{5}x^4y^1 + \underbrace{\binom{5}{2}}_{10}x^3y^2 + \underbrace{\binom{5}{3}}_{10}x^2y^3 + \underbrace{\binom{5}{4}}_{5}x^1y^4 + \underbrace{\binom{5}{5}}_{1}x^0y^5 =$$

$$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

b) $(2a - b)^4 =$

$$= \underbrace{\binom{4}{0}}_{1}(2a)^4(-b)^0 + \underbrace{\binom{4}{1}}_{4}(2a)^3(-b)^1 + \underbrace{\binom{4}{2}}_{6}(2a)^2(-b)^2 + \underbrace{\binom{4}{3}}_{4}(2a)^1(-b)^3 + \underbrace{\binom{4}{4}}_{1}(2a)^0(-b)^4 =$$

$$= 16a^4 + 4 \cdot 8a^3 \cdot (-b) + 6 \cdot 4a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot 2a \cdot (-b^3) + b^4 =$$

$$= 16a^4 - 32a^3b + 24a^2b^2 - 8ab^3 + b^4$$

c) $\left(2x - \frac{y}{4}\right)^6 =$

$$= \underbrace{\binom{6}{0}}_{1}(2x)^6\left(-\frac{y}{4}\right)^0 + \underbrace{\binom{6}{1}}_{6}(2x)^5\left(-\frac{y}{4}\right)^1 + \underbrace{\binom{6}{2}}_{15}(2x)^4\left(-\frac{y}{4}\right)^2 + \underbrace{\binom{6}{3}}_{20}(2x)^3\left(-\frac{y}{4}\right)^3 +$$

$$+ \underbrace{\binom{6}{4}}_{15}(2x)^2\left(-\frac{y}{4}\right)^4 + \underbrace{\binom{6}{5}}_{6}(2x)^1\left(-\frac{y}{4}\right)^5 + \underbrace{\binom{6}{6}}_{1}(2x)^0\left(-\frac{y}{4}\right)^6 =$$

$$= 64x^6 + 6 \cdot 32x^5 \cdot \left(-\frac{y}{4}\right) + 15 \cdot 16x^4 \cdot \frac{y^2}{16} + 20 \cdot 8x^3 \cdot \left(-\frac{y^3}{64}\right) +$$

$$+ 15 \cdot 4x^2 \cdot \frac{y^4}{256} + 6 \cdot 2x \cdot \left(-\frac{y^5}{1024}\right) + \frac{y^6}{4096} =$$

$$= 64x^6 - 48x^5y + 15x^4y^2 - \frac{5x^3y^3}{2} + \frac{15x^2y^4}{64} - \frac{3xy^5}{256} + \frac{y^6}{4096}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

d) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^4 = \underbrace{\binom{4}{0}}_{1}(\sqrt{x})^4(\sqrt{y})^0 + \underbrace{\binom{4}{1}}_{4}(\sqrt{x})^3(\sqrt{y})^1 + \underbrace{\binom{4}{2}}_{6}(\sqrt{x})^2(\sqrt{y})^2 + \underbrace{\binom{4}{3}}_{4}(\sqrt{x})^1(\sqrt{y})^3 + \underbrace{\binom{4}{4}}_{1}(\sqrt{x})^0(\sqrt{y})^4 =$

$= x^2 + 4 \cdot x\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + 6 \cdot x \cdot y + 4 \cdot \sqrt{x} \cdot y\sqrt{y} + y^2 =$

$= x^2 + 4x\sqrt{x}\sqrt{y} + 6xy + 4y\sqrt{x}\sqrt{y} + y^2$

e) $\left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{\sqrt{b}}{3}\right)^4 = \underbrace{\binom{4}{0}}_{1}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^4\left(-\frac{\sqrt{b}}{3}\right)^0 + \underbrace{\binom{4}{1}}_{4}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^3\left(-\frac{\sqrt{b}}{3}\right)^1 + \underbrace{\binom{4}{2}}_{6}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2\left(-\frac{\sqrt{b}}{3}\right)^2 +$

$+ \underbrace{\binom{4}{3}}_{4}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^1\left(-\frac{\sqrt{b}}{3}\right)^3 + \underbrace{\binom{4}{4}}_{1}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^0\left(-\frac{\sqrt{b}}{3}\right)^4 =$

$= \frac{a^2}{16} + 4 \cdot \frac{a\sqrt{a}}{8} \cdot \left(-\frac{\sqrt{b}}{3}\right) + 6 \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{b}{9} + 4 \cdot \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot \left(-\frac{b\sqrt{b}}{27}\right) + \frac{b^2}{81} =$

$= \frac{a^2}{16} - \frac{a\sqrt{a}\sqrt{b}}{6} + \frac{ab}{6} - \frac{2b\sqrt{a}\sqrt{b}}{27} + \frac{b^2}{81}$

f) $\left(xy + \frac{z}{3}\right)^6 = \underbrace{\binom{6}{0}}_{1}(xy)^6\left(\frac{z}{3}\right)^0 + \underbrace{\binom{6}{1}}_{6}(xy)^5\left(\frac{z}{3}\right)^1 + \underbrace{\binom{6}{2}}_{15}(xy)^4\left(\frac{z}{3}\right)^2 +$

$+ \underbrace{\binom{6}{3}}_{20}(xy)^3\left(\frac{z}{3}\right)^3 + \underbrace{\binom{6}{4}}_{15}(xy)^2\left(\frac{z}{3}\right)^4 + \underbrace{\binom{6}{5}}_{6}(xy)^1\left(\frac{z}{3}\right)^5 + \underbrace{\binom{6}{6}}_{1}(xy)^0\left(\frac{z}{3}\right)^6 =$

$= x^6y^6 + 6 \cdot x^5y^5 \cdot \frac{z}{3} + 15 \cdot x^4y^4 \cdot \frac{z^2}{9} + 20 \cdot x^3y^3 \cdot \frac{z^3}{27} +$

$+ 15 \cdot x^2y^2 \cdot \frac{z^4}{81} + 6 \cdot xy \cdot \frac{z^5}{243} + \frac{z^6}{729} =$

$= x^6y^6 + 2x^5y^5z + \frac{5}{3}x^4y^4z^2 + \frac{20}{27}x^3y^3z^3 + \frac{5}{27}x^2y^2z^4 + \frac{2}{81}xyz^5 + \frac{z^6}{729}$

84. a) $\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^5 = \underbrace{\binom{5}{0}}_{1}\left(\sqrt{5}\right)^5\left(-\sqrt{3}\right)^0 + \underbrace{\binom{5}{1}}_{5}\left(\sqrt{5}\right)^4\left(-\sqrt{3}\right)^1 + \underbrace{\binom{5}{2}}_{10}\left(\sqrt{5}\right)^3\left(-\sqrt{3}\right)^2 +$

$+ \underbrace{\binom{5}{3}}_{10}\left(\sqrt{5}\right)^2\left(-\sqrt{3}\right)^3 + \underbrace{\binom{5}{4}}_{5}\left(\sqrt{5}\right)^1\left(-\sqrt{3}\right)^4 + + \underbrace{\binom{5}{5}}_{1}\left(\sqrt{5}\right)^0\left(-\sqrt{3}\right)^5 =$

$= 25\sqrt{5} + 5 \cdot 25 \cdot \left(-\sqrt{3}\right) + 10 \cdot 5\sqrt{5} \cdot 3 + 10 \cdot 5 \cdot \left(-3\sqrt{3}\right) + 5 \cdot \sqrt{5} \cdot 9 + \left(-9\sqrt{3}\right) =$

$= 220\sqrt{5} - 284\sqrt{3}$

b) $\left(\sqrt{7} + 3\sqrt{5}\right)^4 = \underbrace{\binom{4}{0}}_{1}\left(\sqrt{7}\right)^4\left(3\sqrt{5}\right)^0 + \underbrace{\binom{4}{1}}_{4}\left(\sqrt{7}\right)^3\left(3\sqrt{5}\right)^1 + \underbrace{\binom{4}{2}}_{6}\left(\sqrt{7}\right)^2\left(3\sqrt{5}\right)^2 +$

$+ \underbrace{\binom{4}{3}}_{4}\left(\sqrt{7}\right)^1\left(3\sqrt{5}\right)^3 + \underbrace{\binom{4}{4}}_{1}\left(\sqrt{7}\right)^0\left(3\sqrt{5}\right)^4 =$

$= 49 + 4 \cdot 7\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{5} + 6 \cdot 7 \cdot 45 + 4 \cdot \sqrt{7} \cdot 135\sqrt{5} + 2\,025 =$

$= 3\,964 + 624\sqrt{35}$

c) Como $\left(1 - \sqrt{2}\right)^{10} = \left[\left(1 - \sqrt{2}\right)^5\right]^2$, temos:

$\left(1 - \sqrt{2}\right)^5 = \underbrace{\binom{5}{0}}_{1} \cdot 1^5\left(-\sqrt{2}\right)^0 + \underbrace{\binom{5}{1}}_{5} \cdot 1^4\left(-\sqrt{2}\right)^1 + \underbrace{\binom{5}{2}}_{10} \cdot 1^3\left(-\sqrt{2}\right)^2 +$

$+ \underbrace{\binom{5}{3}}_{10} \cdot 1^2\left(-\sqrt{2}\right)^3 + \underbrace{\binom{5}{4}}_{5} \cdot 1^1\left(-\sqrt{2}\right)^4 + \underbrace{\binom{5}{5}}_{1} \cdot 1^0\left(-\sqrt{2}\right)^5 =$

$= 1 + 5 \cdot 1 \cdot \left(-\sqrt{2}\right) + 10 \cdot 1 \cdot 2 + 10 \cdot 1 \cdot \left(-2\sqrt{2}\right) + 5 \cdot 1 \cdot 4 + \left(-4\sqrt{2}\right) =$

$= 41 - 29\sqrt{2}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Assim:

$(1-\sqrt{2})^{10} = \left[(1-\sqrt{2})^5\right]^2 = [41-29\sqrt{2}]^2 =$

$= 1681 - 2378\sqrt{2} + 1682 = 3363 - 2378\sqrt{2}$

d) $3 + 2\sqrt{\frac{3}{2}} = 3 + 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 3 + 2\frac{\sqrt{6}}{2} = 3 + \sqrt{6}$

Assim:

$\left(3 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5 = (3+\sqrt{6})^5 = \underbrace{\binom{5}{0}}_{1}\cdot 3^5(\sqrt{6})^0 + \underbrace{\binom{5}{1}}_{5}\cdot 3^4(\sqrt{6})^1 +$

$+\underbrace{\binom{5}{2}}_{10}\cdot 3^3(\sqrt{6})^2 + \underbrace{\binom{5}{3}}_{10}\cdot 3^2(\sqrt{6})^3 + \underbrace{\binom{5}{4}}_{5}\cdot 3^1(\sqrt{6})^4 + \underbrace{\binom{5}{5}}_{1}\cdot 3^0(\sqrt{6})^5 =$

$= 243 + 5\cdot 81\cdot\sqrt{6} + 10\cdot 27\cdot 6 + 10\cdot 9\cdot 6\sqrt{6} + 5\cdot 3\cdot 36 + 36\sqrt{6} =$

$= 2403 + 981\sqrt{6}$

Resoluções referentes ao capítulo **3**.

Questões

F. Média aritmética da empresa **A**: $\bar{x}_A = \frac{41000 + 44000 + \ldots + 152000 + 155000}{37} \simeq 88216{,}22$

A média dos salários anuais da empresa **A** é de aproximadamente R$ 88 216,22.

Média aritmética da empresa **B**: $\bar{x}_B = \frac{21000 + 23000 + \ldots + 133000 + 150000}{31} \simeq 62903{,}23$

Portanto, a média dos salários anuais da empresa **B** é de aproximadamente R$ 62 903,23.

41. De acordo com o gráfico, 300 pessoas atribuíram nota 0, 360 pessoas atribuíram nota 1, 480 pessoas atribuíram nota 2, 930 pessoas atribuíram nota 3, 510 pessoas atribuíram nota 4 e 420 pessoas atribuíram nota 5.

a) Determinando a média ponderada, temos:

$$\bar{x} = \frac{300\cdot 0 + 360\cdot 1 + 480\cdot 2 + 930\cdot 3 + 510\cdot 4 + 420\cdot 5}{3000} = \frac{8250}{300} = 2{,}75$$

A nota com maior frequência foi 3, logo a moda é 3.

Posições centrais: $\frac{3000}{2} = 1500$ e $\frac{3000}{2} + 1 = 1501$.

As notas nessas posições são ambas iguais a 3, logo a mediana é 3.

Portanto, a média é 2,75, o que significa que a nota média do produto dado pelos consumidores é 2,75; a moda é 3, ou seja, a nota que os consumidores mais atribuíram ao produto é 3; e a mediana é 3. Assim, a nota mediana dos 3 000 consumidores é 3.

47. b) • $Q_1 = \frac{18\cdot 25 + 20\cdot 43 + 21\cdot 28 + 22\cdot 37 + 25\cdot 26}{159} \simeq 21{,}1$

• $Q_2 = \frac{18\cdot 25 + 20\cdot 43 + \ldots + 45\cdot 19 + 48\cdot 37}{352} \simeq 30{,}5$

• $Q_3 = \frac{31\cdot 40 + 33\cdot 37 + 35\cdot 18 + 39\cdot 37 + 42\cdot 5 + 45\cdot 19 + 48\cdot 37}{193} \simeq 38{,}2$

Portanto, 25% dos eleitores dessa seção têm 21 anos ou menos, metade desses eleitores tem 31 anos ou menos e 75% desses eleitores têm 39 anos ou menos.

49. a) $\bar{x} = \frac{62 + 58 + 72 + 66 + 53 + 70 + 51 + 64}{8} = 62$

O conjunto é amodal, pois nenhum valor repetiu mais do que os outros. Sendo assim, temos:

$$Md = \frac{62 + 64}{2} = 63$$

$$A = 72 - 51 = 21$$

$$Dm = \frac{|62-62| + |58-62| + \ldots + |51-62| + |64-62|}{8} = 6$$

$$V = \frac{(62-62)^2 + (58-62)^2 + \ldots + (51-62)^2 + (64-62)^2}{8} = 50{,}25$$

$$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp = \sqrt{50{,}25} \Rightarrow Dp \simeq 7{,}09$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) $\bar{x} = \frac{14 + 18 + 25 + 14 + 39 + 27 + 31}{7} = 24$

$Mo = 14$

Posição central: $\frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$. Logo, a mediana é $Md = 25$.

$A = 39 - 14 = 25$

$Dm = \frac{|14 - 24| + |18 - 24| + \ldots |27 - 24| + |31 - 24|}{7} \simeq 7{,}43$

$V = \frac{(14 - 24)^2 + (18 - 24)^2 + \ldots + (27 - 24)^2 + (31 - 24)^2}{7} \Rightarrow V \simeq 74{,}29$

$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp \simeq \sqrt{74{,}29} \Rightarrow Dp \simeq 8{,}62$

c) $\bar{x} = \frac{12 + 4{,}5 + 1{,}2 + 12 + 2{,}7 + 4{,}5}{6} \Rightarrow \bar{x} = 6{,}15$

$Mo = 4{,}5$ e $Mo = 12$

$Md = \frac{4{,}5 + 4{,}5}{2} = 4{,}5$

$A = 12 - 1{,}2 = 10{,}8$

$Dm = \frac{|12 - 6{,}15| + |4{,}5 - 6{,}15| + \ldots + |2{,}7 - 6{,}15| + |4{,}5 - 6{,}15|}{6} = 3{,}9$

$V = \frac{(12 - 6{,}15)^2 + (4{,}5 - 6{,}15)^2 + \ldots + (2{,}7 - 6{,}15)^2 + (4{,}5 - 6{,}15)^2}{6} \Rightarrow V \simeq 18{,}38$

$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp \simeq \sqrt{18{,}38} \Rightarrow Dp \simeq 4{,}29$

d) $\bar{x} = \frac{13 - 18 + 3 + 8 - 1 + 11 + 1 + 3}{8} \Rightarrow \bar{x} = 2{,}5$

$Mo = 3$

$Md = \frac{3 + 3}{2} = 3$

$A = 13 - (-18) = 31$

$Dm = \frac{|13 - 2{,}5| + |-18 - 2{,}5| + \ldots + |1 - 2{,}5| + |3 - 2{,}5|}{8} = 6{,}375$

$V = \frac{(13 - 2{,}5)^2 + (-18 - 2{,}5)^2 + \ldots + (1 - 2{,}5)^2 + (3 - 2{,}5)^2}{8} = 81$

$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp = \sqrt{81} \Rightarrow Dp = 9$

53. b) $Dp_A = \sqrt{\frac{(870 - 854)^2 + (848 - 854)^2 + \ldots + (852 - 854)^2}{5}} \Rightarrow Dp_A \simeq 8{,}69$

$Dp_B = \sqrt{\frac{(866 - 851)^2 + (850 - 851)^2 + \ldots + (847 - 851)^2}{5}} \Rightarrow Dp_B \simeq 7{,}67$

$Dp_C = \sqrt{\frac{(867 - 853)^2 + (851 - 853)^2 + \ldots + (855 - 853)^2}{5}} \Rightarrow Dp_C = 8$

Para o piloto **A**, houve um desvio padrão de aproximadamente 8,69 s; para o piloto **B**, o desvio padrão foi de aproximadamente 7,67 s; para o piloto **C**, de 8 s. Logo, o piloto **B** obteve a maior regularidade no tempo para cada volta.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

BRACKMANN, Christian Puhlmann. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica*. 2017. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/172208. Acesso em: 3 set. 2024.

Trabalho que busca verificar a possibilidade do desenvolvimento do pensamento computacional na Educação Básica por meio de atividades exclusivamente desplugadas, ou seja, sem o uso de aparatos eletrônicos.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Organização: Paulo Carrano, Juarez Dayrell. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

Nessa obra, voltada à formação de professores, são discutidos diversos temas relacionados ao Ensino Médio. Em um primeiro momento, discute-se o conceito de juventude com o objetivo de propor mudanças nas maneiras de conceber essa faixa etária. Esses textos buscam valorizar o papel do jovem como sujeito de sua história. Em seguida, os textos destacam temas como juventude e tecnologia, questão do mundo do trabalho e projeto de vida, além do papel da escola no processo de formação dos jovens.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018a. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 3 set. 2024.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que norteia os currículos dos sistemas e das redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo os principais conhecimentos, competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. *Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018b*. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/novembro-2018-pdf/102481-rceb003-18/file. Acesso em: 3 set. 2024.

Essa resolução atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, publicadas em 2012.

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Ações Programáticas e Estratégicas. *Proteger e cuidar da saúde de adolescentes na atenção básica*. 2. ed. Brasília, 2018c. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/proteger_cuidar_adolescentes_atencao_basica_2ed.pdf. Acesso em: 5 out. 2024.

Esse documento do Ministério da Saúde foi elaborado para auxiliar as Equipes de Atenção Básica/Saúde da Família no trabalho com adolescentes, propondo o cuidado com a saúde, a adoção de hábitos saudáveis e a atenção aos principais aspectos clínicos.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 10 set. 2024.

Esse documento apresenta o histórico dos temas contemporâneos transversais, sua divisão em seis grandes áreas e a importância desses temas para os currículos da Educação Básica.

CENTRO DE INOVAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO BRASILEIRA (CIEB). *Currículo de referência em tecnologia e computação*. Disponível em: https://curriculo.cieb.net.br/. Acesso em: 10 set. 2024.

O objetivo desse currículo é oferecer diretrizes e orientações que visam apoiar as escolas a incluir em suas propostas curriculares os temas tecnologia e computação, potencializando o uso da tecnologia na aprendizagem.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

Nesse livro, o autor propicia uma análise do papel da Matemática na cultura ocidental e da noção de que a Matemática é apenas uma forma de Etnomatemática.

DAYRELL, Juarez (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Juarez Dayrell é um pesquisador que investiga questões sobre a juventude e a educação, analisando a importância das culturas juvenis na construção de um cenário educativo mais democrático e significativo. Nessa obra, ele traz algumas experiências vivenciadas no projeto Observatório da Juventude, da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), que trabalha desde 2003 com a formação de professores e discussões envolvendo a juventude.

FIORIN, José Luiz. *Argumentação*. São Paulo: Contexto, 2015.

Esse livro é fundamental para quem busca compreender os mecanismos da argumentação e aprimorar suas habilidades de comunicação. O autor, um dos maiores especialistas em Linguística no Brasil, oferece uma análise profunda e abrangente do processo argumentativo, desde a construção de argumentos até a identificação de falácias.

ILLERIS, Knud (org.). *Teorias contemporâneas da aprendizagem*. Porto Alegre: Penso, 2013.

Nessa obra, o pesquisador Knud Illeris reúne diferentes autores e teorias da aprendizagem que têm sido desenvolvidas na contemporaneidade e apresenta um conjunto de textos que tratam do tema. Cada pesquisador contribui com suas reflexões, buscando caminhos na compreensão sobre o conceito de educar e como funciona o complexo processo de ensino e aprendizagem na atualidade.

LIBÂNEO, José Carlos. *Didática*. São Paulo: Cortez, 2013.

Esse livro aborda a prática educativa e o papel do professor nos processos de ensino e de aprendizagem. Libâneo enfatiza a necessidade de uma abordagem pedagógica crítica e reflexiva, que considera o contexto socioeconômico e cultural dos estudantes, promovendo uma educação transformadora. Ele discute métodos e estratégias de ensino que visam ao desenvolvimento integral do estudante, integrando teoria e prática de forma a preparar cidadãos críticos e participativos.

LOPES, Lidiane Schimitz; FERREIRA, André Luis Andrejew. Um olhar sobre a história nas aulas de matemática. *Abakós*, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 75-88, nov. 2013.

Nesse artigo, os autores defendem o uso da História da Matemática como metodologia em sala de aula, realizando uma abordagem histórica dos conteúdos como meio de facilitar o entendimento da Matemática.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. *História na educação matemática*: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

Nesse livro, os autores abordam a História da Matemática e a História da Educação Matemática, estabelecendo uma relação entre essas duas áreas e o modo pelo qual elas podem se relacionar com a Educação Matemática.

MORAN, José. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. *In*: BACICH, Lilian; MORAN, José (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 2-25.

Esse artigo apresenta práticas pedagógicas baseadas em metodologias ativas que valorizam o protagonismo dos estudantes.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, Rio Claro, Unesp, ano 2011, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

Esse trabalho apresenta o conhecimento acumulado sobre a resolução de problemas na Educação Matemática, baseado nas pesquisas realizadas nos últimos anos pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, da Unesp de Rio Claro (SP).

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

Esse trabalho tece comentários a respeito das maneiras de resolver um problema, no qual o processo de solução é mais importante do que a própria solução. Para tanto, Polya estabelece as quatro fases da resolução de um problema: compreendendo o problema, elaborando um plano, executando o plano e fazendo o retrospecto.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

Nessa obra, os autores apresentam os possíveis modos de introduzir em sala de aula as práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos, apontando as vantagens e desvantagens no trabalho com essa perspectiva. Também são analisados os papéis dos estudantes e professores em sala de aula ao lidar com problemas relacionados às áreas de Geometria, Estatística e Aritmética.

REIS, Ana Valéria Sampaio de Almeida; DAROS, Thuinie; TOMELIN, Karina Nones. *Layouts criativos para aulas inovadoras*. Maringá: B42, 2023.

Esse livro orienta educadores que desejam transformar o ambiente da sala de aula e implementar estratégias de ensino dinâmicas. As autoras propõem uma série de *layouts* para favorecer abordagens pedagógicas diversas. O objetivo é promover práticas de inovação, inspiração e cocriação entre professores e estudantes, incentivando os educadores a se tornarem *designers* do ambiente educacional. Recomendado para quem busca repensar a organização do espaço escolar e criar experiências de aprendizagens marcantes.

STECANELA, Nilda. *Ler e escrever na EJA*: práticas interdisciplinares. Caderno de EJA. Caxias do Sul: Educs, 2013.

Esse livro oferece uma análise detalhada sobre a importância da interdisciplinaridade no processo de ensino e aprendizagem para a Educação de Jovens e Adultos (EJA). A autora explora como a integração entre diferentes disciplinas pode enriquecer as práticas pedagógicas, promovendo uma abordagem mais contextualizada e dinâmica. A obra destaca estratégias para articular diversas áreas do conhecimento e fomentar a construção do conhecimento de forma significativa, voltada para o desenvolvimento de habilidades e competências essenciais. Stecanela também enfatiza a necessidade de considerar as realidades e vivências dos estudantes, propondo discussões para uma educação que valorize a pluralidade de ideias e estimule o pensamento crítico e científico.

VIOLÊNCIA escolar e *bullying*: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

Relatório que busca fornecer dados atualizados sobre a violência escolar e o *bullying*, destacando sua natureza, sua abrangência e seus impactos, assim como apresenta iniciativas para enfrentar esses problemas.

WING, Jeannette. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. Tradução: Cleverson Sebastião dos Anjos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/download/4711/pdf. Acesso em: 3 set. 2024.

Esse artigo traz uma discussão a respeito do pensamento computacional, enfatizando sua importância como habilidade analítica que deve ser desenvolvida nos estudantes do Ensino Básico, auxiliando na resolução de quaisquer tipos de problemas.

ZIMER, Tania Teresinha Bruns. *Aprendendo a ensinar matemática nas séries iniciais do ensino fundamental*. 2008. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-24062008-162627/publico/TeseTaniaBrunsZimer.pdf. Acesso em: 10 set. 2024.

Essa tese disserta, entre outros assuntos pedagógicos, a respeito da importância do professor como elemento mediador entre as concepções pessoais e a prática pedagógica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMPLEMENTARES COMENTADAS

Nesta seção, apresentamos sugestões de livros, revistas, artigos, *podcasts*, filmes e *sites* que podem ser consultados com o objetivo de complementar os conteúdos tratados neste volume, bem como obter subsídio teórico-metodológico para o trabalho em sala de aula.

A Matemática no Divã #09
A MATEMÁTICA no Divã. Episódio 09. *Rádio UFSCar*, 26 out. 2024. Disponível em: http://radio.ufscar.br/vPodcast/a-matematica-no-diva. Acesso em: 26 out. 2024.

Nesse episódio, o *podcast* A Matemática no Divã recebe a professora e pesquisadora Natalia Andrea Viana Bedoya para conversar sobre como a Matemática pode contribuir com a construção de laços culturais, sociais e acadêmicos necessários para termos uma sociedade mais justa e inclusiva.

AtivEstat – Atividades de Estatística
ATIVESTAT. Disponível em:https://www.ime.usp.br/ativestat/. Acesso em: 26 out. 2024.

O portal AtivEstat disponibiliza recursos e atividades para apoiar professores no ensino de tópicos de Estatística. O *site* oferece materiais como atividades para sala de aula, miniaplicativos interativos, planilhas, projetos e filmes, promovendo uma aprendizagem ativa. Além disso, fornece guias para facilitar a adaptação dos conteúdos a diferentes níveis de ensino e temas estatísticos.

***Dimensions* – Um passeio matemático**
DIMENSIONS. Disponível em: https://www.dimensions-math.org/Dim_PT.htm. Acesso em: 26 out. 2024.

Esse *site* apresenta um filme matemático composto de nove capítulos que exploram dimensões geométricas. A narrativa, acessível a diferentes níveis de conhecimento, oferece explicações visuais e teóricas, além de sugestões de como utilizar o material. Cada capítulo é apresentado de forma independente, permitindo ao público escolher o que assistir de acordo com seu interesse e nível de entendimento.

Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial
DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de matemática elementar*: geometria espacial. 7. ed. São Paulo: Atual, 2019. v. 10.

Esse livro é composto de teorias e exercícios de aplicação e testes de vestibular referentes a Geometria Espacial, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes. Há ainda uma série de artigos sobre História da Matemática relacionados aos temas abordados.

Geometria nas redes sociais: curta essa ideia!
ROVETTA, Organdi Mongin; SILVA, Sandra Aparecida Fraga da. *Geometria nas redes sociais:* curta essa ideia! Vitória: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, 2015. (Série Guias Didáticos de Matemática, 23). Disponível em: https://educimat.ifes.edu.br/images/stories/Publicações/Produtos%20Educacionais/2015-PE-GDM23-Organdi-Mongin-Rovetta.pdf. Acesso em: 26 out. 2024.

Este guia didático oferece atividades sobre figuras geométricas espaciais com foco na visualização, além de propor o uso de redes sociais como espaço complementar à sala de aula. O material traz exemplos práticos e sugestões para professores de Matemática, com o objetivo de estimular o raciocínio visual e o pensamento geométrico dos estudantes.

M³ (Matemática Multimídia)
M³. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br. Acesso em: 26 out. 2024.

O *site* M³ (Matemática Multimídia), desenvolvido pela Unicamp, disponibiliza mais de 300 recursos educacionais voltados ao ensino de Matemática no Ensino Médio. A plataforma inclui vídeos, áudios, experimentos e *softwares* que exploram desde conceitos históricos até aplicações avançadas. Esses materiais visam incentivar o aprendizado por meio de atividades interativas e exploratórias, como a coleta de dados e a resolução de problemas.

Mathema
MATHEMA. Disponível em: https://mathema.com.br. Acesso em: 26 out. 2024.

Nesse *site*, o professor encontrará informações sobre o Ensino Médio, cursos de aperfeiçoamento profissional, sugestões de livros, revistas, *sites*, *softwares* e vídeos que visam melhorar a prática docente, bem como reflexões sobre temas relacionados à Educação Matemática.

Recursos lúdicos e *softwares* com foco no ensino e aprendizagem da análise combinatória e probabilidade
SOUZA, Antônio Rogério Chaves de; ARAGÃO, Theresa Christine Filgueiras Russo. Recursos lúdicos e *softwares* com foco no ensino e aprendizagem da Análise Combinatória e Probabilidade. *Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação*, São Paulo, v. 9, n. 5, maio 2023. Disponível em: https://periodicorease.pro.br/rease/article/view/9604/3781. Acesso em: 26 out. 2024.

O artigo aborda o uso de metodologias lúdicas no ensino de Análise Combinatória e Probabilidade, com o objetivo de facilitar o aprendizado desses temas no Ensino Médio.

Revista do Professor de Matemática (RPM)
RPM. Disponível em: https://rpm.org.br/. Acesso em: 26 out. 2024.

Esse *site* abrange informações sobre a publicação da Sociedade Brasileira de Matemática. A revista é destinada àqueles que ensinam Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. No *site*, estão disponíveis artigos, edições da revista e informações a respeito da publicação de artigos.

Sistema de Posicionamento Global, GPS: uma alternativa para o ensino de geometria analítica no ensino médio
SANTOS, Antonio de Pádua do Nascimento. *Sistema de Posicionamento Global, GPS*: uma alternativa para o ensino de Geometria Analítica no Ensino Médio. 2023. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7351&id2=171057147. Acesso em: 26 out. 2024.

Este artigo apresenta uma metodologia inovadora para o ensino de Geometria Analítica no Ensino Médio, utilizando o Sistema de Posicionamento Global (GPS) como ferramenta pedagógica. A dissertação aborda o funcionamento do GPS e sua relação com a Relatividade de Einstein, adaptando esses conceitos para uma abordagem acessível aos estudantes. A proposta visa tornar o aprendizado mais dinâmico e conectado ao uso de tecnologias modernas no cotidiano.

ISBN 978-85-16-14000-7

